Logika dla informatyków

Egzamin końcowy

3 lutego 2003

Zadanie 1 (16 pkt). Niech ϕ będzie formułą zdaniową zbudowaną ze zmiennych zdaniowych i spójników alternatywy, koniunkcji i negacji. Przez *wartościowanie* formuły ϕ rozumiemy funkcję, która zmiennym *wystepującym* w formule ϕ przyporządkowuje wartości ze zbioru $\{0, 1\}$.
Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną.

a) (6 pkt) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq 2^n$ istnieje formuła zdaniowa ϕ zawierająca n zmiennych i spełniona przez dokładnie k wartościowań.

b) (10 pkt) Dla jakich liczb k istnieje formuła ϕ zawierająca n zmiennych, w której każda ze zmiennych występuje dokładnie jeden raz i która jest spełniona przez dokładnie k wartościowań?

Zadanie 2 (15 pkt). Niech $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ będzie ciągiem zero-jedynkowym. Symbolem $\sim_\alpha$ oznaczamy relację w zbiorze $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ nieskończonych ciągów zero-jedynkowych zdefiniowaną formułą

$$\beta \sim_\alpha \gamma \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n{\in}\mathbb{N})\ \alpha(n)\beta(n) = \alpha(n)\gamma(n).$$

Czy istnieje taki ciąg α, dla którego:

a) (5 pkt) relacja $\sim_\alpha$ ma przeliczalnie i nieskończenie wiele klas równoważności?

b) (5 pkt) wszystkie klasy równoważności relacji $\sim_\alpha$ są przeliczalne i nieskończone?

c) (5 pkt) istnieje przeliczalna i nieskończona klasa równoważności relacji $\sim_\alpha$?

Zadanie 3 (12 pkt). Na zbiorze X określone są takie relacje równoważności Q i R, że

1. każda klasa równoważności relacji Q ma q elementów,
2. każda klasa relacji R ma r elementów oraz
3. istnieje klasa równoważności relacji Q, która ma dokładnie jeden element wspólny z każdą klasą równoważności relacji R.

Ile elementów ma zbiór X?

Zadanie 4 (15 pkt). Niech $\Sigma = \{+, a\}$ będzie sygnaturą zawierającą dwuargumentowy symbol funkcji $+$ i symbol stałej a. Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n niech $A_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\oplus_n$ oznacza dodawanie modulo n, zaś $a_n = 0$. Rozważmy algebry $\mathcal{A}_n = \langle A_n, \oplus_n, a_n\rangle$. Udowodnij, że jeżeli $k = l \cdot m$, to istnieje homomorfizm h algebry $\mathcal{A}_k$ na algebrę $\mathcal{A}_l$ (surjekcja) taki, że $|\vec{h}^{-1}(\{0\})| = m$. Podaj przykład takich k, l i m, dla których istnieją co najmniej dwa takie homomorfizmy. Ile jest takich homomorfizmów, jeśli zamiast sygnatury Σ będziemy rozważać sygnaturę $\Sigma' = \{+, a, b\}$ zawierajacą dwa symbole stałych a i b oraz algebry $\mathcal{A}'_n = \langle A_n, \oplus_n, a_n, b_n\rangle$, gdzie $b_n = 1$?

Zadanie 5 (12 pkt). Pokaż, że zbior liczb wymiernych ze zwykłym porządkiem i zbiór niepustych skończonych ciągów liczb wymiernych z porządkiem leksykograficznym są izomorficzne (rozważamy porządek leksykograficzny generowany przez zwykły porządek na liczbach wymiernych). Przypominamy, że $\preceq$ jest porządkiem leksykograficznym generowanym przez porządek $\leq$, jeśli

$$\langle a_0, a_1, \ldots a_m\rangle \preceq \langle b_0, b_1, \ldots, b_n\rangle$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle a_0, a_1, \ldots a_m\rangle$ jest prefiksem $\langle b_0, b_1, \ldots, b_n\rangle$ lub

$$(\exists\, k)\ \Big(k \leq m \wedge k \leq n \wedge a_k < b_k \wedge (\forall\, i < k)\ a_i = b_i\Big).$$

Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o gęstych porządkach udowodnionego na ćwiczeniach. Przytocz sformułowanie tego twierdzenia.