Rozwiązania zadań z egzaminu z 3 lutego 2003

Zadanie 1 *Niech ϕ będzie formułą zdaniową zbudowaną ze zmiennych zdaniowych i spójników alternatywy, koniunkcji i negacji. Przez* wartościowanie *formuły ϕ rozumiemy funkcję, która zmiennym* wystepującym *w formule ϕ przyporządkowuje wartości ze zbioru $\{0,1\}$. Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną.*

a) *Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq 2^n$ istnieje formuła zdaniowa ϕ zawierająca n zmiennych i spełniona przez dokładnie k wartościowań.*

b) *Dla jakich liczb k istnieje formuła ϕ zawierająca n zmiennych, w której każda ze zmiennych występuje dokładnie jeden raz i która jest spełniona przez dokładnie k wartościowań?*

Rozwiązanie. Część a) zadania 1 jest oczywistą konsekwencją zupełności zbioru spójników złożonego z alternatywy, koniunkcji i negacji. Bierzemy dowolną funkcję boolowską n zmiennych przyjmującą wartość 1 dla k argumentów i korzystając z zupełności stwierdzamy, że jest to funkcja przyporządkowująca układowi zer i jedynej wartość logiczną pewnej formuły przy wartościowaniu wyznaczonym przez ten układ. Nie wiem, jak takie rozwiązanie było oceniane, ale uważam je za zbyt lakoniczne.

Można wziąć n zmiennych zdaniowych $p_1, \ldots, p_n$ i tworzyć formuły będącą koniunkcją tych zmiennych bądź ich negacji (np. $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$) Formuły tej postaci są spełnione przez dokładnie jedno wartościowanie. Alternatywa k różnych formuł takiej postaci (dowolnie wybranych) jest formułą spełnioną przez dokładnie k wartościowań.

Bardziej szczegółowo przedstawię jeszcze inne rozwiązanie tego zadania. Przyjmijmy, że $W(\phi)$ oznacza zbiór wartościowań spełniających formułę ϕ.

Fakt 1.1 *Jeżeli w formule ϕ występuje n zmiennych, to $|W(\neg\phi)| = 2^n - |W(\phi)|$.*

Dowód. Jest to oczywisty fakt. Dla formuły ϕ z n zmiennymi jest 2^n wartościowań. Każde z nich spełnia albo ϕ, albo $\neg\phi$, żadne nie może jednocześnie spełniać obu tych formuł. □

Fakt 1.2 *Jeżeli żadna zmienna nie występuje jednocześnie w formulach ϕ i ψ, to*

$$|W(\phi \wedge \psi)| = |W(\phi)| \cdot |W(\psi)|. \square$$

Dowód. Rozważmy funkcję, która wartościowaniu h formuły $\phi \wedge \psi$ przyporządkowuje parę dwóch wartościowań: wartościowania będącego obcięciem h do zmiennych formuły ϕ i wartościowania będącego obcięciem h do zmiennych formuły ψ. Różnowartościowość tej funkcji jest oczywista.

Wystarczy teraz zauważyć, że funkcja ta przekształca zbiór $W(\phi \wedge \psi)$ na iloczyn kartezjański $W(\phi) \times W(\psi)$. (Gdzie w tym dowodzie korzysta się z założenia o zmiennych formuł ϕ i ψ?) □

Wniosek 1.3 *Jeżeli zmienna p nie występuje w formule ϕ, to $|W(\phi \wedge p)| = |W(\phi)|$.* □

Wniosek 1.4 *Jeżeli w formule ϕ występuje n zmiennych i nie ma wśród nich zmiennej p, to $|W(\phi \vee p)| = 2^n + |W(\phi)|$.*

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} |W(\phi \vee p)| &= |W(\neg(\neg\phi \wedge \neg p))| = 2^{n+1} - |W(\neg\phi \wedge \neg p)| = \\ &= 2^{n+1} - |W(\neg\phi)| \cdot |W(\neg p)| = 2^{n+1} - (2^n - |W(\phi)|) \cdot (2 - |W(p)|) = \\ &= 2^{n+1} - 2^n + |W(\phi)| = 2^n + |W(\phi)|. \square \end{aligned}$$

Fakt 1.5 *Dla każdej liczby naturalnej $k \leq 2^n$ istnieje formuła zdaniowa z n zmiennymi spełniona przez dokładnie k wartościowań.*

Dowód. Fakt ten dowodzimy przez indukcję ze względu na n.

Zauważmy, że $|W(p \wedge \neg p)| = 0$, $|W(p)| = 1$ i $|W(p \vee \neg p)| = 2$. Tym samym twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

Załózmy, że twierdzenie to jest zachodzi dla liczby n i weźmy $k \leq 2^{n+1}$. Zachodzi jeden z dwóch przypadków: albo $k \leq 2^n$, albo $2^n < k \leq 2^{n+1}$.

Jeżeli $k \leq 2^n$, to znajdujemy formułę ϕ z n zmiennymi, która jest spełniona przez k wartościowań, i zmienną p, która nie występuje w ϕ. Formuła $\phi \wedge p$ jest spełniona przez k wartościowań i występuje w niej $n + 1$ zmiennych.

Jeżeli $2^n < k \leq 2^{n+1}$, to bierzemy formułę ϕ z n zmiennymi, spełnioną przez $k - 2^n$ wartościowań. Wtedy dla dowolnej zmiennej p nie występującej w ϕ formuła $\phi \vee p$ jest spełniona przez k wartościowań i występuje w niej $n + 1$ zmiennych. □

Podobnie dowodzimy następujący fakt:

Fakt 1.6 *Dla każdej nieparzystej liczby naturalnej $k \leq 2^n$ istnieje formuła zdaniowa z n zmiennymi, w której każda zmienna występuje dokładnie jeden raz i która jest spełniona przez dokładnie k wartościowań.*

Dowód. Formułę, w której każda zmienna występuje najwyżej jeden raz, będą nazywał prostą. Twierdzenie to także dowodzimy przez indukcję ze względu na n.

Zauważmy, że $|W(p)| = 1$. Wobec tego dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

Załózmy, że twierdzenie to jest zachodzi dla liczby n i weźmy nieparzystą liczbę $k \leq 2^{n+1}$. Liczba k jest albo $\leq 2^n$, albo też spełnia nierówności $2^n < k \leq 2^{n+1}$.

Jeżeli $k \leq 2^n$, to znajdujemy prostą formułę ϕ z n zmiennymi, która jest spełniona przez k wartościowań, i zmienną p, która nie występuje w ϕ. Formuła $\phi \wedge p$ jest prosta i spełniona przez k wartościowań, oraz występuje w niej $n + 1$ zmiennych.

Jeżeli $2^n < k \leq 2^{n+1}$, to bierzemy prostą formułę ϕ z n zmiennymi, spełnioną przez $k - 2^n$ wartościowań. Wtedy dla dowolnej zmiennej p nie występującej w ϕ, formuła $\phi \vee p$ jest prosta, spełniona przez k wartościowań i występuje w niej $n + 1$ zmiennych. □

Fakt 1.7 *Jeżeli ϕ jest formułą, w której każda zmienna występuje najwyżej jeden raz, to ϕ jest spełniona przez nieparzystą liczbę wartościowań.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na liczbę znaków występujących w formule. Formuła, która daje się zapisać za pomocą jednego znaku jest zmienną i jest spełniona przez jedno wartościowanie.

Przypuśćmy, że $\phi = \neg\psi$ i występuje w niej n zmiennych. Oczywiście, każda zmienna występuje tyle samo razy w ϕ, co w ψ. Z założenia indukcyjnego wynika więc, że ψ jest spełniona przez nieparzystą liczbę wartościowań równą $|W(\psi)|$. Liczba $2^n - |W(\psi)|$ jest nieparzysta i jest równa liczbie wartościowań spełniających ϕ.

Jeżeli w koniunkcji $\phi \wedge \psi$ każda zmienna występuje najwyżej jeden raz (jeżeli koniunkcja ta jest prosta), to ϕ i ψ są proste, i żadna zmienna nie występuje jednocześnie w obu tych formułach. Wobec tego, formuła $\phi \wedge \psi$ jest spełniona przez $|W(\phi)| \cdot |W(\psi)|$ wartościowań. Na mocy założenia indukcyjnego, oba czynniki tego iloczynu są liczbami nieparzystymi. Iloczyn liczb nieparzystych też jest nieparzysty.

Jeszcze trzeba pokazać (można to zrobić w podobny sposób), że alternatywa będąca formułą prostą jest spełniona przez nieparzystą liczbę wartościowań. □

Zadanie 2 *Niech $\alpha : N \to \{0,1\}$ będzie ciągiem zero-jedynkowym. Symbolem $\sim_\alpha$ oznaczamy relację w zbiorze $\{0,1\}^N$ nieskończonych ciągów zero-jedynkowych zdefiniowaną formułą*

$$\beta \sim_\alpha \gamma \quad \Leftrightarrow \quad (\forall n \in N)\ \alpha(n)\beta(n) = \alpha(n)\gamma(n).$$

Czy istnieje taki ciąg α, dla którego:

a) *relacja $\sim_\alpha$ ma przeliczalnie i nieskończenie wiele klas równoważności?*

b) *wszystkie klasy równoważności relacji $\sim_\alpha$ są przeliczalne i nieskończone?*

c) *istnieje przeliczalna i nieskończona klasa równoważności relacji $\sim_\alpha$?*

Rozwiązanie. Ustalmy α i przyjmijmy, że $A = \{n \in N : \alpha(n) = 1\}$. Oczywiście, $\sim_\alpha$ jest relacją równoważności. Przyjmijmy, że N_α jest zbiorem klas równoważności tej relacji. Symbolem $[x]_\alpha$ będziemy oznaczać klasy abstrakcji relacji $\sim_\alpha$.

Fakt 2.1 *Zbiór N_α i zbiór $\{0,1\}^A$ są równoliczne.*

Dowód. Dla funkcji $\xi : A \to \{0,1\}$ definiujemy funkcję $\bar{\xi} : N \to \{0,1\}$ przyjmując, że

$$\bar{\xi}(n) = \begin{cases} \xi(n) & \text{jeżeli } n \in A, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Zdefiniujmy jeszcze wzorem

$$f(\xi) = [\bar{\xi}]_\alpha$$

funkcję $f : \{0,1\}^A \to N_\alpha$. Funkcja ta jest różnowartościowa i typu „na".

Aby dowieść różnowartościowość funkcji f weźmy dwa (różne) argumenty ξ_1 i ξ_2 tej funkcji. Są to funkcje określone w zbiorze A. Istnieje więc liczba $n \in A$ taka, że $\xi_1(n) \neq \xi_2(n)$. Funkcje $\bar{\xi}_1$ i $\bar{\xi}_2$ też przyjmują różne wartości dla argumentu n:

$$\bar{\xi}_1(n) = \xi_1(n) \neq \xi_2(n) = \bar{\xi}_2(n).$$

Oznacza to, że $\bar{\xi}_1 \not\sim_\alpha \bar{\xi}_2$. Stąd otrzymujemy, że klasy $[\bar{\xi}_1]_\alpha$ i $[\bar{\xi}_2]_\alpha$ są różne (różnią się np. elementem $\bar{\xi}_1$).

Weźmy dowolną klasę ze zbioru N_α i jej reprezentanta γ. Pokażemy, że $[\gamma]_\alpha$ jest wartością funkcji f. W tym celu weźmy funkcję $\delta : A \to \{0,1\}$ będącą obcięciem γ do zbioru A (a więc spełniającą $\delta(n) = \gamma(n)$ dla wszystkich $n \in A$) i zauważmy, że także $\bar{\delta}(n) = \gamma(n)$ dla wszystkich $n \in A$. To jednak oznacza, że $\bar{\delta} \sim_\alpha \gamma$. Wobec tego, $f(\delta) = [\bar{\delta}]_\alpha = [\gamma]_\alpha$.

Inny dowód. Weźmy funkcję $g : \{0,1\}^N \to \{0,1\}^A$ przyporządkowującą funkcji $\gamma \in \{0,1\}^N$ obcięcie funkcji γ do zbioru A. Oczywiście, funkcja g jest typu „na". Świadczy o tym np. równość $g(\bar{\xi}) = \xi$.

Funkcja g spełnia także równoważność

$$g(\gamma_1) = g(\gamma_2) \Leftrightarrow \gamma_1 \sim_\alpha \gamma_2.$$

Równoważność ta implikuje, że wzór

$$G([\gamma]_\alpha) = g(\gamma)$$

jest poprawną definicją funkcji $G : N_\alpha \to \{0,1\}^A$ i – co więcej – funkcja ta jest różnowartościowa. Ponieważ g jest typu „na", więc także G jest typu „na". □

Fakt 2.2 *Klasy równoważności relacji $\sim_\alpha$ są równoliczne ze zbiorem $\{0,1\}^{N \setminus A}$.*

Dowód. Weźmy dowolną funkcję $\beta \in \{0,1\}^N$ i zdefiniujmy funkcję $f : [\beta]_\alpha \to \{0,1\}^{N\setminus A}$. Funkcja f elementowi $\gamma \in [\beta]_\alpha$ przyporządkowuje obcięcie γ do zbioru $N\setminus A$. Aby dowieść podany fakt pokażemy, że funkcja f jest bijekcją.

Weźmy więc różne funkcje $\gamma_1, \gamma_2 \in [\beta]_\alpha$. Ponieważ należą do jednej klasy równoważności relacji $\sim_\alpha$, więc przyjmują te same wartości dla dowolnego argumentu ze zbioru A. Wobec tego, przyjmują różne wartości dla pewnego $n \notin A$. Ich obcięcia od zbioru $N \setminus A$ też przyjmują różne wartości dla tego samego argumentu, a więc są różne. To dowodzi, że funkcja f jest różnowartościowa.

Aby dowieść, że funkcja f jest typu „na", weźmy dowolną funkcję $\xi \in \{0,1\}^{N\setminus A}$ i zdefiniujmy $\gamma \in \{0,1\}^N$ takie, że

$$\gamma(n) = \begin{cases} \beta(n) & \text{jeżeli } n \in A, \\ \xi(n) & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Oczywiście, funkcje γ i β są w relacji $\sim_\alpha$ oraz obcięcie γ do $N \setminus A$ jest równe ξ. Tak więc $f(\gamma) = \xi$. □

Fakt 2.3 *Jeżeli zbiór $A \subseteq N$ jest nieskończony, to zbiór $\{0,1\}^A$ jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Nieskończony podzbiór A zbioru liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych N. Jeżeli zbiór A jest równoliczny z N, to także zbiory $\{0,1\}^A$ i $\{0,1\}^N$ są równoliczne. Ten ostatni zbiór jest nieprzeliczalny na podstawie twierdzenia Cantora. Oznacza to, że także zbiór $\{0,1\}^A$ jest nieprzeliczalny. □

Wniosek 2.4 *Zbiór N_α klas równoważności relacji $\sim_\alpha$ jest albo skończony, albo nieprzeliczalny.*

Dowód. Są możliwe dwa przypadki: albo zbiór A jest skończony i wtedy zbiór $\{0,1\}^A$ i równoliczny z nim zbiór N_α są skończone, albo zbiór A jest nieskończony i zarówno zbiór $\{0,1\}^A$ jak i równoliczny z nim zbiór N_α są nieprzeliczalne. □

Z powyższego wniosku wynika negatywna odpowiedź na pytanie a): dla żadnego α zbiór klas równoważności relacji $\sim_\alpha$ nie jest przeliczalny i nieskończony.

Wniosek 2.5 *Klasy abstrakcji relacji $\sim_\alpha$ są albo skończone, albo nieprzeliczalne.*

Dowód. Ten wniosek dowodzimy dokładnie tak, jak poprzedni. □

Z ostatniego wniosku otrzymujemy negatywną odpowiedź na pytanie c): dla żadnego α żadna klasa klasa równoważności nie jest nieskończona przeliczalna.

Negatywna odpowiedź na pytanie c) implikuje także negatywną odpowiedź na pytanie b). Odpowiedź na pytanie b) można też łatwo wyprowadzić z ostatniego wniosku.

Zadanie 3 *Na zbiorze X określone są takie relacje równoważności Q i R, że*

1. każda klasa równoważności relacji Q ma q elementów,

2. każda klasa relacji R ma r elementów oraz

3. istnieje klasa równoważności relacji Q, która ma dokładnie jeden element wspólny z każdą klasą równoważności relacji R. Ile elementów ma zbiór X?

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że A oznacza tę klasę równoważności relacji Q, o której jest mowa w punkcie 3), a K – zbiór klas równoważności relacji R.

Wszystkie przedstawione rozwiązania korzystają z faktu, że zbiory K i A mają tyle samo elementów. Jeżeli to wiemy, to na podstawie warunku 1) stwierdzamy, że K ma

q elementów. Relacja równoważności R wyznacza więc podział zbioru X na q rozłącznych klas równoważności, które mają po r elementów. Stąd otrzymujemy, że X ma $q \cdot r$ elementów. Dalej pokażę, jak dowodzić, że $|A| = |K|$.

Sposób I. Niech $f : K \to A$ będzie funkcją, która dla klasy $Y \in K$ przyjmuje wartość $f(Y) \in Y \cap A$. Punkt 3 ze sformułowania zadania gwaratuje poprawność tej definicji.

Pokażemy, że funkcja f jest bijekcją. Jeżeli $f(Y) = f(Z)$ dla pewnych klas klas $Y, Z \in K$, to $f(Y) \in (Y \cap A) \cap (Z \cap A) \subseteq Y \cap Z$. W tym przypadku klasy Y i Z nie są rozłączne, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy $Y = Z$. Wobec tego f jest różnowartościowa.

Weźmy teraz $a \in A$. Oczywiście, klasa równoważności $[a]_R$ należy do K. Gdyby $f([a]_R) \neq a$, to zbiór $[a]_R \cap A$ miałby przynajmniej dwa elementy: $f([a]_R)$ oraz a, a to przeczy warunkowi 3). Tak więc funkcja f jest typu „na".

Sposób II. Tym razem definiujemy funkcję $g : A \to K$, która elementowi $a \in A$ przyporządkowuje klasę $[a]_R$ (przyjmujemy, że $g(a) = [a]_R$). Podobnie jak w pierwszym rozwiązaniu, funkcja g jest bijekcją.

Jeżeli $[a]_R = [b]_R$ dla $a, b \in A$, to do klasy $[a]_R$ należy zarówno a, jak i b. Z wyboru A mamy jednak, że do dowolnej klasy równoważności może należeć tylko jeden element zbioru A, więc $a = b$.

Jeżeli Y jest dowolną klasą równoważności relacji R, to z warunku 3) (a raczej z wyboru A) znajdujemy w niej pewien element $a \in A$. Wobec tego, klasy równoważności $[a]_R$ i Y nie są rozłączne. Takie klasy muszą być równe. Otrzymaliśmy więc, że $g(a) = [a]_R = Y$.

Sposób III. Zauważmy, że

$$A = A \cap X = A \cap \bigcup_{Y \in K} Y = \bigcup_{Y \in K} A \cap Y$$

(druga równość wynika stąd, że suma klas rownoważności jest równa dziedzinie relacji równoważności). Zbiory $A \cap Y_1$ i $A \cap Y_2$ dla różnych klas równoważności Y_1 i Y_2 są rozłączne, ponieważ klasy te są rozłączne. Wobec tego

$$|A| = |\bigcup_{Y \in K} A \cap Y| = \sum_{Y \in K} |A \cap Y| = \sum_{Y \in K} 1 = |K|.$$

Zadanie 4 *Niech $\Sigma = \{+, a\}$ będzie sygnaturą zawierającą dwuargumentowy symbol funkcji $+$ i symbol stałej a. Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n niech $A_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\oplus_n$ oznacza dodawanie modulo n, zaś $a_n = 0$. Rozważmy algebry $\mathcal{A}_n = \langle A_n, \oplus_n, a_n \rangle$. Udowodnij, że jeżeli $k = l \cdot m$, to istnieje homomorfizm h algebry $\mathcal{A}_k$ na algebrę $\mathcal{A}_l$ (surjekcja) taki, że $|\vec{h}^{-1}(\{0\})| = m$. Podaj przykład takich k, l i m, dla których istnieją co najmniej dwa takie homomorfizmy. Ile jest takich homomorfizmów, jeśli zamiast sygnatury Σ będziemy rozważać sygnaturę $\Sigma' = \{+, a, b\}$ zawierajacą dwa symbole stałych a i b oraz algebry $\mathcal{A}'_n = \langle A_n, \oplus_n, a_n, b_n \rangle$, gdzie $b_n = 1$?*

Analiza sytuacji. Resztę z dzielenia k przez l będę oznaczać także symbolem $k \bmod l$. Zauważmy, że każdy element A_k jest sumą pewnej liczby jedynek (daje się przedstawić w postaci $1 \oplus_k \ldots \oplus_k 1$). Wobec tego 1 generuje A_k. Homomorfizm wystarczy zdefiniować na zbiorze generatorów. Przyjmijmy więc, że $h : A_k \to A_l$ jest homomorfizmem i $h(1) = a$. Wtedy

$$h(n) = h(\underbrace{1 \oplus_k \ldots \oplus_k 1}_{n \text{ razy}}) = \underbrace{h(1) \oplus_l \ldots \oplus_l h(1)}_{n \text{ razy}} = (a \cdot n) \bmod l.$$

Rozwiązanie.

Fakt 4.1 *Jeżeli l dzieli k, to funkcja $h_a : A_k \to A_l$ zdefiniowana wzorem*

$$h_a(x) = (a \cdot x) \bmod l$$

jest homomorfizmem algebr $\mathcal{A}_k$ i $\mathcal{A}_l$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że definicja funkcji h_a zależy od k i l, mimo że wprowadzone oznaczenie na to nie wskazuje. Oczywiście, $h_a(0) = 0$. Wystarczy więc dowieść, że dla wszystkich $x, y \in A_k$ zachodzi równość $h_a(x \oplus_k y) = h_a(x) \oplus_l h_a(y)$. Zauważmy, że

$$a \cdot x = p \cdot l + h_a(x) \quad \text{oraz} \quad a \cdot y = q \cdot l + h_a(y)$$

dla pewnych liczb naturalnych p i q. Z tych samych powodów zachodzi równość

$$x + y = r \cdot k + (x \oplus_k y).$$

Łącząc podane równości otrzymujemy

$$a \cdot r \cdot k + a \cdot (x \oplus_k y) = a \cdot (x + y) = (p + q) \cdot l + h_a(x) + h_a(y).$$

Ponieważ l dzieli k, więc

$$h_a(x \oplus_k y) = a \cdot (x \oplus_k y) \bmod l = (h_a(x) + h_a(y)) \bmod l = h_a(x) \oplus_l h_a(y). \ \square$$

Część I. Korzystając z podanego faktu można łatwo rozwiązać pierwszą część zadania. Wystarczy zauważyć, że jeżeli $k = l \cdot m$, to $h_1 : A_k \to A_l$ jest homomorfizmem takim, że $h_1(x) = x$ dla $x = 0, \ldots, l-1$, a więc jest homomorfizmem algebry $\mathcal{A}_k$ na algebrę $\mathcal{A}_l$. Mamy także

$$\begin{aligned} \vec{h}_1^{-1}(0) &= \{x < l \cdot m : x \bmod l = 0\} = \{x < l \cdot m : l \text{ dzieli } x\} = \\ &= \{i \cdot l : i < m\} = \vec{g}(\{i : i < m\}) \end{aligned}$$

dla funkcji $g : N \to N$ takiej, że $g(i) = i \cdot l$. Funkcja g jest oczywiście różnowartościowa. Wobec tego zbiór $\vec{h}_1^{-1}(0)$ jest równoliczny ze zbiorem $\{i : i < m\}$, który oczywiście ma m elementów, i też ma m elementów.

Część II. Aby rozwiązać drugą część zadania wystarczy dodatkowo zauważyć, że jeżeli weźmiemy $k = l = 3$, to odpowiednia funkcja h_2 przekształca A_3 na A_3 ($h_2(1) = 2$ i $h_2(2) = 1$) i – wobec tego – jest homomorfizmem algebry $\mathcal{A}_3$ na algebrę $\mathcal{A}_3$. Funkcje h_1 i h_2 są w tym przypadku różne, ponieważ $1 = h_1(1) \neq h_2(1) = 2$. Podobnie jest w przypadku funkcji $h_2 : A_6 \to A_3$ (jest to inna funkcja niż poprzednia, mimo że jest tak samo oznaczana!). Można dowieść, że dla dowolnej wielokrotności k liczby l, funkcja h_a przekształca A_k na A_l wtedy i tylko wtedy, gdy a jest względnie pierwsze z l.

Część III. Z definicji homomorfizmu wynika, że homomorfizmy algebry $\mathcal{A}'_k$ w algebrę $\mathcal{A}'_l$ są to dokładnie homomorfizmy algebry $\mathcal{A}_k$ w algebrę $\mathcal{A}_l$ przekształcające 1 na 1. Aby więc odpowiedzieć na ostatnie pytanie wystarczy ustalić, ile jest homomorfizmów przekształcających algebrą $\mathcal{A}_k$ na algebrę $\mathcal{A}_l$ i przeprowadzających 1 na 1. Pokażemy, że jeżeli l dzieli k, to jest dokładnie jeden taki homomorfizm. Oczywiście, jest taki homomorfizm (jest nim h_1). Przypuśćmy, że h też jest takim homomorfizmem. Wtedy

$$h(n) = h(\underbrace{1 \oplus_k \ldots \oplus_k 1}_{n \text{ razy}}) = \underbrace{h(1) \oplus_l \ldots \oplus_l h(1)}_{n \text{ razy}} = \underbrace{h_1(1) \oplus_l \ldots \oplus_l h_1(1)}_{n \text{ razy}} = h_1(n)$$

dla wszystkich $n \in A_k$. Wobec tego, homomorfizmy h i h_1 są identyczne. Bardziej elegancki dowód tego faktu powinien być indukcyjny.

Zadanie 5 *Pokaż, że zbior liczb wymiernych ze zwykłym porządkiem i zbiór niepustych skończonych ciągów liczb wymiernych z porządkiem leksykograficznym są izomorficzne (rozważamy porządek leksykograficzny generowany przez zwykły porządek na liczbach wymiernych).*

Przypominamy, że $\preceq$ jest porządkiem leksykograficznym generowanym przez porządek $\leq$, jeśli

$$\langle a_0, a_1, \ldots a_m\rangle \preceq \langle b_0, b_1, \ldots, b_n\rangle$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $\langle a_0, a_1, \ldots a_m\rangle$ jest prefiksem $\langle b_0, b_1, \ldots, b_n\rangle$ lub

$$(\exists\, k)\ \Big(k \leq m \wedge k \leq n \wedge a_k < b_k \wedge (\forall\, i{<}k)\ a_i = b_i\Big).$$

Wskazówka: *Skorzystaj z twierdzenia o gęstych porządkach udowodnionego na ćwiczeniach. Przytocz sformułowanie tego twierdzenia.*

Rozwiązanie. W tym zadaniu należy skorzystać z twierdzenia, które mówi, że każde dwa przeliczalne porządki liniowe, które są gęste i bez końców, są izomorficzne.

Aby skorzystać z tego twierdzenia, należy pokazać, że

1. zbiór skończonych, niepustych ciągów o wyrazach wymiernych jest przeliczalny,
2. porządek leksykograficzny wyznaczony przez porządek liniowy jest porządkiem liniowym,
3. porządek leksykograficzny w zbiorze skończonych, niepustych ciągów o wyrazach wymiernych jest gęsty,
4. oraz nie ma w nim elementu największego, ani najmniejszego.

Sądzę, że zamiast dowodzić przeliczalność zbioru skończonych ciągów o wyrazach wymiernych i liniowość porządku leksykograficznego, można powołać się na fakty znane z wykładu lub ćwiczeń.

Aby dowieść gęstość rozważanego porządku weźmy dwa skończone, niepuste ciągi a i b liczb wymiernych odpowiednio o wyrazach $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Załóżmy, że ciąg a jest mniejszy w sensie porządku leksykograficznego od ciągu b. Są możliwe dwa przypadki: albo $n < m$ oraz $a_i = b_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, albo też dla pewnej liczby $k \leq n, m$ zachodzi nierówność $a_k < b_k$ i spełnione są równości $a_i = b_i$ dla $i = 1, \ldots, k-1$. Jeżeli zachodzi pierwszy przypadek, to bierzemy ciąg c o wyrazach $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1}-1$. W drugim przypadku bierzemy ciąg c o wyrazach $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, (a_k + b_k)/2$. Bez trudu sprawdzamy, że w obu przypadkach ciąg c jest większy w sensie porządku leksykograficznego od ciągu a i mniejszy od ciągu b.

Jest też oczywiste, że jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem ciągu a, to jednoelementowy ciąg, którego wyrazem jest liczba $a_1 + 1$ jest większy od a, a jednoelementowy ciąg, którego wyrazem jest liczba $a_1 - 1$ jest mniejszy od a. Tak więc w rozważanym porządku leksykograficznym nie ma elementu największego, ani najmniejszego.