Egzamin połówkowy z Logiki dla informatyków

Rozwiązania wybranych zadań

4 grudnia 2003

Zadanie 2. Niech $A_0, A_1, A_2, \ldots$ będzie ciągiem zbiorów takim, że

$$A_{n+1} \;=\; \Big(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\Big) \times \Big(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\Big)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Przyjmijmy, że

$$B \;=\; \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\,.$$

Pokaż, że $B \times B \subseteq B$.

Rozwiązanie. Jest to jedno z najprostszych zadań z tego egzaminu.

Aby dowieść zawieranie $B \times B \subseteq B$ wystarczy z założenia $X \in B \times B$ wywnioskować, że $X \in B$. Załóżmy więc, że $X \in B \times B$. Elementami iloczynu kartezjańskiego $B \times B$ są pary uporządkowane o współrzędnych należących do B. Przypuśćmy, że X jest parą uporządkowaną $\langle a, b\rangle$ o współrzędnych $a, b \in B$, czyli $X = \langle a, b\rangle$. Zbiór B jest sumą mnogościową wyrazów ciągu $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Wobec tego, elementy a i b należą do pewnych składników tej sumy. Przyjmijmy, że $a \in A_p$ oraz $b \in A_q$ dla pewnych liczb $p, q \in \mathbb{N}$. Stąd oczywiście wynika, że

$$a, b \in \bigcup_{i=0}^{\max\{p,q\}} A_i\,.$$

Łatwo zauważyć, że

$$X = \langle a, b\rangle \in \left(\bigcup_{i=0}^{\max\{p,q\}} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i=0}^{\max\{p,q\}} A_i\right) = A_{\max\{p,q\}+1}.$$

Zbiór $A_{\max\{p,q\}+1}$ jest jednym ze składników sumy równej B. Ponieważ $X \in A_{\max\{p,q\}+1}$, więc także $X \in B$.

Zadanie 3. Rozważmy formuły zdaniowe ϕ, w których występują jedynie spójniki równoważności i negacji. Niech ϕ^- oznacza formułę, którą otrzymujemy usuwając z ϕ wszystkie znaki negacji. Udowodnij, że

1. jeżeli symbol negacji występuje w ϕ parzystą liczbę razy, to $\phi \Leftrightarrow \phi^-$ jest tautologią,
2. jeżeli symbol negacji występuje w ϕ nieparzystą liczbę razy, to $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ jest tautologią.

Zauważ, że operacja $^-$ ma następujące własności: $(\neg\phi)^- = \phi^-$ oraz $(\phi \Leftrightarrow \psi)^- = \phi^- \Leftrightarrow \psi^-$.

Przypomnijmy, że formuły zdaniowe ϕ i ψ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią. Napis $\phi \equiv \psi$ oznacza, że formuły ϕ i ψ są równoważne. Będziemy korzystać z następujących znanych i łatwych do wykazania własności:

1. formuły $\neg\neg\phi$ i ϕ są równoważne,
2. każde dwie z formuł $(\neg\phi) \Leftrightarrow \psi$, $\neg(\phi \Leftrightarrow \psi)$ i $\phi \Leftrightarrow (\neg\psi)$ są równoważne,
3. formuły $(\neg\phi) \Leftrightarrow (\neg\psi)$ i $\phi \Leftrightarrow \psi$ są równoważne.

Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich formuł zdaniowych, w których nie występują spójniki różne od negacji i równoważności. Przyjmijmy też, że symbol $\mathcal{F}_n$ oznacza zbiór tych formuł należących do $\mathcal{F}$, w których występuje najwyżej n spójników.

Rozwiązanie (najbardziej naturalne). Pokażemy przez indukcję ze względu na n, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej formuły $\phi \in \mathcal{F}_n$ zachodzą następujące implikacje:

1. jeżeli w formule ϕ negacja występuje na parzystej liczbie miejsc, to formuła $\phi \Leftrightarrow \phi^-$ jest tautologią,
2. jeżeli w formule ϕ negacja występuje na nieparzystej liczbie miejsc, to formuła $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ jest tautologią.

Z tego pozornie bardziej ogólnego faktu bez trudu można wywnioskować tezę rozwiązywanego zadania.

Pierwsza część dowodu indukcyjnego. Jeżeli $n = 0$, to $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_0$ jest zbiorem zmiennych zdaniowych. Wobec tego, dla formuł $\phi \in \mathcal{F}_0$ zachodzi równość $\phi = \phi^-$. Pierwsza z dowodzonych implikacji jest konsekwencją tego, że formuły postaci $p \Leftrightarrow p$ są tautologiami. Druga zachodzi, ponieważ jej poprzednik jest fałszywy.

Druga część dowodu indukcyjnego. Zakładamy, że formuły ze zbioru $\mathcal{F}_n$ mają obie podane własności i bierzemy formułę $\phi \in \mathcal{F}_{n+1}$. Możemy dodatkowo założyć, że $\phi \notin \mathcal{F}_n$ (dla formuł z $\mathcal{F}_n$ teza zachodzi na mocy założenia indukcyjnego). Oczywiście, wszystkie formuły ze zbioru $\mathcal{F}$ są negacjami, równoważnościami lub zmiennymi i formuła ϕ nie jest zmienną (w przeciwnym razie należałaby do $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_n$).

Przypadek 1: formuła ϕ jest negacją. Przyjmijmy, że $\phi = \neg\psi$. W tym przypadku, $\phi^- = \psi^-$. Oczywiście, formuła $\psi \in \mathcal{F}_n$ i dla formuły ψ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. W zależności od liczby wystąpień negacji w formule ψ, tautologią jest albo formuła $\psi \Leftrightarrow \psi^-$ (gdy negacja występuje w ϕ parzystą liczbę razy), albo formuła $\psi \Leftrightarrow \neg\psi^-$ (w przeciwnym przypadku).

Jeżeli w formule ϕ negacja występuje na parzystej liczbie pozycji, to w formule ψ występuje na nieparzystej i tautologią jest formuła $\psi \Leftrightarrow (\neg\psi^-)$. Tautologią jest także formuła $(\neg\psi) \Leftrightarrow \psi^-$, która jest równa formule $\phi \Leftrightarrow \phi^-$.

Jeżeli w formule ϕ negacja występuje w nieparzystej liczbie miejsc, to w formule ψ występuje w parzystej i formuła $\psi \Leftrightarrow \psi^-$ jest tautologią. Wtedy także tautologią jest formuła $(\neg\psi) \Leftrightarrow (\neg\psi^-)$ identyczna z formuła $\phi \Leftrightarrow (\neg\phi^-)$.

Przypadek 2: formuła ϕ jest równoważnością. Przyjmijmy, że $\phi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ dla pewnych formuł $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_n$. Tym razem zachodzi wzór $\phi^- = \psi_1^- \Leftrightarrow \psi_2^-$. Dalej powinniśmy rozważać cztery przypadki.

Przypadek 2.1: negacja występuje w ϕ nieparzystą, a w ψ_1 parzystą liczbę razy. W tym przypadku negacja występuje w ψ_2 nieparzystą liczbę razy. Dla formuł ψ_1 i ψ_2 możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Wobec tego, formuły ψ_1 i ψ_1^- są równoważne, a także równoważne są ψ_2 i $\neg\psi_2^-$. Wobec tego formuła $\phi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ jest równoważna z $\psi_1^- \Leftrightarrow \neg\psi_2^-$. Korzystając z własności 2), Formuła ϕ jest równoważna z $\neg(\psi_1^- \Leftrightarrow \psi_2^-) = \neg\phi^-$.

Przypadek 2.2: negacja występuje w ϕ i ψ_1 nieparzystą liczbę razy. W tym i kolejnych przypadkach przeprowadzamy rozumowanie podobne do wyżej przedstawionego.

Aby zakończyć rozwiązanie, powinniśmy jeszcze rozważyć następujące przypadki:

Przypadek 2.3: negacja występuje w ϕ parzystą, a w ψ_1 nieparzystą liczbę razy.

Przypadek 2.4: negacja występuje w ϕ i ψ_1 parzystą liczbę razy.

Rozwiązanie (sugerowane przez jedną z prac egzaminacyjnych). Przypuśćmy, że mamy daną formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i wartościowanie h (zmiennych występujących w tej formule). Symbolem $\phi[h]$ oznaczamy wartość logiczną formuły ϕ przy wartościowaniu h. Dla danego wartościowania, indeksem $i_h(\phi)$ formuły ϕ nazywamy sumę liczby negacji występujących w ϕ i liczby wystąpień w ϕ zmiennych fałszywych przy wartościowaniu h. Na przykład, jeżeli $h(p) = 1$, $h(q) = 0$ oraz $\phi = (q \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \neg(q \Leftrightarrow (\neg q \Leftrightarrow p))$, to $i_h(\phi) = 5$.

Lemat. Przypuśćmy, że mamy formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i wartościowanie h zmiennych tej formuły. Formuła ϕ jest spełniona przy wartościowaniu h wtedy i tylko wtedy, gdy $i_h(\phi)$ jest liczbą parzystą.

Dowód. Dowód tego lematu pozostawiamy jako ćwiczenie.

Wniosek. Formuła $\phi \in \mathcal{F}$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy występuje w niej parzysta liczba negacji i każda zmienna zdaniowa występuje parzystą liczbę razy.

Dowód. Weźmy formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i najpierw załóżmy, że jest tautologią. Formuła ϕ jest więc spełniona dla każdego wartościowania. Niech h wartościowaniem, które wszystkim zmiennym z formuły ϕ przyporządkowuje 1 (prawdę). Dla tego wartościowania indeks $i_h(\phi)$ jest liczbą negacji występujących w ϕ. Na podstawie powyższego lematu indeks ten jest liczbą parzystą.

Aby pokazać, że zmienna p występuje w ϕ parzystą liczbę razy weźmy wartościowanie h_p, które zmiennej p przyporządkowuje 0 (fałsz), a pozostałym zmiennym — 1 (prawdę). Dla tego wartościowania indeks $i_{h_p}(\phi)$ jest liczbą parzystą i jest równy sumie liczb wystąpień w ϕ negacji i wystąpień zmiennej p. Odejmując od indeksu liczbę wystąpień negacji otrzymujemy liczbę wystąpień zmiennej p. Liczba ta, jako różnica dwóch liczb parzystych jest parzysta.

Aby dowieść implikację przeciwną do udowodnionej, wystarczy zauważyć, że jeżeli w formule ϕ negacja i każda zmienna występuje parzystą liczbę razy, to dla dowolnego wartościowania indeks tej formuły jest liczbą parzystą. W tej sytuacji, z powyższego lematu wynika, że formuła ϕ jest spełniona dla dowolnego wartościowania. $\square$

Korzystając z podanego wniosku bez trudu możemy sprawdzić, czy formuły takie, jak $\phi \Leftrightarrow \phi^-$ lub $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ są tautologiami.

Rozwiązanie (też sugerowane). Z lematu podanego w poprzednim rozwiązaniu wynika następujący, oczywisty wniosek:

Wniosek. Przypuśćmy, że formułę ψ otrzymujemy wymazując w formule $\phi \in \mathcal{F}$ jeden znak negacji. Wtedy, dla dowolnego wartościowania h wartości logiczne $\phi[h]$ i $\psi[h]$ są różne. $\square$

Weźmy teraz formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i wymazujmy w niej kolejno symbole negacji tak długo, aż wymażemy wszystkie. Przypuśćmy, że w ten sposób otrzymujemy ciąg formuł

$$\phi = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n.$$

Oczywiście, $\phi_n = \phi^-$ i n jest liczbą znaków negacji występujących w ϕ. Z powyższego wniosku wynika, że dla dowolnego wartościowania h ciąg wartości logicznych

$$\phi[h] = \phi_0[h], \phi_1[h], \ldots, \phi_n[h] = \phi^-[h]$$

zawiera na przemian 0 i 1. Stąd wynika, że jeżeli n jest liczbą parzystą, to $\phi[h] = \phi^-[h]$ dla dowolnego wartościowania h. Podobnie, jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $\phi[h] \neq \phi^-[h]$ dla dowolnego wartościowania h. Teraz teza zadania jest już oczywista.

Rozwiązanie (jeszcze inna wersja). To rozwiązanie też rozpoczniemy od wykazania pomocniczego lematu.

Lemat. Jeżeli w formule $\phi \in \mathcal{F}$ występuje dokładnie jeden symbol negacji, to formuła $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ jest tautologią.

Dowód. Lemat ten udowodnimy przez indukcję ze względu na liczbę spójników występujących w $\mathcal{F}$. Dla formuł $\phi \in \mathcal{F}_0$ jest on oczywisty, gdyż dla takich formuł nie jest spełnione założenie lematu.

Przypuśćmy, że lemat zachodzi dla formuł ze zbioru $\mathcal{F}_n$ i weźmy formułę $\phi \in \mathcal{F}_{n+1}$. Są możliwe dwa przypadki.

Przypadek 1: formuła ϕ jest negacją. Jeżeli $\phi = \neg\psi$, to $\phi^- = \psi^-$ i dodatkowo — na podstawie założenia — w formule ψ nie występuje negacja, a więc $\psi^- = \psi$. Nietrudno zauważyć, że w tym przypadku w formule $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ po obu stronach równoważości znajduje się to samo.

Przypadek 2: formuła ϕ jest równoważnością. Jeżeli $\phi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ i negacja występuje w ϕ w dokładnie jednym miejscu, to występuje w dokładnie jednym miejscu dokładnie jednej z formuł ψ_1 lub ψ_2. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że negacja występuje w ψ_1.

Z założenia indukcyjnego wynika, że formuły ψ_1 i $\neg\psi_1^-$ są równoważne. Jest oczywiste, że $\psi_2^- = \psi_2$. Na podstawie własności 2) podanej na początku mamy, że formuła $\neg\phi^-$, czyli $\neg(\psi_1^- \Leftrightarrow \psi_2^-)$, jest równoważna formule $(\neg\psi_1^-) \Leftrightarrow \psi_2^-$, a ta z kolei — na podstawie założenia indukcyjnego — jest równoważna $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2^-$, czyli formule ϕ. $\square$

Załóżmy, że w formule ϕ jest symbol negacji i ten symbol poprzedza formułę δ. Przyjmijmy, że jeżeli wymażemy w ϕ tę negację wraz z formułą δ i w to miejsce wstawimy nową zmienną zdaniową q, to otrzymamy formułę ψ. Nietrudno zauważyć, że jeżeli teraz w formule ψ zastąpimy zmienną q formułą $\neg\delta$ to otrzymamy formułę $\psi(\neg\delta)$ identyczną z wyjściową formułą ϕ.

W formułach ψ i δ występuje mniej spójników, niż w ϕ. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że zależnie od przypadku, formuły $\psi \Leftrightarrow \neg\psi^-$ oraz $\delta \Leftrightarrow \neg\delta^-$ lub podobne formuły bez negacji są tautologiami. Dalej korzystamy z dwóch faktów: zastępując w formułach równoważnych (lub w tautologii) pewną zmienną zdaniową dowolną formuła otrzymujemy formuły równoważne (lub odpowiednio: otrzymujemy tautologię) oraz zastępując w dowolnej formule pewien jej fragment formułą równoważną otrzymujemy formułę równoważną. Na przykład, jeżeli w formule ϕ występuje nieparzysta liczba spójników negacji oraz spójniki te podzieliły się tak, że podane wyżej formuły są tautologiami, to następujące formuły są równoważne:

$$\phi \;=\; \psi(\neg\delta),\ \neg\psi^-(\neg\delta),\ \neg\psi^-(\delta^-) \;=\; \neg\phi^-.$$

Sformułowany wyżej lemat przydaje się innych przypadkach.

Przygotował Antoni Kościelski