Logika dla informatyków

Egzamin końcowy

29 stycznia 2004

Do oceny z egzaminu z *Logiki dla informatyków* liczą się jedynie punkty uzyskane za zadania 1–5. Na podstawie bieżącego egzaminu można jednak otrzymać także zaliczenie egzaminu z *Matematyki I*. Do oceny z egzaminu z *Matematyki I* liczą się punkty zdobyte za wszystkie siedem zadań. Progi punktowe na zaliczenie obu egzaminów są takie same i wynoszą:

punkty	ocena
$-100 \div 32$	ndst
$33 \div 45$	dst
$46 \div 58$	dst+
$59 \div 71$	db
$72 \div 84$	db+
$85 \div +\infty$	bdb

Do liczby punktów za rozwiązane zadania dolicza się punkty zdobyte na egzaminie połówkowym oraz $\lfloor (C - 35)/10 \rfloor$ punktów bonusowych, gdzie C jest liczbą punktów zdobytych na zaliczenie ćwiczeń.

Zadania 6 i 7 powinni rozwiązać studenci, którzy obawiają się, że uzyskają z egzaminu z *Logiki* ocenę niedostateczną i chcieliby na podstawie bieżącego egzaminu otrzymać ocenę z egzaminu z *Matematyki I* i kontynuować naukę w trybie licencjackim. Zadania 6 i 7 będą sprawdzane i oceniane tylko wówczas, jeśli za rozwiązanie zadań 1–5 student otrzyma ocenę niedostateczną. Oddanie rozwiązań zadań 6 i 7 nie pozbawia studenta prawa do przystąpienia do egazminu poprawkowego z *Logiki*.

Egzamin trwa trzy godziny zegarowe.

Zadanie 1 (12 pkt). Niech Σ będzie sygnaturą, zawierającą co najmniej jeden binarny symbol funkcyjny i niech V oznacza przeliczalny nieskończony zbiór zmiennych. Niech $\mathcal{T}(\Sigma, V)$ oznacza algebrę termów nad sygnaturą Σ ze zmiennymi z V. Rozważamy homomorfizmy

$$h : \mathcal{T}(\Sigma, V) \to \mathcal{T}(\Sigma, V).$$

Czy jest taki homomorfizm h i term t, dla których zbiór $h^{-1}(\{t\})$ jest nieskończony? Podaj wszystkie liczby naturalne n, takie, że istnieją h i t, dla których zbiór $h^{-1}(\{t\})$ ma n elementów.

Zadanie 2 (12 pkt). Niech $\phi_1, \ldots, \phi_n$ będą formułami zdaniowymi, w których nie występują zmienne zdaniowe $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Udowodnij, że formuła

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$$

jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest formuła

$$\neg p_1 \vee \bigvee_{i=1}^{n} (\phi_i \wedge p_i \wedge \neg p_{i+1}) \vee p_{n+1}.$$

Zadanie 3 (12 pkt). Niech R_1 i R_2 będą relacjami równoważności na zbiorze A. Udowodnij, że $R_1 \cup R_2$ jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $R_1 \cup R_2 = R_1 R_2$.

Zadanie 4 (12 pkt). Niech $\mathcal{X}$ będzie przeliczalną rodziną podzbiorów $\mathbb{N}$. Udowodnij, że istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{K}$ taka, że $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}$ i $\langle \mathcal{K}, \subseteq \rangle$ jest kratą.

Zadanie 5 (12 pkt). Kandydaci do objęcia pewnego stanowiska oceniani są w $k \in \mathbb{N}$ różnych kategoriach. W każdej z tych kategorii otrzymują ocenę będącą liczbą naturalną nie mniejszą niż 1 i nie większą niż 6. Kandydat k_1 uważany jest za lepszego niż k_2 (co zapisujemy jako $k_1 \, L \, k_2$) jeśli k_1 ma wyższe oceny niż k_2 we wszystkich kategoriach oprócz co najwyżej dwóch. Niech R będzie najmniejszą zwrotną relacją taką, że $RR \subseteq R$ i $L \subseteq R$. Czy R jest częściowym porządkiem, jeśli:

a) $k = 12$,

b) $k = 13$?

Zadanie 6 (9 pkt, tylko Matematyka I). Czy w rachunku zdań zachodzą prawa:

a) *łączności implikacji* (tj. czy formuły

$$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \quad \text{oraz} \quad (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

są równoważne),

b) *rozdzielności implikacji względem koniunkcji* (tj. czy formuły

$$p \Rightarrow (q \wedge r) \quad \text{oraz} \quad (p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$$

są równoważne),

c) *rozdzielności alternatywy wzgledem implikacji* (tj. czy formuły

$$p \vee (q \Rightarrow r) \quad \text{oraz} \quad (p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$$

są równoważne)?

Zadanie 7 (6 pkt, tylko Matematyka I). Udowodnij przez indukcje, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. *Wskazówka:* wybierz odpowiednią zasadę indukcji.