Logika dla informatyków 2003/4

Egzamin poprawkowy

Rozwiązania wybranych zadań

Zadanie 1 (20 pkt). Czy istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ taka, że dla dowolnych różnych $X, Y \in \mathcal{R}$ przekrój $X \cap Y$ jest skończony?

Rozwiązanie. Tak, taka rodzina istnieje.

Dla dowolnej liczby rzeczywistej $r \in \mathbb{R}$ ciąg liczb wymiernych

$$q_n^{(r)} = \frac{\lfloor 10^n r \rfloor}{10^n}$$

jest zbieżny do r, gdyż

$$\left| r - q_n^{(r)} \right| = \left| r - \frac{\lfloor 10^n r \rfloor}{10^n} \right| = \frac{10^n r - \lfloor 10^n r \rfloor}{10^n} \leq \frac{1}{10^n} \to_{n\to\infty} 0.$$

Niech $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ będzie bijekcją ustalającą równoliczność zbiorów liczb wymiernych i naturalnych. Dla dowolnej liczby rzeczywistej $r \in \mathbb{R}$ niech

$$A_r = \{ f(q_n^{(r)}) \mid n \in \mathbb{N} \}.$$

Jeżeli $r_1 < r_2$, to istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $q_n^{(r_1)} \leq r_1 < q_m^{(r_2)}$ dla wszelkich $n \in \mathbb{N}$ i $m \geq n_0$. Wynika to z faktu, że ciągi $(q_n^{(r_1)})$ oraz $(q_n^{(r_2)})$ są niemalejące i zbieżne do różnych granic oraz z tego, że f jest różnowartościowa. Zatem jeżeli $r_1 < r_2$, to zbiory A_{r_1} oraz A_{r_2} są różne, bo np. $f(q_{n_0}^{(r_2)}) \notin A_{r_1}$ ale, z definicji, $f(q_{n_0}^{(r_2)}) \in A_{r_2}$. Ponadto $A_{r_1} \cap A_{r_2} \subseteq \{q_m^{(r_2)} \mid m < n_0\}$, więc $A_{r_1} \cap A_{r_2}$ jest skończony. Rodzina $\{A_r\}_{r\in\mathbb{R}}$ ma więc moc kontinuum i każde jej dwa różne elementy mają skończony przekrój.

Zadanie 2 (20 pkt). Niech R będzie relacją zwrotną i przechodnią. *Łańcuchem wzgledem R* nazywamy ciąg $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ taki, że $\langle a_i, a_{i+1} \rangle \in R$ dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ oraz $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$. Łańcuch $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ jest *cyklem względem R*, jeśli $n > 1$ i $\langle a_n, a_1 \rangle \in R$. Udowodnij, że jeśli nie istnieje cykl względem R, to R jest porządkiem częściowym.

Rozwiązanie. Równoważnie wystarczy wykazać, że jeżeli R nie jest porządkiem częściowym, to istnieje cykl względem R. Relacja R jest zwrotna i przechodnia, nie jest więc porządkiem częściowym, jeżeli nie spełnia warunku słabej antysymetrii. Oznacza to, że istnieją elementy a_1 i a_2, takie, że $a_1 \, R \, a_2$ oraz $a_2 \, R \, a_1$ i $a_1 \neq a_2$. Wówczas ciąg $\langle a_1, a_2 \rangle$ jest cyklem względem R.

Zadanie 3 (20 pkt). Przez *wartościowanie formuły ϕ* będziemy w tym zadaniu rozumieć odwzorowanie przyporządkowujące zmiennym *występującym w tej formule* wartości logiczne T i F. Formuła zawierająca n różnych zmiennych ma więc 2^n wartościowań.

Niech ψ oraz ϕ będą formułami rachunku zdań zbudowanymi wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\vee$ oraz $\wedge$ (oczywiście można używać nawiasów). Pokaż, że formuła $\psi \Leftrightarrow \phi$ jest spełniona przez co najmniej dwa wartościowania.

Podaj przykład formuł ϕ i ψ takich, że formuła $\psi \Leftrightarrow \phi$ jest spełniona przez dokładnie dwa wartościowania.

Rozwiązanie. Formuły zbudowane wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\vee$ oraz $\wedge$ będziemy nazywać *monotonicznymi*. Niech ϕ będzie monotoniczna. Wówczas:

1. $\sigma(\phi) = \mathsf{F}$ dla wartościowania σ takiego, że $\sigma(p) = \mathsf{F}$ dla każdej zmiennej p występującej w ϕ,
2. $\sigma(\phi) = \mathsf{T}$ dla wartościowania σ takiego, że $\sigma(p) = \mathsf{T}$ dla każdej zmiennej p występującej w ϕ.

Dowód przebiega przez indukcję względem liczby spójników $\vee$ oraz $\wedge$ występujących w ϕ. Jeżeli ϕ nie zawiera spójników, to jest pojedynczą zmienną. Teza twierdzenia jest więc oczywista. Przypuśćmy, że powyższe stwierdzenia zachodzą dla wszystkich formuł zawierających mniej niż n spójników i rozważmy formułę ϕ zawierającą n spójników. Formuła ϕ może być postaci $\phi_1 \vee \phi_2$ lub $\phi_1 \wedge \phi_2$. W obu przypadkach formuły ϕ_1 i ϕ_2 zawierają mniej niż n spójników, stosuje się więc do nich założenie indukcyjne. Rozważmy wartościowanie σ takie, że $\sigma(p) = \mathsf{F}$ dla każdej zmiennej p występującej w ϕ. Z założenia indukcyjnego $\sigma(\phi_1) = \sigma(\phi_2) = \mathsf{F}$, więc $\sigma(\phi_1 \vee \phi_2) = \sigma(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathsf{F}$. Podobnie jeżeli $\sigma(p) = \mathsf{T}$ dla każdej zmiennej p występującej w ϕ, to $\sigma(\phi_1) = \sigma(\phi_2) = \mathsf{T}$, więc $\sigma(\phi_1 \vee \phi_2) = \sigma(\phi_1 \wedge \phi_2) = \mathsf{T}$.

Jeżeli więc formuły ϕ i ψ są monotoniczne, to formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest spełniona przez dwa wskazane wyżej wartościowania.

Przykładami formuł dla których $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest spełniona przez dokładnie dwa wartościowania są $\phi = \psi = p$. Istotnie, ponieważ formuła $p \Leftrightarrow p$ posiada dwa wartościowania — jedno z nich nadaje zmiennej p wartość T, drugie zaś — F. Oba wartościowania spełniają tę formułę.

Zadanie 4 (20 pkt). Przypomnijmy, że rodzina zbiorów $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest *wstępująca*, jeżeli $A_i \subseteq A_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Niech $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ oraz $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ będą wstępującymi rodzinami zbiorów. Pokaż, że

$$\bigcap_{i=0}^{\infty}(A_i \cup B_i) \quad = \quad \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i=0}^{\infty} B_i\right).$$

Wskaż przykład rodzin $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ i $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ dla których równość powyższa nie zachodzi.

Rozwiązanie. Jeżeli $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ jest rodziną wstępującą, to $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = A_0$. Jeżeli $\{A_i\}_{i=0}^{\infty}$ oraz $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ są rodzinami wstępującymi, to $\{A_i \cup B_i\}_{i=0}^{\infty}$ też jest rodziną wstępującą. Zatem zarówno lewa, jak i prawa strona dowodzonej równości są równe $A_0 \cup B_0$, więc równość ta zachodzi.
Niech

$$A_n \quad = \quad \begin{cases} \emptyset, & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \mathbb{N}, & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$$

oraz

$$B_n \quad = \quad \begin{cases} \mathbb{N}, & \text{dla } n \text{ parzystych,} \\ \emptyset, & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$

Wówczas $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i = \emptyset$, więc $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \cup \bigcap_{i=0}^{\infty} B_i = \emptyset$, ale $A_i \cup B_i = \mathbb{N}$ dla każdego i, więc $\bigcap_{i=0}^{\infty}(A_i \cup B_i) = \mathbb{N}$ i równość nie zachodzi.

Zadanie 5 (20 pkt). Niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru liczb naturalnych taką, że relacja zawierania na tej rodzinie jest porządkiem regularnym. Pokaż, że każdy łańcuch w tym porządku jest przeliczalny.

Rozwiązanie. Niech $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{K}$ będzie łańcuchem, tj. rodziną zbiorów, na której relacja inkluzji jest porządkiem liniowym. Niech

$$\mathcal{L}' \quad = \quad \begin{cases} \mathcal{L} \setminus \{N\}, & \text{jeżeli } N \text{ jest elementem największym w } \mathcal{L} \\ \mathcal{L} & \text{jeżeli } \mathcal{L} \text{ nie posiada elementu największego.} \end{cases}$$

Jeżeli liniowy porządek jest regularny, to każdy element z wyjątkiem elementu największego posiada następnik (istotnie, następnikiem zbioru A jest $\min\{B \mid B \supseteq A, B \neq A\}$). Zatem każdy zbiór z $\mathcal{L}'$ posiada w $\mathcal{L}$ następnik. Niech

$$f(A) \quad = \quad \min(\mathit{następnik}(A) \setminus A).$$

Ponieważ $A \subsetneq \mathit{następnik}(A)$, więc zbiór $\mathit{następnik}(A) \setminus A$ jest niepusty i posiada element najmniejszy. Definicja f jest więc poprawna. Nadto f jest funkcją różnowartościową. Faktycznie, niech $A_1, A_2 \in \mathcal{L}'$ i $A_1 \neq A_2$. Bez zmniejszania ogólności możemy założyć, że $A_1 \subsetneq A_2$. Wówczas $\mathit{następnik}(A_1) \subseteq A_2$, więc $\mathit{następnik}(A_2) \setminus A_2 \subseteq \mathit{następnik}(A_2) \setminus \mathit{następnik}(A_1)$. Znaczy to, że $(\mathit{następnik}(A_1) \setminus A_1) \cap (\mathit{następnik}(A_2) \setminus A_2) = \emptyset$. Skoro zbiory te są rozłączne, to ich elementy najmniejsze są różne i $f(A_1) \neq f(A_2)$. Zdefiniowaliśmy więc różnowartościowe odwzorowanie zbioru $\mathcal{L}'$ w zbiór liczb naturalnych, zbiór $\mathcal{L}'$, a więc także $\mathcal{L}$ jest zatem przeliczany.

ToMasz Wierzbicki