Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy

18 lutego 2004

Do oceny z egzaminu z *Logiki dla informatyków* liczą się jedynie punkty uzyskane za zadania 1–5. Na podstawie bieżącego egzaminu można jednak otrzymać także zaliczenie egzaminu z *Matematyki I*. Do oceny z egzaminu z *Matematyki I* liczą się punkty zdobyte za wszystkie siedem zadań. Progi punktowe na zaliczenie obu egzaminów są takie same i wynoszą:

punkty	ocena
$-100 \div 32$	ndst
$33 \div 45$	dst
$46 \div 58$	dst+
$59 \div 71$	db
$72 \div 84$	db+
$85 \div +\infty$	bdb

Do liczby punktów za rozwiązane zadania dolicza się $\lfloor (C-35)/10 \rfloor$ punktów bonusowych, gdzie C jest liczbą punktów zdobytych na zaliczenie ćwiczeń.
Zadania 6 i 7 powinni rozwiązać studenci, którzy obawiają się, że uzyskają z egzaminu z *Logiki* ocenę niedostateczną i chcieliby na podstawie bieżącego egzaminu otrzymać ocenę z egzaminu z *Matematyki I* i kontynuować naukę w trybie licencjackim. Zadania 6 i 7 będą sprawdzane i oceniane tylko wówczas, jeśli za rozwiązanie zadań 1–5 student otrzyma ocenę niedostateczną.
Egzamin trwa trzy godziny zegarowe.

Zadanie 1 (20 pkt). Czy istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ taka, że dla dowolnych różnych $X, Y \in \mathcal{R}$ przekrój $X \cap Y$ jest skończony?

Zadanie 2 (20 pkt). Niech R będzie relacją zwrotną i przechodnią. *Łańcuchem wzgledem R* nazywamy ciąg $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ taki, że $\langle a_i, a_{i+1} \rangle \in R$ dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ oraz $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$. Łańcuch $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ jest *cyklem względem R*, jeśli $n > 1$ i $\langle a_n, a_1 \rangle \in R$. Udowodnij, że jeśli nie istnieje cykl względem R, to R jest porządkiem częściowym.

Zadanie 3 (20 pkt). Przez *wartościowanie formuły ϕ* będziemy w tym zadaniu rozumieć odwzorowanie przyporządkowujące zmiennym *występującym w tej formule* wartości logiczne T i F. Formuła zawierająca n różnych zmiennych ma więc 2^n wartościowań.
Niech ψ oraz ϕ będą formułami rachunku zdań zbudowanymi wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\vee$ oraz $\wedge$ (oczywiście można używać nawiasów). Pokaż, że formuła $\psi \Leftrightarrow \phi$ jest spełniona przez co najmniej dwa wartościowania.
Podaj przykład formuł ϕ i ψ takich, że formuła $\psi \Leftrightarrow \phi$ jest spełniona przez dokładnie dwa wartościowania.

Zadanie 4 (20 pkt). Przypomnijmy, że rodzina zbiorów $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest *wstępująca*, jeżeli $A_i \subseteq A_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Niech $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ oraz $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ będą wstępującymi rodzinami zbiorów. Pokaż, że

$$\bigcap_{i=0}^{\infty}(A_i \cup B_i) \;=\; \Big(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i\Big).$$

Wskaż przykład rodzin $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ i $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ dla których równość powyższa nie zachodzi.

Zadanie 5 (20 pkt). Niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru liczb naturalnych taką, że relacja zawierania na tej rodzinie jest porządkiem regularnym. Pokaż, że każdy łańcuch w tym porządku jest przeliczalny.

Zadanie 6 (10 pkt, tylko Matematyka I). Na rodzinie podzbiorów zbioru liczb naturalnych definiujemy relację $\sim$ następująco:

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad A = B \vee 0 \notin A \cup B.$$

Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$.

Zadanie 7 (8 pkt, tylko Matematyka I). Wśród poniższych zdań wskaż zdania prawdziwe i udowodnij je. Dla pozostałych zdań podaj kontrprzykłady dowodzące, że zdania te nie są prawdziwe.

1. Równość $A \cap B = A \cap C$ implikuje równość $B = C$.
2. Równości $A \cap B = A \cap C$ oraz $A \cup B = A \cup C$ implikują równość $B = C$.
3. Inkluzja $A \cup B \subseteq A \cap B$ implikuje równość $A = B$.
4. Równość $A \mathbin{\dot{-}} B = A \mathbin{\dot{-}} C$ implikuje równość $B = C$.