Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy

29 listopada 2003

Za każde zadanie można otrzymać od -8 do 8 punktów.
Czas trwania egzaminu: 3 godziny zegarowe.

Zadanie 1. Niech symbole F i G oznaczają formuły zdaniowe. Udowodnij poniższe stwierdzenia lub podaj przykłady świadczące o ich fałszywości:

1. Jeśli $F \Rightarrow G$ jest tautologią i F jest tautologią, to G jest tautologią.
2. Jeśli $F \Rightarrow G$ jest spełnialna i F jest spełnialna, to G jest spełnialna.
3. Jeśli $F \Rightarrow G$ jest tautologią i F jest spełnialna, to G jest spełnialna.
4. Jeśli $F \Rightarrow G$ jest spełnialna i F jest tautologią, to G jest spełnialna.

Zadanie 2. Niech $A_0, A_1, A_2, \ldots$ będzie ciągiem zbiorów takim, że

$$A_{n+1} \quad = \quad \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Przyjmijmy, że

$$B \quad = \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i .$$

Pokaż, że $B \times B \subseteq B$.

Zadanie 3. Rozważmy formuły zdaniowe ϕ, w których występują jedynie spójniki równoważności i negacji. Niech ϕ^- oznacza formułę, którą otrzymujemy usuwając z ϕ wszystkie znaki negacji. Udowodnij, że

1. jeżeli symbol negacji występuje w ϕ parzystą liczbę razy, to $\phi \Leftrightarrow \phi^-$ jest tautologią,
2. jeżeli symbol negacji występuje w ϕ nieparzystą liczbę razy, to $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ jest tautologią.

Zauważ, że operacja $^-$ ma następujące własności: $(\neg\phi)^- = \phi^-$ oraz $(\phi \Leftrightarrow \psi)^- = \phi^- \Leftrightarrow \psi^-$.

Zadanie 4. Rozważamy relację $\sim$ określoną na funkcjach ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ w następujący sposób:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \exists c{>}0\ \exists k{>}0\ \forall n{>}k\ (f(n) \leq cg(n) \wedge g(n) \leq cf(n)).$$

1. Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.
2. Jaka jest moc klasy abstrakcji funkcji f takiej, że $f(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$?
3. Jaka jest moc klasy abstrakcji funkcji g takiej, że $g(n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$?

Zadanie 5. Udowodnij, że jeżeli $A \times B = C \times D$, to

$$(A = C \wedge B = D) \vee ((A = \emptyset \vee B = \emptyset) \wedge (C = \emptyset \vee D = \emptyset)).$$