Rozwiązania niektórych zadań z egzaminu z 14 lutego 2003

Zadanie 1 *Wykaż przez indukcję, że dla każdej formuły zdaniowej ϕ zbudowanej ze zmiennych oraz spójników $\wedge$ i $\vee$ istnieje formuła ψ postaci $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$, taka że dla każdego $i \leq n$ formuła ψ_i jest koniunkcją zmiennych oraz $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ jest tautologią.*

Szkic rozwiązania 1. Formuły ϕ i ψ będę nazywał równoważnymi wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią. Zauważmy, że

Fakt 1.1 *Formuła $(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \psi$ jest równoważna $(\varphi_1 \wedge \psi) \vee (\varphi_2 \wedge \psi)$, czyli formuła*

$$(\varphi_1 \vee \varphi_2) \wedge \psi \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \psi) \vee (\varphi_2 \wedge \psi)$$

jest tautologią.

Fakt 1.2 *Formuła*

$$(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge \psi \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \psi) \vee \ldots \vee (\varphi_n \wedge \psi)$$

jest tautologią. Tautologią jest także formuła

$$\psi \wedge (\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \Leftrightarrow (\psi \wedge \varphi_1) \vee \ldots \vee (\psi \wedge \varphi_n).$$

Fakt 1.3 *Formuła*

$$(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \wedge (\varphi'_1 \vee \ldots \vee \varphi'_m) \Leftrightarrow (\varphi_1 \wedge \varphi'_1) \vee \ldots \vee (\varphi_n \wedge \varphi'_1) \vee \ldots \vee (\varphi_1 \wedge \varphi'_m) \vee \ldots \vee (\varphi_n \wedge \varphi'_m)$$

jest tautologią.

Korzystając z ostatniego faktu można dowieść własność podaną w zadaniu przez indukcję ze względu na liczbę spójników występujących w formule ϕ.

Jeżeli w formule ϕ nie występują spójniki, to jest ona zmienną. Każda zmienna jest jednoczłonową alternatywą, której jedynym członem jest jednoczłonowa koniunkcja. Tak więc w tym przypadku formuła ϕ ma odpowiednią postać i możemy przyjąć, że $\psi = \phi$.

Jeżeli w formule ϕ występuje przynajmniej jeden spójnik, to jest ona koniunkcją lub alternatywą formuł z mniejszą liczbą spójników. W przypadku alternatywy dalszy dowód jest prosty i zostaje pominięty. Jeżeli $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, to na podstawie założenia indukcyjnego znajdujemy alternatywy ψ_1 i ψ_2 wymaganej postaci równoważne odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2. Wprowadzając odpowiednie oznaczenia możemy przyjąć, że lewa strona równoważności z ostatniego faktu jest równa $\psi_1 \wedge \psi_2$. Formułę ψ definiujemy jako prawą stronę równoważności z tego faktu. $\square$

Inne rozwiązanie. Najpierw sformalizujemy treść zadania.

Symbolem $\mathcal{K}$ będziemy oznaczać najmniejszy w sensie inkluzji spośród zbiorów X spełniających warunki:

1. wszystkie znmienne zdaniowe należą do X,
2. jeżeli ϕ i ψ należą do X, to także formuła $\phi \wedge \psi$ należy do X.

Tak więc $\mathcal{K}$ jest zbiorem koniunkcji zmiennych zdaniowych. Symbolem $\mathcal{A}$ będziemy zaś oznaczać najmniejszy w sensie inkluzji spośród zbiorów X spełniających warunki:

1. $\mathcal{K} \subseteq X$,
2. jeżeli ϕ i ψ należą do X, to także formuła $\phi \vee \psi$ należy do X.

Tak więc $\mathcal{A}$ jest zbiorem alternatyw koniunkcji zmiennych zdaniowych. Posługując się wprowadzonymi oznaczeniami rozwiązywane zadanie można sformułować następująco: dowieść, że dla każdej formuły ϕ, w której występują tylko spójniki $\wedge$ i $\vee$, istnieje formuła $\psi \in \mathcal{A}$ taka, że formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią.

Dowód zostanie przeprowadzony przez indukcję ze względu na liczbę spójników występujących w formule ϕ.

Niech n będzie liczbą naturalną, a ϕ formułą, w której występuje n spójników i są to jedynie spójniki $\wedge$ i $\vee$. Będziemy zakładać, że jeżeli w pewnej formule występuje mniej niż n spójników, to jest ona równoważna formule należącej do $\mathcal{A}$. Przy tym założeniu wykażemy, że ψ też jest równoważna formule należącej do $\mathcal{A}$.

W dowodzie będziemy rozważać kilka przypadków. Najpierw przyjmijmy dodatkowo, że $n = 0$. Wtedy w formule ϕ nie ma spójników, a więc ϕ jest zmienną i – w konsekwencji – należy do $\mathcal{K}$ oraz do $\mathcal{A}$. W tym przypadku przyjmujemy, że $\psi = \phi$. Oczywiście, $\psi \in \mathcal{A}$, a ponadto, formuły ϕ i ψ są w oczywisty sposób równoważne.

Jeżeli $n > 0$, to w ϕ jest przynajmniej jeden spójnik. Wtedy ϕ jest albo koniunkcją, albo alternatywą formuł zawierających mniejszą liczbę spójników niż ϕ. Najpierw załóżmy, że $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Dla formuł ϕ_1 i ϕ_2 możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Istnieją więc w $\mathcal{A}$ formuły ψ_1 i ψ_2 równoważne odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2. Oczywiście, $\psi_1 \vee \psi_2 \in \mathcal{A}$ oraz $\psi_1 \vee \psi_2$ jest równoważne z $\phi_1 \vee \phi_2$.

Jeżeli $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, to także znajdujemy w $\mathcal{A}$ formuły ψ_1 i ψ_2 równoważne odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2. Formuły z $\mathcal{A}$ albo należą do $\mathcal{K}$, albo są alternatywami.

Jeżeli ψ_1 i ψ_2 należą do $\mathcal{K}$, to przyjmujemy, że $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Także w tym przypadku jest oczywiste, że $\psi \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ oraz, że ϕ jest równoważne ψ.

Pozostał do rozważania przypadek, w którym przynajmniej jedna z formuł ψ_1 i ψ_2 jest alternatywą. Załóżmy, że $\psi_1 = \psi_{11} \vee \psi_{12}$. Jeżeli okaże się, że alternatywą jest tylko ψ_2 będziemy postępować dokładnie tak samo. Na mocy prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy (prawo $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$) otrzymujemy, że formuła

$$\phi = (\phi_{11} \vee \psi_{12}) \wedge \phi_2$$

jest równoważna formule

$$(\phi_{11} \wedge \phi_2) \vee (\psi_{12} \wedge \phi_2).$$

Nietrudno zauważyć, że w obu członach tej alternatywy jest mniej spójników, niż w formule ϕ. Do tych członów możemy więc zastosować założenie indukcyjne. W ten sposób znajdujemy formuły ψ_1 i ψ_2 takie, że

$$\psi_1 \Leftrightarrow (\phi_{11} \wedge \phi_2) \text{ oraz } \psi_2 \Leftrightarrow (\phi_{12} \wedge \phi_2)$$

są tautologiami. Bez trudu dowodzimy, że formuła

$$\phi \Leftrightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$$

jest tautologią. Ponieważ $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{A}$, więc także $\psi_1 \vee \psi_2 \in \mathcal{A}$. W rozważanym przypadku możemy przyjąć, że $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$. $\square$

Przedstawiony dowód można rozbić na dwie części dowodząc najpierw, że koniunkcja formuł należących do $\mathcal{A}$ jest równoważna formule należącej do $\mathcal{A}$.

Zadanie 2 *Niech $f : R \to R$. Mówimy, że $x \in R$ jest maksimum lokalnym funkcji f, jeżeli istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista r, że dla każdego $y \in R$ jest spełniony warunek*

$$(x - r < y < x + r \wedge x \neq y) \Rightarrow f(x) > f(y).$$

Udowodnij, że dla każdej funkcji $f : R \to R$ zbiór jej lokalnych maksimów jest przeliczalny.

Przykład 1. Najpierw podam przykłady funkcji, dla których nie można skonstruować rodziny parami rozłącznych przedziałów zawierających wszystkie maksima lokalne, takiej że w każdym przedziale jest najwyżej jedno maksimum.

Rozważmy funkcję $f_1 : R \to R$ zdefiniowaną wzorem

$$f_1(x) = \begin{cases} sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 2 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja f_1 przyjmuje maksimum lokalne dla $x = 0$ i dla wszystkich $x = \frac{1}{2k\pi}$ dla $k \in Z$.

Podobnie jest w przypadku funkcji f_2 zdefiniowanej wzorem

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2\left(sin\left(\frac{1}{x}\right) - 2\right) & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

która dodatkowo jest ciągła, a nawet różnczkowalna. □

Przykład 2. Weźmy teraz funkcję $f : R \to R$ przyjmującą wartości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{jeżeli } x = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } n \text{ i } m \text{ są liczbami względnie pierwszymi i } n > 0 \\ 1 & \text{jeżeli } x = 0 \\ 0 & \text{jeżeli } x \notin Q. \end{cases}$$

Dla tej funkcji zbiór lokalnych maksimów jest równy zbiorowi liczb wymiernych. Zauważmy od razu ważną własność funkcji f: dla dowolnej dodatniej liczby k i dla dowolnej liczby całkowitej a, funkcja f nie przyjmuje wartości $1/k$ dla argumentów $x \in (a/k, (a+1)/k)$.

Najpierw pokażemy, że $3/7$ jest lokalnym maksimum f. Oczywiście, $f(3/7) = 1/7$. Zauważmy, że w przedziale $(2/7, 4/7)$ funkcja f przyjmuje wartość $1/7$ tylko dla $x = 3/7$. Funkcja f przyjmuje też wartości większe od $1/7$ i są to wartości 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ i $1/6$. Ale f nie przyjmuje wartości 1 w przedziale $(0, 1)$, nie przyjmuje wartości $1/2$ w przedziale $(0, 1/2)$, nie przyjmuje wartości $1/3$ dla $x \in (1/3, 2/3)$, wartości $1/4$ dla $x \in (1/4, 2/4)$, wartości $1/5$ dla $x \in (2/5, 3/5)$ oraz wartości $1/6$ dla $x \in (2/6, 3/6)$. Zauważmy, że do wszystkich wymienionych przedziałow należy $3/7$. Co więcej, dla argumentów należących do przekroju wymienionych przedziałów (z wyjątkiem $x = 3/7$) funkcja f nie przyjmuje wartości $\geq 1/7$. Przekrojem tym jest $(2/5, 1/2)$. Dla $x \in (2/5, 1/2)$ z wyjątkiem $x = 3/7$ funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od $1/7$. Zmnieszając ten przedział można spowodować, że jego środkiem stanie się punkt $3/7$. Tak więc $3/7$ jest jednym z maksimów lokalnych funkcji f.

Przedstawione rozumowanie można powtórzyć dla każdej z liczb wymiernych. Jeżeli m/n jest nieskracalnym przedstawieniem liczby wymiernej i $n > 0$, to definiujemy

$$a_k = \max\{a \in Z : \frac{a}{k} < \frac{m}{n}\}.$$

Oczywiście, $\frac{a_k}{k} < \frac{m}{n} \leq \frac{a_k+1}{k}$. Jeżeli $0 < k < n$, to także $\frac{m}{n} < \frac{a_k+1}{k}$, gdyż przedstawienie liczby wymiernej w postaci nieskracalnego ułamka z dodatnim mianownikiem jest jednoznaczne i liczba m/n nie daje się przedstawić w postaci l/k.

Przyjmijmy, że

$$p = \max\{a_1, \dots, a_n\} \text{ oraz } q = \min\{a_1 + 1, \dots, a_{n-1} + 1, a_n + 2\}.$$

Liczby p i q są tak dobrane, że

$$(p, q) = \bigcap_{k=1}^{n-1}(a_k, a_k + 1) \cap (a_n, a_n + 2).$$

Oczywiście, $m/n \in (p, q)$. Ze wspomnianej własności funkcji f otrzymujemy, że na przedziale (p, q) nie przyjmuje ona wartości $> 1/n$ oraz – z wyjątkiem argumentu m/n – nie przyjmuje wartości $1/n$. Wobec tego, na przedziałach $(p, m/n)$ i $(m/n, q)$ funkcja f przyjmuje tylko wartości $< 1/n$. Aby wykazać, że liczba m/n spełnia warunek z definicji maksimum lokalnego wystarczy zastąpić przedział (p, q) mniejszym i symetrycznym względem punktu m/n. □

Można konstruować jeszcze bardziej skomplikowane funkcje o interesujących nas własnościach. Prawdopodobnie można dowieść, że dla dowolnego przeliczalnego zbioru $X \subseteq R$ istnieje funkcja $f : R \to R$, która ma maksima lokalne dokładnie w punktach należących do X.

Rozwiązanie. Weźmy funkcję $f : R \to R$ i zdefiniujmy zbiór

$$M = \{x \in R : x \text{ jest maksimum lokalnym funkcji } f\}.$$

Aby rozwiązać zadanie wystarczy dowieść, że M jest przeliczalny. Przeliczalność zbioru M wykażemy dowodząc, że istnieje różnowartościowa funkcja

$$g : M \to Q \times Q.$$

Od funkcji g będzie wymagać, aby dla argumentu $m \in M$ jej wartością była para liczb wymiernych r_1, r_2 taka, że $r_1 < m < r_2$ i dla wszystkich $x \in R$ spełniony jest warunek

$$r_1 < x < r_2 \wedge x \neq m \Rightarrow f(x) < f(m).$$

Oczywiście, dla każdego $m \in M$ takie liczby r_1 i r_2 istnieją. Dzięki temu, korzystając z przeliczalności produktu $Q \times Q$ można zdefiniować funkcję g przyjmując, że $g(m)$ pierwszą w ustalonej numeracji zbioru $Q \times Q$ parą o podanych własnościach.

Teraz wystarczy dowieść, że funkcja g jest różnowartościowa. Przypuśćmy, że mamy dwa różne elementy $m_1, m_2 \in M$ takie, że $g(m_1) = g(m_2)$. Jeżeli $g(m_1) = (r_1, r_2)$, to $m_1, m_2 \in (r_1, r_2)$ i z podanej własności g możemy wywnioskować dwie nierówności:

$$f(m_2) < f(m_1) \text{ oraz } f(m_1) < f(m_2).$$

Z drugiej strony, te nierówności nie mogą być jednocześnie prawdziwe. Uzyskana w ten sposób sprzeczność dowodzi różnowartościowości funkcji g, a to z kolei implikuje przeliczalność zbioru M. □