Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy

30 listopada 2002

Za dzisiejszy egzamin można otrzymać od -40 do 40 punktów, za egzamin końcowy zaś od -60 do 60 punktów. Łącznie można więc otrzymać od -100 do 100 punktów. Jeżeli punktacja za zadanie egzaminacyjne wynosi n, znaczy to, że za rozwiązanie tego zadania można otrzymać od $-n$ do n punktów. Punkty ujemne będą przyznawane za umieszczenie w rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywych. Za brak rozwiązania zadania otrzymuje się 0 punktów. Punkty z egzaminu zasadniczego przeliczają się na oceny zgodnie z tabelką:

$-100 \div 32$	ndst
$33 \div 45$	dst
$46 \div 58$	dst+
$59 \div 71$	db
$72 \div 84$	db+
$85 \div 100$	bdb

Czas trwania egzaminu wynosi 3 godziny zegarowe.

Zadanie 1 (8 punktów). Niech I oznacza relację identyczności na zbiorze X. Udowodnij, że relacja $R \subseteq X \times X$ jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$I \subseteq R \wedge R^{-1} = R \wedge RR \subseteq R.$$

Zadanie 2 (6 punktów). Pokaż, że

$$(A_1 \cup A_2) \dot{-} (B_1 \cup B_2) \subseteq (A_1 \dot{-} B_1) \cup (A_2 \dot{-} B_2).$$

Czy zawieranie

$$(A_1 \cap A_2) \dot{-} (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \dot{-} B_1) \cup (A_2 \dot{-} B_2)$$

jest prawdziwe dla dowolnych zbiorów A_1, A_2, B_1 i B_2?
Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3 (4 punkty). Udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów $\{A_t : t \in T\}$ i $\{B_t : t \in T\}$ zachodzi inkluzja

$$\bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t \subseteq \bigcap_{t \in T} (A_t \cup B_t).$$

Czy zachodzi też inkluzja odwrotna? Odpowiedź uzasadnij.

Ciąg dalszy na odwrocie →

Zadanie 4 (4 punkty). Używając tylko kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$, $\times$, $=$ i $\leq$ napisz formułę mówiącą, że wśród każdych trzech liczb naturalnych zawsze znajdą się dwie, których różnica jest nieujemna i parzysta. Czy taką formułę można zapisać używając wyłącznie kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$ i $=$?
Używając tylko kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$, $\times$, $=$, $<$ i symbolu f napisz formułę mówiącą, że jeśli funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest silnie rosnąca (dla większych argumentów ma większe wartości), to jej wartości są nieograniczone.

Zadanie 5 (7 punktów). Dla jakich zbiorów C prawdziwe jest zdanie: dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi

$$A \times C \subseteq B \times C \;\Rightarrow\; A \subseteq B$$

Zadanie 6 (11 punktów). Zbiory A i B są równoliczne. Pokaż, że dla dowolnego zbioru C równoliczne są zbiory:

1. $C \times A$ i $C \times B$,
2. C^A i C^B,
3. A^C i B^C.

Zadanie 7 (bonusowe, 15 punktów). Niech A będzie zbiorem, a f — bijekcją przekształcającą zbiór A w A. Zdefiniujmy relację $R \subseteq A^2$ przyjmując, że

$$x R y \;\Leftrightarrow\; f(x) = y.$$

Symbolem R_∞ oznaczamy przechodnie domknięcie relacji R, czyli relację $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, gdzie $R^1 = R$ oraz $R^{n+1} = R^n R$. Czy

1. R_∞ jest relacją równoważności?
2. R_∞ jest relacją równoważności, jeśli A jest zbiorem skończonym?

Odpowiedzi uzasadnij.

Zadanie 8 (bonusowe, 5 punktów). Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Kiedy równanie

$$A \cup X = B$$

1. ma dokładnie jedno rozwiązanie,
2. ma nieskończenie wiele rozwiązań,
3. nie ma rozwiązań?

Odpowiedź uzasadnij.