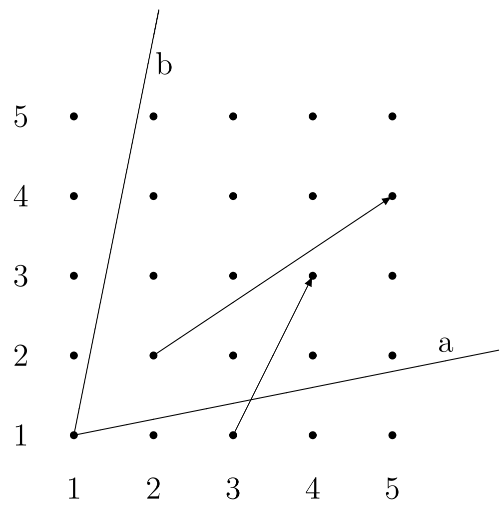
# Egzamin z Logiki dla informatyków

Rozwiązania wybranych zadań

1 lutego 2005

**Zadanie 6.** Poniższy rysunek przedstawia kwadrat kartezjański zbioru $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i pozwala opisać relację $\preceq$. Różne pary z $A^2$ są w relacji $\preceq$, jeżeli można na tym rysunku poprowadzić strzałkę od pierwszej (mniejszej) pary do drugiej (większej) i strzałka ta jest nachylona do prostej poziomej pod kątem przynajmniej takim, jak prosta $a$, i najwyżej takim, jak prosta $b$.




Strzałki znajdujące się na rysunku świadczą o tym, że $(2, 2) \preceq (5, 4)$ oraz $(3, 1) \preceq (4, 3)$. Analizując rysunek łatwo ustalić elementy minimalne w $A^2$. Są to pary, w których nie może kończyć się żadna strzałka, a więc pary postaci $(1, i)$ oraz $(i, 1)$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Widać też, że elementami maksymalnymi są pary postaci $(5, i)$ oraz $(i, 5)$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Można także przekonać się, że najdłuższy łańcuch w $A^2$ ma postać

$$(1, 1) \prec (2, 2) \prec (3, 3) \prec (4, 4) \prec (5, 5).$$

Spostrzeżenia te łatwo uogólnia się i pozwala to rozwiązać zadanie 6.

Niech $A$ oznacza teraz dowolny $n$ elementowy ($n \geqslant 5$) zbiór liniowo uporządkowany. Przyjmijmy, że $m$ oznacza najmniejszy element zbioru $A$, a $M$ – element największy. Oczywiście, $m \neq M$.

**Część 3.** Przypuśćmy, że $(x, y) \in A^2$ oraz $x, y \neq m$. Wtedy $(m, m) \prec (x, y)$. Oznacza to, że pary $(x, y)$ takie, że $x, y \neq m$ nie są elementami minimalnymi. To spostrzeżenie można też wyrazić stwierdzając, że zbiór elementów minimalnych w $A^2$ zawiera się w zbiorze

$$X = \{(m, x) \in A^2 : x \in A\} \cup \{(x, m) \in A^2 : x \in A\}.$$

Łatwo dowodzi się, że $X$ jest zbiorem wszystkich elementów minimalnych w $A^2$, a więc że każda należąca do niego para jest elementem minimalnym. Na przykład, dla każdego $x \in A$ para $(m, x)$ jest elementem minimalnym. W przeciwnym razie musiałaby istnieć inna para $(a, b)$ taka, że $(a, b) \prec (m, x)$. Wtedy zachodziłaby nierówność $a < m$ przecząca definicji $m$.

Teraz łatwo ustalić liczbę elementów minimalmych. Przekrój zbiorów $\{(m, x) \in A^2 : x \in A\}$ oraz $\{(x, m) \in A^2 : x \in A\}$ jest równy $\{(m, m)\}$. Zbiory te są $n$ elementowe, ponieważ są równoliczne z $A$. Na przykład, funkcja $f : A \to \{(m, x) \in A^2 : x \in A\}$ zdefiniowana równością $f(x) = (m, x)$ jest bijekcją. Tak więc liczba elementów minimalnych w $A^2$ jest równa

$$| X | = | \{(m, x) \in A^2 : x \in A\} | + | \{(x, m) \in A^2 : x \in A\} | - | \{(m, m)\} | = 2n - 1.$$

**Część 4.** Podobnie, jak w przypadku elementów minimalnych, zbiór elementów maksymalnych jest równy

$$Y = \{(M, x) \in A^2 : x \in A\} \cup \{(x, M) \in A^2 : x \in A\}$$

i ma $2n - 1$ elementów. Wszystkie potrzebne fakty dowodzimy analogicznie.

**Część 2.** Dla każdego zbioru $A$ o przynajmniej dwóch elementach, w zbiorze $A^2$ bez trudu znajdujemy trzy elementy minimalne: $(M, m)$, $(m, m)$ oraz $(m, M)$. Jeżeli w jakimś zbiorze uporządkowanym są dwa elementy minimalne, to nie ma w nim elementu najmniejszego. Przypuśćmy, że jednak jest element najmniejszy i jest nim para $(a, b)$. Wtedy zachodzą nierówności $(a, b) \preceq (m, M)$ oraz $(a, b) \preceq (m, m)$. Ponieważ pary $(m, M)$ i $(m, m)$ są różne, więc przynajmniej w jednym przypadku mamy nierówność ostrą. Jeżeli $(a, b) \prec (m, M)$, to $a < m$. Przeczy to definicji $m$. Podobnie w drugim przypadku. Otrzymana sprzeczność świadczy o nieistnieniu w zbiorze $A^2$ elementu najmniejszego.

**Część 6.** Zbiór elementów $A^2$, które są jednocześnie minimalne i maksymalne, to przekrój $X \cap Y$. Obliczymy ten zbiór. Zauważmy, że przekrój pierwszych składników z przedstawień zbiorów $X$ i $Y$ jest pusty (należące do nich pary różnią się pierwszą współrzędną). Podobnie jest w przypadku drugich składników. Ponadto,

$$\{(m, x) \in A^2 : x \in A\} \cap \{(x, M) \in A^2 : x \in A\} = \{(m, M)\},$$

a przekrój ostatniej pary składników jest równy $\{(M, m)\}$. Stąd nietrudno wywnioskować, że

$$X \cap Y = \{(m, M), (M, m)\}.$$

Wobec tego, w zbiorze $A^2$ są dwa takie elementy, które jednocześnie są minimalne i maksymalne, i są to $(m, M)$ oraz $(M, m)$.

**Część 5.** Zajmiemy się teraz łańcuchami w $A^2$. Jeżeli $A$ jest zbiorem $n$ elementowym, to łatwo zdefiniować łańcuch długości $n$. Tworzą go pary postaci $(x, x)$ dla wszystkich $x \in A$. Pokażemy, że nie można z elementów $A^2$ utworzyć łańcucha dłuższego. Rozważmy funkcję $f : A^2 \to A$ przyporządkowującą parze $(x, y)$ jej pierwszą współrzędną $x$. Jest to funkcja rosnącą, a więc warunek $(a, b) \prec (x, y)$ implikuje, że $a < x$. Funkcje rosnące są różnowartościowe. Wobec tego, długość dowolnego łańcucha jest równa liczbie elementów zbioru jego pierwszych współrzędnych. Ponieważ pierwsze współrzędne są elementami $A$, więc długość łańcuchów nie przekracza $| A | = n$. W $A^2$ jest łańcuch długości n. Ponieważ fragment łańcucha też jest łańcuchem, więc są też łańcuchy długości 2 oraz $\lfloor n/2 \rfloor$. Nie ma natomiast łańcuchów długości $n+1$, ani $\lfloor \sqrt{2}n - 1 \rfloor$. Nie ma tych ostatnich, gdyż dla $n \geqslant 5$ zachodzi nierówność $n < \lfloor \sqrt{2}n - 1 \rfloor$.

**Część 1.** Każdy porządek w zbiorze skończonym jest regularny. Wynika to w sposób oczywisty ze znanego i ważnego twierdzenia mówiącego, że w każdym niepustym zbiorze uporządkowanym jest element minimalny. Wystarczy przypomnieć sobie definicję porządku regularnego i/lub twierdzenie 137 ze skryptu.

Udowodnimy jeszcze podane twierdzenie korzystając z zasady indukcji (noetherowskiej dla zwykłego porządku w N, patrz twierdzenie 139 ze skryptu). Weźmy niepusty zbiór uporządkowany $A$ o $n$ elementach i dowolny element $a \in A$. Może jest to element minimalny. W przeciwnym razie, zbiór

$$X = \{x \in A : x < a\}$$

jest niepusty, ma mniej elementów niż $A$ (brakuje w nim np. $a$) i jest uporządkowany tą samą relacją, co zbiór $A$. Korzystając z założenia indukcyjnego znajdujemy element $m \in X$, który jest minimalny w zbiorze $X$. Element $m$ jest także minimalny w zbiorze $A$. W przeciwnym razie w zbiorze $A$ istniałby element $x$ taki, że $x < m$. Ponieważ $x < m < a$, więc $x \in X$. Przeczy to jednak założeniu o tym, że $m$ jest minimalny w zbiorze $X$.

**Zadanie 2.** Rozwiązanie zadania 2 powinno zawierać między innymi dowód zwrotności i symetryczności relacji $R$. Ten fragment zadania jest bardzo prosty, prawie oczywisty. Wiele osób miało jednak kłopoty z przedstawieniem rozwiązania. Były one spowodowane koniecznością posługiwania się kwantyfikatorami egzystencjalnymi. Te same problemy występują w dowodzie przechodniości relacji $R$. Zamiast dowodzić, że $R$ jest relacją równoważności pokażemy tylko przechodniość $R$ i zrobimy to bardzo szczegółowo.

**Przechodniość relacji $R$.** Przypuśćmy, że mamy funkcję $f$ i posługując się tą funkcją zdefiniowaliśmy relację $R$. Weźmy trzy liczby naturalne $x$, $y$ i $z$ takie, że $xRy$ i $yRz$. Z definicji relacji $R$ wynika, że

$$\exists n, m \in N \; f^n(x) = f^m(y) \;\wedge\; \exists n, m \in N \; f^n(y) = f^m(z).$$

W szczególności, istnieją liczby naturalne $n$ i $m$ takie, że zachodzi równość $f^n(x) = f^m(y)$. Zwrot „istnieją liczby" znaczy, że takie liczby są. Być może nie wiemy jakie to liczby, może ich wyliczenie jest bardzo trudne i tego jeszcze nie zrobiliśmy, a może konkretna wartość tych liczb nie jest dla nas istotna. Ale mamy gwarancję, że one są. Symbole $n$ i $m$ raczej nie oznaczają tych liczb. Pomagają jedynie wyrazić własności, których oczekujemy od tych liczb: jedna z nich powinna pojawić się w równości $f^n(x) = f^m(y)$ w miejscu $n$, druga – w miejscu $m$. Jeżeli te liczby są, to albo możemy ustalić ich wartość, albo przynajmniej możemy sobie wyobrażać, że to zrobiliśmy. Wtedy możemy je oznaczyć. Przyjmijmy, że są to liczby $a$ i $b$. Dokładniej, $a$ jest tą liczbą, która odpowiada symbolowi $n$, zaś $b$ odpowiada symbolowi $m$. Liczby $a$ i $b$ zostały więc wybrane tak, aby zachodziła równość $f^a(x) = f^b(y)$.

W podobny sposób z drugiej części założenia możemy wywnioskować, że są liczby $c$ i $d$ takie, że $f^c(y) = f^d(z)$.

Jeżeli $f^a(x) = f^b(y)$, to także $f^{a+1}(x) = f(f^a(x)) = f(f^b(y)) = f^{b+1}(y)$. Nakładając jeszcze raz $f$ na obie strony otrzymanej równości dostajemy równość

$f^{a+2}(x) = f^{b+2}(y)$. Bardzo łatwo przez indukcję dowodzi się, że równość $f^{a+k}(x) = f^{b+k}(y)$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $k$. Wobec tego, zachodzi także równość $f^{a+c}(x) = f^{b+c}(y)$. W ten sam sposób z równości $f^c(y) = f^d(z)$ możemy wywnioskować, że $f^{b+c}(y) = f^{b+d}(z)$. Ponieważ równość jest przechodnia, więc $f^{a+c}(x) = f^{b+d}(z)$. Są więc takie liczby $n = a + c$ i $m = b + d$, że $f^n(x) = f^m(z)$. Tym samym wykazaliśmy istnienie liczb $n$ i $m$ spełniających równość $f^n(x) = f^m(z)$.

Dowiedliśmy więc, że $xRz$, a przeprowadzone rozumowanie uzasadnia przechodniość relacji $R$.

**Klasy abstrakcji $R$.** Łatwo zauważyć, że jeżeli funkcja $f$ jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$, to dla dowolnego $n$ odpowiednie, wielokrotne złożenie funkcji $f$ przyporządkowuje liczbie $n$ wartość 0. Zgodnie z definicją relacji $R$ fakt ten oznacza, że $0Rn$. Tak więc 0 jest w relacji $R$ z dowolną liczbą naturalną $n$. Wykażemy to w sposób bardziej precyzyjny korzystając z zasady indukcji. W dowodzie zastosujemy indukcję noetherowską.

Niech $n$ będzie dowolną liczbą naturalną. Jako założenie indukcyjne przyjmujemy, że własność $0Rm$ zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych $m < n$. Chcemy wykazać, że także zachodzi własność $0Rn$. Jeżeli $n = 0$, to zwrotność relacji $R$ gwarantuje, że $0Rn$. Dalej możemy więc zakładać, że $n$ jest liczbą dodatnią. Wtedy

$$f(n) = \lfloor n/2 \rfloor \leqslant n/2 < n.$$

Oznacza to, że dla liczby $f(n)$ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. W ten sposób otrzymujemy, że $0Rf(n)$. Z definicji relacji $R$ bez trudu wynika, że $f(n)Rn$. Ponieważ relacja $R$ jest przechodnia, więc także $0Rn$.

Klasa abstrakcji $[0]$ relacji $R$ wyznaczona przez 0 jest zawarta w zbiorze liczb naturalnych. Wykazaliśmy też, że zawiera wszystkie liczby naturalne. Wobec tego, $[0] = N$. Ponieważ klasy abstrakcji relacji $R$ są niepuste i tworzą podział $N$, więc $R$ nie może mieć innych klas abstrakcji.

*Przygotował Antoni Kościelski*