Logika dla informatyków

Zadania na ćwiczenia

21 kwietnia 2002

Tytuły i kolejność rozdziałów są takie same, jak w notatkach do wykładu. Jeśli nie zaznaczono inaczej, każde zadanie jest warte 1 pkt. Więcej zadań można znaleźć w książce: Janusz Onyszkiewicz, Wiktor Marek, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN (wiele wydań).

Spis treści

0. Zadania na dobry początek

Zadanie 1. Oto fragment raportu policji sporządzony przez młodego aspiranta:

> *Świadek nie był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.*

Co komendant policji może wywnioskować z powyższego raportu (poza oczywiastym faktem, że należy zwolnić aspiranta)? Odpowiedz na pytania: „*Czy świadek był zastraszony? Czy Henry popełnił samobójstwo? Czy testament odnaleziono?*”

Zadanie 2. Oto przykład trzech wnioskowań przez indukcję:

1. „*Pokażę, że wszystkie liczby naturalne są parzyste. Oczywiście 0 jest liczbą parzystą. Niech n będzie dowolną liczną naturalną i załóżmy, że dla wszystkich $k < n$, k jest parzyste. Niech n_1 i n_2 będzie dowolnym rozbiciem liczby n na sumę liczb mniejszych (tzn. $n = n_1 + n_2$). Ponieważ n_1 oraz n_2 są mniejsze od n, n_1 i n_2 są parzyste, a więc n jest parzyste jako suma dwóch liczb parzystych.*

2. „*Pokażę, że wszystkie dodatnie liczby naturalne są nieparzyste. Oczywiście 1 jest liczbą nieparzystą. Niech n będzie dowolną liczbą naturalną i załóżmy, że dla wszystkich $k < n$, k jest nieparzyste. Niech 1, n_1 i n_2 będzie dowolnym rozbiciem liczby n na sumę trzech liczb mniejszych (tzn. $n = n_1 + n_2 + 1$). Ponieważ n_1 oraz n_2 są mniejsze od n, n_1 i n_2 są nieparzyste, a więc n jest nieparzyste jako suma dwóch liczb nieparzystych i liczby 1.*

3. „*Pokażę, że wszystkie proste na płaszczyźnie są równoległe. Rozważmy jednoelementowy zbiór prostych na płaszczyźnie. Oczywiście wszystkie proste należące do tego zbioru są do siebie równoległe. Załóżmy, że w każdym n-elementowym zbiorze prostych wszystkie proste są do siebie równoległe. Rozważmy teraz $n+1$-elementowy zbiór prostych. Ustalmy w nim jedną prostą p. Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie pozostałe n prostych jest do siebie równoległe. Ustalmy teraz inną prostą q. Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie pozostałe n prostych jest również do siebie równoległe. Ponieważ relacja równoległości prostych jest przechodnia, wszystkie $n+1$ prostych jest równoległe. Na mocy zasady indukcji matematycznej każdy zbiór prostych na płaszczyźnie zawiera wyłącznie proste równoległe. W szczególności dotyczy to zbioru wszystkich prostych na płaszczyźnie.*

Które z tych rozumowań jest poprawne? Wskaż błędy popełnione w błędnym rozumowaniu.

W poniższych zadaniach napisz odpowiednie formuły logiczne *nie używając znaku negacji*.

Zadanie 3. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *ciągła*, jeśli

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}.\forall \epsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x.(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Zapisz formułę „funkcja f nie jest ciągła."

Zadanie 4. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą* (w sensie Cauchy'ego) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \epsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x.(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon)$$

Zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0."

Zadanie 5. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą* (w sensie Heinego) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}.(\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \wedge \forall n.x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$$

Zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0."

1. Rachunek zdań

1.1. Spełnialność formuł zdaniowych

W zadaniach 6–14 sprawdź, które z poniższych formuł są (a) tautologiami, (b) formułami spełnialnymi, (c) formułami sprzecznymi:

Zadanie 6. $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow ((q \vee r) \wedge \neg p))$

Zadanie 7. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow p)$

Zadanie 8. $((p \vee q) \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r))$

Zadanie 9. $((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)) \Rightarrow ((p \wedge s) \Rightarrow (q \vee r))$

Zadanie 10. $p \vee q \vee r \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q)$

Zadanie 11. $((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q) \Rightarrow p \vee q \vee r$

Zadanie 12. $((p \vee q) \Leftrightarrow (r \vee s)) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s))$

Zadanie 13. $((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee q) \Leftrightarrow (r \vee s))$

Zadanie 14. $((p \wedge q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \wedge (q \Leftrightarrow s))$

Zadanie 15–23. Zaneguj formuły z zadań 6–14 i — korzystając z praw de Morgana — przekształć je do takiej postaci, że negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi.

Zadanie 24. Sprawdź metodą zerojedynkową prawdziwość poniższych zdań (Tiuryn, str. 111):

1. $p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$;
2. $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$;
3. $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$.

Zadanie 25. Które z formuł

$$((p \vee q) \Leftrightarrow (r \vee s)) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s)) \tag{1}$$
$$((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee q) \Leftrightarrow (r \vee s)) \tag{2}$$
$$((\forall x \phi(x)) \Leftrightarrow \neg(\forall x \psi(x))) \Rightarrow \exists x(\phi(x)) \Leftrightarrow \neg\psi(x)) \tag{3}$$

są tautologiami? Przypominam, że formuła $(\exists x)(x = x)$ *jest* tautologią.

1.2. Formalizacja pojęć w języku rachunku zdań

Zadanie 26. Sformalizuj zadanie 1, tj. pokaż, jak znaleźć odpowiedzi na postawione w nim pytania korzystając z rachunku zdań.

Zadanie 27. Podczas pewnej kampanii wyborczej Olek, Józek i Kazik wygłosili następujące oświadczenia:

Olek: *Józek zawsze kłamie.*

Józek: *Kazik zawsze kłamie.*

Kazik: *Olek zawsze kłamie.*

Pokaż, że co najmniej dwóch spośród nich nie miało racji.

Zadanie 28. Podczas tej samej kampanii wyborczej Basia, Hania, Kasia i Ola stwierdziły, że:

Basia: *Hania zawsze kłamie.*

Hania: *Kasia czasem mówi prawdę.*

Kasia: *Ola czasem kłamie.*

Ola: *Basia zawsze mówi prawdę.*

Ile pań powiedziało prawdę?

Zadanie 29. Zbadaj zasadność poniższych rozumowań:

A. *Jeśli stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to wzrosną wydatki rządowe lub pojawi się bezrobocie. Jeśli wydatki rządowe nie wrosną, to podatki zostaną obniżone. Jeśli podatki zostaną obniżone i stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to bezrobocie się nie pojawi. Zatem wydatki rządowe wzrosną.*

B. *Jeśli ceny wzrosną, to spadnie popyt. Jeśli popyt spadnie, to spadną ceny. Zatem jeśli ceny wzrosną, to spadną. Zatem ceny spadną!*

1.3. Własności formuł zdaniowych

Zadanie 30. Udowodnij, że formuła rachunku zdań zbudowana wyłącznie ze zmiennych i spójnika równoważności „$\Leftrightarrow$” jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda zmienna występuje w niej parzystą liczbę razy.

Zadanie 31. Dane są formuły $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$. Czy formuły

$$(\ldots((\beta \Rightarrow \alpha_1) \Rightarrow \alpha_2) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \alpha_n$$

oraz

$$\beta \Rightarrow (\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n)$$

są równoważne?

Zadanie 32. Dane są formuły $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$. Czy formuły

$$\alpha_1 \Rightarrow (\alpha_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\alpha_n \Rightarrow \beta)\ldots))$$

oraz

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n) \Rightarrow \beta$$

są równoważne?

Zadanie 33. Dane są formuły $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$. Wykaż, że dla każdego n poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \big(\alpha_i \Rightarrow \beta_i\big)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i\Big) \Rightarrow \Big(\bigvee_{i=1}^{n} \beta_i\Big)\Big)$$

gdzie $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$ oznacza $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$, zaś $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ oznacza $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$.

Zadanie 34. Dane są formuły $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$. Wykaż, że dla każdego n poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \big(\alpha_i \Rightarrow \beta\big)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i\Big) \Rightarrow \beta\Big)$$

Zadanie 35. Czy istnieje taki nieskończony ciąg formuł $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ rachunku zdań, że wszystkie formuły $\phi_{i+1} \Rightarrow \phi_i$ są tautologiami rachunku zdań, zaś żadna z formuł $\phi_i \Rightarrow \phi_{i+1}$ nie jest tautologią?

Zadanie 36. Wykaż, że formuła $(\ldots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_{n-1}) \Rightarrow p_n$ jest fałszywa dla dokładnie

$$\frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

wartościowań zmiennych $p_1, \ldots, p_n$. Dla ilu wartościowań zmiennych $p_1, \ldots, p_n$ prawdziwa jest formuła $p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow p_n)\ldots)$?

Zadanie 37. Wykaż (przez indukcję), że dla każdej formuły zdaniowej ϕ zbudowanej ze zmiennych oraz spójników $\wedge, \vee$ istnieje formuła ψ postaci $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$ taka, że dla każdego $i \leq n$, ψ_i jest koniunkcją zmiennych oraz $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ jest tautologią.

Zadanie 38. Niech V będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. V-literałem nazywamy formułę postaci x lub $\neg x$, dla pewnego $x \in V$. Wykaż, że dla każdej formuły spełnialnej ϕ ze zmiennymi z $V = \{p, q, r\}$ istnieje formuła ψ postaci $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ taka, że każde α_i jest V-literałem oraz $\psi \rightarrow \phi$ jest tautologią.

Zadanie 39. Pokaż przez indukcję, że dla każdej formuły ϕ zbudowanej ze zmiennych p i q oraz spójnika $\Rightarrow$, można wybrać ze zbioru $\{\top, p, q, (p \Rightarrow q), (q \Rightarrow p), (p \vee q)\}$ taką formułę ψ, że $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ jest tautologią.

Zadanie 40. Udowodnij, że jeśli p jest zmienną zdaniową, a α formułą rachunku zdań, taką, że $p \Rightarrow \alpha$ i $\neg\alpha \Rightarrow p$ są tautologiami, to α jest tautologią.

Zadanie 41. Przypuśćmy, że V jest skończonym zbiorem zmiennych zdaniowych, $R \subseteq V^2$ jest relacją przechodnią w zbiorze V, a p_0 i q_0 są dwiema różnymi zmiennymi zdaniowymi. Niech Φ będzie formułą zdaniową

$$p_0 \wedge \neg q_0 \wedge \bigwedge_{(p,q)\in R} (p \Rightarrow q)$$

Pokaż, że formuła Φ jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $(p_0, q_0) \in R$.

1.4. Funkcje boolowskie (logiczne) i zupełne systemy spójników

Zadanie 42. Pokaż, że $\{\vee, \wedge\}$ nie jest zupełny.

Zadanie 43. Pokaż, że $\{\Rightarrow, \bot\}$ jest zupełny.

Zadanie 44. Pokaż, że $\{\wedge, \neg\}$ jest zupełny.

Zadanie 45. Czy system spójników $\{\oplus, \top\}$ jest zupełny, gdzie $p \oplus q$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $p \wedge \neg q$, zaś $\top$ oznacza prawdę?

Zadanie 46. Pokaż, że istnieje binarny spójnik $\uparrow$, taki, że $\{\uparrow\}$ jest zupełny.

Zadanie 47. Ile jest binarnych spójników logicznych $\oplus$, takich, że $\{\oplus\}$ jest zupełny?

Zadanie 48. Udowodnij, że każdy 2-zupełny zbiór spójników jest zupełny.

Zadanie 49. Udowodnij, że zbiór $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg\}$ jest 2-zupełny.

Zadanie 50. Ile jest funkcji logicznych n-argumentowych?

2. Rachunek kwantyfikatorów

W poniższych zadaniach sprawdź, które z formuł rachunku kwantyfikatorów są tautologiami.

Zadanie 51. $(\forall x.(\Phi(x) \vee \Psi(x))) \Rightarrow (\forall x.\Phi(x)) \vee (\forall x.\Psi(x))$

Zadanie 52. $(\forall x.(\Phi(x) \wedge \Psi(x))) \Rightarrow (\forall x.\Phi(x)) \wedge (\forall x.\Psi(x))$

Zadanie 53. $(\exists x.(\Phi(x) \vee \Psi(x))) \Rightarrow (\exists x.\Phi(x)) \vee (\exists x.\Psi(x))$

Zadanie 54. $(\exists x.\Phi(x)) \wedge (\exists x.\Psi(x)) \Rightarrow (\exists x.(\Phi(x) \wedge \Psi(x)))$

Zadanie 55. Formuła ϕ jest w *postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n.\psi$, gdzie x_i są pewnymi zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami ($\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$) dla $i = 1, \ldots, n$, a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów i symbol negacji występuje w niej jedynie przed formułami atomowymi. Przykładem formuły w postaci normalnej jest $\forall x.\exists y.(x \neq y \vee \neg x \leq y)$. Formuła $\forall x.\exists y.\exists z.\neg(z = y \vee y = z)$ nie jest w postaci normalnej.
Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo rosnąca*, jeśli

$$\forall x.\forall y.(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$$

Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo malejąca*, jeśli

$$\forall x.\forall y.(x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)).$$

Zapisz poniższe zdania jako formuły w postaci normalnej:

1. funkcja f jest słabo rosnąca i słabo malejąca;
2. funkcja f nie jest słabo rosnąca i nie jest słabo malejąca.

Zadanie 56. Przy pomocy symboli $=, \leq, +, \times$, spójników logicznych i kwantyfikatorów zapisz nastepujące formuły dotyczące liczb naturalnych:

1. x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y i z;
2. każda liczba nieparzysta większa od 3 jest sumą dwóch liczb pierwszych;
3. nie istnieje największa liczba pierwsza;
4. liczby x i y mają takie same dzielniki pierwsze.

Przykład: formułę „x jest sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych” zapiszemy jako $\exists y \exists z(x = y \times y + z \times z)$.

Zadanie 57. Niech na pewnym skończonym zbiorze X będzie określona binarna relacja R. Mówimy, że zbiór X z relacją R jest *hamiltonowski*, jeśli istnieje ciąg elementów zbioru X, taki, że każdy element zbioru X występuje w tym ciągu dokładnie raz, każde dwa kolejne elementy ciągu są ze sobą w relacji R, oraz ostatni element ciągu jest w relacji z pierwszym elementem ciągu. Używając jedynie poniższych słów i zwrotów (z odpowiednią odmianą) wyraź słownie, co to znaczy, że zbiór X wraz z relacją R nie jest hamiltonowski:

R	istnieje	pierwszy
X	każdy	raz
ciąg	kolejny	taki, że
dla	który	ten
dokładnie	lub	truskawka
dwa	moc	w
element	nie jest w relacji	występować
i	ostatni	zbiór

Zadanie 58. Niech funkcja g będzie określona dla naturalnych argumentów n jako $n/2$, jeśli n jest parzyste, oraz jako $3n + 1$, jeśli n jest nieparzyste. Używając symboli z zadania 56, oraz dodatkowo symbolu potęgowania $\uparrow$ zapisz zdanie równoważne zdaniu „dla każdej liczby naturalnej m istnieje n, takie, że $g^n(m) = 1$”, gdzie g^m oznacza funkcję g złożoną ze soba m razy, na przykład $g^2(3) = 5$. *Wskazówka:* ciąg skończony liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots a_m$ możemy zakodować jako jedną liczbę $2^{a_1} 3^{a^2} \ldots p_m^{a_m}$, gdzie p_i jest i-tą liczbą pierwszą.

Zadanie 59. Po egzaminie z logiki studenci wybrali się na dyskotekę, w której bawi się pewna liczba pań i dżentelmenów. Niech

ϕ_1 oznacza, że każdy dżentelmen zna co najwyżej dwie panie,

ϕ_2 oznacza, że każda pani zna co najwyżej dwóch dżentelmenów,

ϕ_3 oznacza, że każdy dżentelmen zna co najmniej dwie panie,

ϕ_4 oznacza, że żadne dwie panie nie znają dokładnie tych samych dżentelmenów.

Zapisz zdania ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 i ϕ_4 używając zbiorów P i D oraz symbolu relacji $Z \subseteq (P \cup D)^2$, takich, że

$$\begin{aligned} x \in P &\iff x \text{ jest panią,} \\ x \in D &\iff x \text{ jest dżentelmenem,} \\ Z(x, y) &\iff x \text{ zna } y, \end{aligned}$$

oraz równości $=$ i spójników logicznych oraz kwantyfikatorów.
Niech

$$\begin{array}{rcl}\psi_1 & = & \phi_1 \wedge \phi_2 \\ \psi_2 & = & \phi_3 \wedge \phi_4 \\ \psi_3 & = & \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4 \\ \psi_4 & = & \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4\end{array}$$

Używając symboli $+$, $\times$, $:$, $\leq$, liczb naturalnych oraz symboli logicznych, napisz formuły $\delta_i(p, d)$, $i = 1, \ldots, 4$, spełnione dokładnie dla tych liczb naturalnych p i d, dla których istnieją zbiory pań P i dżentelmenów D, oraz relacja „znajomości” $Z \subseteq (P \cup D)^2$, takie, że $p = |P|$, $d = |D|$ i spełniona jest formuła ψ_i. Na przykład formuła

$$\delta_5(p, d) \quad \Leftrightarrow \quad p = 2d$$

zachodzi dla tych liczb naturalnych p i d, dla których istnieją zbiory pań P i dżentelmenów D oraz relacja „znajomości” $Z \subseteq (P \cup D)^2$, takie, że spełniona jest formuła ψ_5, mówiąca, że każdy dżentelmen zna dokładnie dwie panie, a każda pani zna dokładnie jednego dżentelmena.

Zadanie 60. Używając jedynie zmiennych, kwantyfikatorów, spójników logicznych, nawiasów i symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$, $\times$, $=$ napisz formuły mówiące, że:

a) nie ma największej liczby pierwszej,
b) istnieje taka liczba naturalna, że każda liczba naturalna większa od niej jest sumą nie więcej niż czterech kwadratów liczb pierwszych,
c) istnieje nieskończenie wiele par liczb bliźniaczych.

Para liczb bliźniaczych, to dwie liczby pierwsze różniące się o 2.

3. Zbiory

3.1. Działania na zbiorach

W poniższych zadaniach uzupełnij i udowodnij wzory.

Zadanie 61. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Zadanie 62. $(A \cup B) \times C = ?$

Zadanie 63. $(A \cup B) \times (C \cup D) = ?$

Zadanie 64. *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$x \in A \dot{-} B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \Leftrightarrow x \notin B$$

Pokaż, że różnica symetryczna jest operacją *łączną* i *przemienną*, tj. że

$$(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C) \quad \text{oraz} \quad A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

dla dowolnych zbiorów A, B i C. Pokaż także następujące tożsamości:

$$A \dot{-} \emptyset = A \qquad A \dot{-} A = \emptyset \qquad A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C)$$

Zadanie 65. Pokaż, że

1. $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$ zawiera te i tylko te elementy, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_i, gdzie $i = 1, \ldots, n$;
2. jeśli zbiory $A_1, \ldots, A_n$ są skończone, to

$$|A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n| \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} (-2)^{i-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=i}} \left| \bigcap_{j \in I} A_j \right|$$

Zadanie 66. Udowodnij, że

$$A \times B = B \times A \quad \Leftrightarrow \quad A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

dla dowolnych zbiorów A i B.

Zadanie 67. Udowodnij, że jeżeli $A \times B = C \times D$, to

$$(A = C \wedge B = D) \vee ((A = \emptyset \vee B = \emptyset) \wedge (C = \emptyset \vee D = \emptyset))$$

Zadanie 68. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzi:

$$A \cap B \cap C \cap D \subseteq ((A \cap B) \cup C) \cap D$$

3.2. Wzór włączeń i wyłączeń

Zadanie 69. Pośród członków pewnego klubu lingwistycznego każdy uczy się francuskiego, niemieckiego lub hiszpańskiego. Wiadomo, że 20 uczy się francuskiego, 12 francuskiego i hiszpańskiego, 16 niemieckiego, 16 hiszpańskiego, 4 francuskiego i niemieckiego, 7 niemieckiego i hiszpańskiego, 3 wszystkich trzech języków. Ilu członków liczy klub? Ilu z nich uczy się dokładnie dwóch języków?

Zadanie 70. Liczbę elementów skończonego zbioru A będziemy oznaczać $|A|$. Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, to $|A \cup B| = |A| + |B|$. Korzystając z powyższej własności udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C (niekoniecznie rozłącznych):

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Zadanie 71. Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych $\{A_i\}_{i=1}^n$ prawdziwy jest tzw. *wzór włączeń i wyłączeń*:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = j}} (-1)^{j+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Zadanie 72. Rodzina $\{A_i\}_{i=1}^n$ jest rodziną zbiorów *k-rozłącznych*, jeśli dla każdego rosnącego ciągu liczb naturalnych $\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle$ takiego, że $i_k \leq n$, mamy $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j} = \emptyset$. Udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych k-rozłącznych $\{A_i\}_{i=1}^n$ prawdziwy jest wzór:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = j}} (-1)^{j+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

Zadanie 73. a) Na prywatce u Jurka jest co najmniej jedna osoba znająca co najmniej jeden z sześciu języków: polski, angielski, francuski, niemiecki, rosyjski i hiszpański. Ponadto nie ma dwóch osób, które znałyby dokładnie te same języki. Oczywiście każdy gość Jurka zna conajmniej dwa języki. Oszacuj z góry i z dołu liczbę osób na prywatce u Jurka.

b) Na prywatce u Agaty jest co najmniej jedna osoba znająca co najmniej jeden z n języków. Ponadto nie ma dwóch osób, które znałyby dokładnie te same języki. Oczywiście każdy gość Agaty zna conajmniej jeden język. Oszacuj z góry i z dołu liczbę osób na prywatce u Agaty.

3.3. Działania nieskończone na zbiorach

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$, $\{B_t\}_{t \in T}$ i $\{A_{t,s}\}_{\substack{t \in T \\ s \in S}}$ zachodzą odpowiednie relacje. W którym przypadku zachodzi inkluzja odwrotna?

Zadanie 74. $\bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T} B_t$

Zadanie 75. $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$

Zadanie 76. $\bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t \subseteq \bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t)$

Zadanie 77. $\bigcup_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} \subseteq \bigcap_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}$

Zadanie 78. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest *zstępującą rodziną zbiorów*, tj. $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n} \setminus A_{2n+1})$$

Zadanie 79. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zstępującą rodziną zbiorów*, tj. $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Zadanie 80. Niech $\{A_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ będzie rodziną zbiorów indeksowaną parami liczb naturalnych. Pokaż, że jeśli

$$A_{n,m} \subseteq A_{n+1,m} \cap A_{n,m+1}$$

dla wszelkich n i m, to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,n}$$

W poniższych zadaniach udowodnij podane zawierania. W których wzorach znak zawierania można zastąpić znakiem równości?

Zadanie 81. $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

Zadanie 82. $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Zadanie 83. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

Zadanie 84. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m)$

Zadanie 85. Dane są ciągi zbiorów $\langle A_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ i $\langle B_i : i \in \mathbb{N}\rangle$. Wiadomo, że dla każdego i istnieje k takie, że $A_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} B_j$. Udowodnij, że:

1. dla każdego i istnieje takie k, że $\bigcup_{j=0}^{i} A_j \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} B_j$,
2. $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$.

Zadanie 86. Niech $\langle A_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ będzie ciągiem podzbiorów zbioru X. Niech (A) oznacza, że A_0 jest zbiorem skończonym, oraz (B) oznacza, że dla każdego n zachodzi $\bigcap_{i=0}^{n} A_i \neq \emptyset$. Pokaż, że: a) jeśli zachodzi (A) i (B), to $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \neq \emptyset$, b) istnieje ciąg $\langle A_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ spełniający warunek (B), taki, że $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$.

Zadanie 87. Niech $\langle A_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ będzie ciągiem skończonych podzbiorów zbioru X, takim, że $A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ dla dowolnych $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$.

4. Relacje

Zadanie 88. Podaj intuicyjny sens poniższych relacji dwuargumentowych na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

a)

y\ x	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	1	0	0	1	0	0

b)

y\ x	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	1	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	1	0	0	1	0
6	1	0	0	1	0	0

c)

y\ x	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0

Które z nich są funkcjami?

Zadanie 89. Oblicz $R^2 = RR$, R^3 i R^4 dla relacji z zadania 88.

Zadanie 90. Ile jest relacji n-argumentowych na zbiorze 5-elementowym?

Zadanie 91. Niech R^{-1} oznacza relację odwrotną do R. Uzupełnij i udowodnij wozry:

$$\begin{array}{rcl}
(R \cup S)^{-1} & = & R^{-1} \cup S^{-1} \\
(R \cap S)^{-1} & = & R^{-1} \cap S^{-1} \\
(R^{-1})^{-1} & = & R \\
(RS)^{-1} & = & S^{-1}R^{-1} \\
(R \cup S)T & = & RT \cup ST \\
(R \cap S)T & \subseteq & RT \cap ST \\
(A \times B)^{-1} & = & B \times A \\
(A \times B)(C \times D) & = & ?
\end{array}$$

Zadanie 92. Niech R^{-1} oznacza relację odwrotną do R. Udowodnij, że

$$((R \cup S)T)^{-1} \quad = \quad T^{-1}R^{-1} \cup T^{-1}S^{-1}$$

5. Funkcje

Zadanie 93. Dane są dwie funkcje $f : A \to B$ i $g : B \to A$, obie typu „na".

1. Czy z powyższych założeń wynika, że f i g są bijekcjami?
2. Jeśli dodatkowo A i B są zbiorami skończonymi, to czy wówczas f i g są bijekcjami?

6. Funkcje odwrotne, złożenie funkcji

Niech $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Które z poniższych implikacji są prawdziwe?

Zadanie 94. Jeżeli gf jest „na", to f jest „na".

Zadanie 95. Jeżeli gf jest „na", to g jest „na".

Zadanie 96. Jeżeli gf jest różnowartościowa, to f jest różnowartościowa.

Zadanie 97. Jeżeli gf jest różnowartościowa, to g jest różnowartościowa.

Zadanie 98. *Inwolucją* nazywamy odwzorowanie $f : A \to A$, takie, że ff jest identycznością na A. Czy inwolucja musi być bijekcją? Pokaż, że każdą bijekcję na A można przedstawić jako złożenie dwóch inwolucji na A (tj. że dla każdej bijekcji $g : A \to A$ istnieją inwolucje $f_1, f_2 : A \to A$, takie, że $g = f_1 f_2$).

7. Obraz i przeciwobraz zbioru

Zadanie 99. Niech $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{array}{rcl}
f(A \cup B) & = & f(A) \cup f(B) \\
f(A \cap B) & ? & f(A) \cap f(B) \\
f^{-1}(f(A)) & ? & A
\end{array}$$

Zadanie 100. Niech $f : X \to Y$, $C, D \subseteq Y$. Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{array}{rcl}
f^{-1}(C \cap D) & = & f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \\
f^{-1}(C \cup D) & = & ? \\
f(f^{-1}(C)) & = & ?
\end{array}$$

Zadanie 101. Niech $f : X \to Y$ będzie bijekcją, a $g : Y \to X$ funkcją odwrotną do f. Udowodnij, że $f^{-1}(C) = g(C)$ dla dowolnego $C \subseteq Y$.

Zadanie 102. Przypuśćmy, że $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$. Udowodnij, że

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \quad = \quad f(A) \cap B$$

8. Relacje równoważności

Zadanie 103. Używając kwantyfikatorów, spójników logicznych $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, oraz wyrażeń postaci $x \in A$, $x \notin A$, $R(x,y)$ i $\neg R(x,y)$ zapisz, że relacja R nie jest relacją równoważności na zbiorze A.

Definicja 1. Mówimy, że rodzina zbiorów $\{X_i\}_{i\in I}$ jest *podziałem* zbioru A, jeśli

(i) $X_i \neq \emptyset$ dla każdego $i \in I$,

(ii) $\bigcup_{i\in I} X_i = A$ oraz

(iii) $X_i \cap X_j = \emptyset$ dla wszelkich $i, j \in I$ takich, że $i \neq j$.

Definicja 2. Niech dane będą dwa podziały $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ zbioru A. Mówimy, że podział $\mathcal{P}_1$ jest *drobniejszy* od podziału $\mathcal{P}_2$, jeśli dla każdego $X \in \mathcal{P}_1$ istnieje $Y \in \mathcal{P}_2$, taki, że $X \subseteq Y$.

Zadanie 104. Napisz bez używania znaku negacji formuły mówiące, że

1. Rodzina $\{X_i\}_{i\in I}$ nie jest podziałem zbioru A. Wolno używać symbolu $\neq$.
2. Podział $\mathcal{P}_1$ nie jest drobniejszy od podziału $\mathcal{P}_2$. Wolno używać symbolu $\not\subseteq$.

Zadanie 105. Wykaż, że jeśli R jest relacją równoważności, to dla każdego n jest nią również R^n.

Zadanie 106. Udowodnij, że na to, by relacja R była przechodnia, potrzeba i wystarcza, by

$$RR \subseteq R$$

Zadanie 107. Wykaż, że jeśli podział $\mathcal{P}_1$ jest drobniejszy od podziału $\mathcal{P}_2$, to dla każdego $X \in \mathcal{P}_2$ istnieje rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_1$, taka, że $X = \bigcup \mathcal{R}$.

Zadanie 108. Relacja R jest przechodnia. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe:

1. $RR \subseteq R$,
2. $RR = R$,
3. $RR \supseteq R$.

Zadanie 109. Relacje R i S są relacjami równoważności na tym samym zbiorze. Czy $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \dot{-} S$ też są relacjami równoważności?

Zadanie 110. Niech $\mathcal{R}$ będzie pewną rodziną relacji równoważności określonych na pewnym zbiorze X. Czy $\bigcup \mathcal{R}$ i $\bigcap \mathcal{R}$ są relacjami równoważności na X?

Zadanie 111. Niech A będzie ustalonym niepustym zbiorem. Czy prawdą jest, że dla dowolnej relacji $R \subseteq A^2$

$$\phi(R) \Rightarrow \phi(RR)$$

gdzie RR oznacza złożenie relacji R ze sobą, a $\phi(R)$ oznacza, że relacja R jest

1. zwrotna na zbiorze A,
2. symetryczna na zbiorze A,
3. przechodnia na zbiorze A,
4. antysymetryczna na zbiorze A.

Zadanie 112. Niech $R \subseteq A^2$ będzie pewną relacją binarną na zbiorze A. Niech $\mathcal{T}$ będzie zbiorem wszystkich relacji przechodnich S na A, takich, że $R \subseteq S$. Oznaczmy przez $\bar{R}$ relację $\bigcap_{S\in\mathcal{T}} S$. Pokaż, że $R \subseteq \bar{R}$. Pokaż, że jeśli S jest relacją przechodnią, taką, że $R \subseteq S$, to $\bar{R} \subseteq S$. Pokaż, że $\bar{R}$ jest relacją przechodnią. Relację $\bar{R}$ nazywamy *tranzytywnym (przechodnim) domknięciem* R.

Zadanie 113. Niech $R \subseteq A^2$ będzię dowolną relacją i niech R^0 będzie relacją równości na A (to znaczy $\langle x, y\rangle \in R^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$). Wykaż, że $R \cup R^0 \cup R^{-1}$ jest relacją zwrotną i symetryczną.

Zadanie 114. Niech $Q \subseteq A^2$ będzię dowolną relacją, $Q^1 = Q$ i niech $Q^{n+1} = Q^n Q$ dla $n \geq 1$. Kładziemy $Q_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$. Wykaż, że Q_∞ jest relacją przechodnią.

Zadanie 115. Wykaż, że Q_∞ jest *przechodnim domknięciem* relacji Q, tj. przekrojem wszystkich relacji przechodnich zawierających Q.

Zadanie 116. Korzystając z zadań poprzednich wykaż, że jeśli R jest dowolną relacją oraz $Q = R \cup R^{-1}$, to Q_∞ jest relacją równoważności.

Zadanie 117. Udowodnij, że Q_∞ jest najmniejszą (w sensie relacji inkluzji) relacją równoważności zawierającą relację R.

Zadanie 118. Dane jest przekształcenie $f : A \to B$. W zbiorze A definiujemy relację $\sim$ wzorem

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y)$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, by $\sim$ była identycznością na A.

Zadanie 119. Dane jest przekształcenie $f : A \to B$ oraz relacja rownoważności R na B. W zbiorze A definiujemy relację $\sim$ wzorem

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad R(f(x), f(y))$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Zadanie 120. Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze czteroelementowym? Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze sześcioelementowym?

Zadanie 121. W zbiorze $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ definiujemy relacje R_1, R_2, R_3 i R_4 w następujący sposób:

$$\begin{array}{lll}
f R_1 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & f(57) = g(57), \\
f R_2 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & f(57) - g(57) \text{ jest podzielne przez } 57\ , \\
f R_3 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & f(n) = g(n) \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}, \\
f R_4 g & \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} & f(n) \neq g(n) \text{ dla skończenie wielu } n \in \mathbb{N}.
\end{array}$$

Która z relacji R_1, R_2, R_3 i R_4 jest relacją równoważności? Dla każdej z nich, jeśli odpowiedź jest pozytywna, podaj moc zbioru jej klas abstrakcji.

W poniższych zadaniach sprawdź, dla jakich dodatnich liczb naturalnych k podane relacje na zbiorze $\mathbb{N}$ są relacjami równoważności. Opisz ich klasy abstrakcji. Napis $k|m$ oznacza, że m jest podzielne przez k.

Zadanie 122. $x R_1 y \Leftrightarrow k|(x + y)$

Zadanie 123. $x R_2 y \Leftrightarrow k|(x - y)$

Zadanie 124. $x R_3 y \Leftrightarrow x - y = 2$

Zadanie 125. Czy relacja R określona na zbiorze wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach naturalnych wzorem

$$pRq \quad \Leftrightarrow \quad \text{wielomian } p - q \text{ ma wszystkie współczynniki parzyste}$$

jest relacją równoważności?

Zadanie 126. Dany jest zbiór X i jego podzbiór $C \subseteq X$. Czy relacja R określona na $\mathcal{P}(X)$ wzorem

$$ARB \quad \Leftrightarrow \quad A \dot{-} B \subseteq C$$

jest relacją równoważności? Jeśli tak, opisz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 127. W zbiorze wszystkich zbieżnych ciągów nieskończonych o wyrazach wymiernych wprowadzamy relację

$$\bar{a} R \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$$

Pokaż, że R jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

W poniższych zadaniach udowodnij, że podane relacje $R \subseteq X \times X$ są relacjami równoważności. Opisz ich klasy abstrakcji.

Zadanie 128. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$ARB \quad \Leftrightarrow \quad |A \dot{-} B| \text{ jest zbiorem skończonym}$$

Zadanie 129. $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Zadanie 130. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Zadanie 131. $X = \mathbb{R}$,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad |x_1| + |y_1| = |x_2| + |y_2|$$

9. Równoliczność zbiorów

9.1. Relacja równoliczności zbiorów

Zadanie 132. Niech $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$. Czy:

1. $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$
2. $A_1 \cap A_2 \sim B_1 \cap B_2$
3. $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$

Czy odpowiedzi na powyższe pytania ulegną zmianie, jeśli założymy, że jeden ze zbiorów A_1 lub A_2 jest nieskończony? Czy ulegną one zmianie jeśli założymy, że oba zbiory są nieskończone?

Zadanie 133. Czy istnieją zbiory A, B, C, D, takie, że $A \not\sim B$ oraz $C \not\sim D$, ale $A^C \sim B^D$?

Zadanie 134. Konstruując odpowiednie bijekcje udowodnij, że następujące trzy zbiory są równoliczne:

- odcinek otwarty $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$;
- odcinek domknięto-otwarty $[0, 1) \subseteq \mathbb{R}$;
- okrąg na płaszczyźnie o środku $(0, 0)$ i promieniu 1.

Zadanie 135. Skonstruuj bijekcję pomiedzy zbiorem liczb naturalnych a zbiorem niemalejących funkcji ze zbioru liczb naturalnych w zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$. Można skorzystać z faktu, że istnieje bijekcja z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Zadanie 136. Skonstruuj bijekcję pomiedzy zbiorem $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych i zbiorem $\mathbb{Q} \setminus [0, 1]$ (napis $[0, 1]$ oznacza odcinek domknięty o końcach 0 i 1).

Zadanie 137. Niech $A^1 = A$ oraz $A^{n+1} = A^n \times A$. Wykaż, że $A^{\underline{n}} \sim A^n$.

Zadanie 138. Wykaż, że jeśli $A_1 \sim A_2$, to $B^{A_1} \sim B^{A_2}$ oraz jeśli $B_1 \sim B_2$, to $B_1^A \sim B_2^A$.

Zadanie 139. Wykaż, że $(A^B)^C \sim A^{(B\times C)}$.

Zadanie 140. Dla jakich zbiorów A, B i C:

1. $A^B \sim B^A$?
2. $A^{B\cup C} \sim A^B \cup A^C$?

Zadanie 141. Niech A będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym i niech $B \subseteq A$ będzie zbiorem nieskończonym. Korzystając z definicji pojęcia przeliczalności zdefiniuj bijekcje $f : B \to A$ i $g : A \to B$.

Zadanie 142. Niech A będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym i niech $f : A \to B$ będzie surjekcją (odwzorowaniem “na”). Zbuduj injekcję (funkcję różnowartościową) $g : B \to A$.

Zadanie 143. Udowodnij, że zbiory $\mathbb{R}$ i $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ są równoliczne.

Zadanie 144. Wykaż, że $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.

Zadanie 145. Wykaż, że $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Zadanie 146. Dla danej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiujemy zbiór

$$A_f \quad = \quad \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > 1\}$$

Niech $\mathcal{A} = \{A_f \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Znajdź moc zbiorów $\mathcal{A}$ oraz $\bigcup_{f\in\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} A_f$.

9.2. Zbiory skończone

Zadanie 147. Wykaż, że jeśli zbiory A i B są skończone, $|A| = n$ oraz $|B| = m$, to $|A^B| = n^m$.

Definicja 3. Przyjmujemy następujące oznaczenia: dla dowolnego zbioru $X \subseteq A$ napis X^1 oznacza zbiór X, zaś napis X^0 oznacza dopełnienie zbioru X względem zbioru A.

Zadanie 148. Dany jest zbiór A i dodatnia liczba naturalna k oraz zbiory $X_i \subseteq A$ dla $i = 1, \ldots, k$, takie, że dla każdej funkcji $f : \{1, \ldots, k\} \to \{0, 1\}$ zbiór $\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{f(i)}$ ma co najwyżej 1 element. Wyznaczyć maksymalną moc zbioru A.

Zadanie 149. Niech $\langle X_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ będzie dowolnym ciągiem podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.

1. Czy istnieje taki nieskończony ciąg zerojedynkowy $\langle i_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, że
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n^{i_n} \neq \emptyset$$
2. Jaka jest maksymalna moc zbioru wszystkich ciągów $\langle i_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ spełniających powyższy wzór?

Zadanie 150. Udowodnij, że A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera podzbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, tj. gdy istnieje zbiór $B \subseteq A$, taki, że $B \sim \mathbb{N}$.

Zadanie 151. Udowodnij, że A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem, tj. gdy istnieje zbiór $B \subseteq A$, taki, że $B \neq A$ i $A \sim B$.

Zadanie 152. Udowodnij, że A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory B i C takie, że $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C = A$ i $A \sim B \sim C$.

Definicja 4. Mówimy, że funkcja dwuargumentowa $f : A \times B \to C$ *istotnie zależy od każdego z argumentów*, jeśli istnieją elementy $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$, takie, że $f(a, b_1) \neq f(a, b_2)$ oraz istnieją elementy $a_1, a_2 \in A$ i $b \in B$, takie, że $f(a_1, b) \neq f(a_2, b)$.

Zadanie 153. Ile jest dwuargumentowych funkcji logicznych istotnie zależnych od każdego z argumentów. Ile jest funkcji $f : A \times B \to C$ istotnie zależnych od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów A, B, C ma 3 elementy.

Zadanie 154. Ile jest funkcji $f : A \times B \to C$ istotnie zależnych od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów A, B ma 4 elementy, a C ma n elementów.

10. Teoria mocy

Zadanie 155. Czy $\sim$ zachowuje porządek liczb kardynalnych, tj. czy $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ i $|A_1| \leq |B_1|$, implikuje, że $|A_2| \leq |B_2|$?

Zadanie 156. Udowodnij, że następujące zbiory są równoliczne:

- kwadrat $\{\langle x, y\rangle \mid 0 \leq x, y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
- odcinek domknięty $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

Zadanie 157. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zbiór $\mathbb{R}^n$, gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych, ma moc kontinuum.

Zadanie 158. Jaka jest moc zbioru $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$?

Zadanie 159. Dla ciągu nieskończonego $\mathbf{a} = \langle a_1, a_2, a_3, \ldots\rangle$ o wyrazach naturalnych określamy relację $R_{\mathbf{a}}$ w taki sposób, że dla dwóch ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2, b_3, \ldots\rangle$ i $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3, \ldots\rangle$ zachodzi $\mathbf{b}R_{\mathbf{a}}\mathbf{c}$, wtedy i tylko wtedy, gdy
$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = 0 \Rightarrow b_n = c_n)$$

1. Pokaż, że niezależnie od wyboru ciągu **a** relacja $R_{\mathbf{a}}$ jest relacją równoważności.
2. Jaka jest moc zbioru takich ciągów **a**, dla których wszystkie klasy abstrakcji $R_{\mathbf{a}}$ są przeliczalne?
3. Jaka jest moc zbioru takich ciągów **a**, dla których relacja $R_{\mathbf{a}}$ ma przeliczalnie wiele klas abstrakcji?
4. Jaka jest moc zbioru takich ciągów **a**, dla których relacja $R_{\mathbf{a}}$ ma continuum klas abstrakcji i każda z tych klas jest mocy continuum?

5. Jaka jest moc zbioru takich ciągów **a**, dla których relacja $R_{\mathbf{a}}$ ma przeliczalnie wiele klas abstrakcji i każda z tych klas jest przeliczalna?
6. Jaka jest moc zbioru takich ciągów **a**, dla których relacja $R_{\mathbf{a}}$ ma zarówno przeliczalne, jak i nieprzeliczalne klasy abstrakcji?

Zadanie 160. Niech $R_I(x, y)$ oznacza relację

$$(\exists p \in I)\,((\phi(p, x) \wedge \neg\phi(p, y)) \vee (\phi(p, y) \wedge \neg\phi(p, x)))$$

na $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, gdzie $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, I jest skończonym niepustym zbiorem liczb pierwszych, a $\phi(x, y)$ jest formułą $(\exists z)(x \cdot z = y)$. Niech $Q_I = (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \setminus R_I$.

a) Czy R_I jest relacją równoważności. Jeśli tak, podaj liczbę klas równoważności relacji R_I?

b) Czy Q_I jest relacją równoważności. Jeśli tak, podaj liczbę klas równoważności relacji Q_I?

Zadanie 161. Niech $P \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oznacza relację taką, że

$$P(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists q \in \mathbb{Q})(x = y + q),$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych.

a) Czy P jest relacją równoważności?

b) Jakie są moce klas równoważności $[r]_P$ dla liczb $r \in \mathbb{R}$? Jaka jest moc klasy równoważności $[\pi]_P$? Jak jest moc klasy równoważności $[\frac{23}{7}]$? Czy wszystkie klasy równoważności mają tę samą moc?

c) Czy rodzina klas równoważności relacji P jest przeliczalna?

Odpowiedzi uzasadnij.

11. Zbiory przeliczalne

Zadanie 162. Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.

Zadanie 163. Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła, to zbiór jej ekstremów jest przeliczalny.

Zadanie 164. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest lokalnym maksimum funkcji f, jeżeli istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista r, że dla każdego $y \in \mathbb{R}$

$$(x - r < y < x + r \wedge x \neq y) \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Udowodnij, że dla każdej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbiór jej lokalnych maksimów jest przeliczalny.

Zadanie 165. Niech $\mathcal{A}$ będzie przeliczalną rodziną zbiorów przeliczalnych. Pokaż, że $\bigcup \mathcal{A}$ i $\bigcap \mathcal{A}$ są zbiorami przeliczalnymi.

Zadanie 166. Udowodnij, że zbiór wszystkich skończonych ciągów o elementach ze skończonego zbioru A jest przeliczalny.

Zadanie 167. Jaka jast moc zbioru ciągów o wyrazach wymiernych?

Zadanie 168. Jaka jast moc zbioru ciągów o wyrazach wymiernych, stałych od pewnego miejsca?

Zadanie 169. Ile jest ciągów liczb wymiernych zbieżnych do 1?

Zadanie 170. Ile jest rosnących ciągów liczb wymiernych zbieżnych do 1?

Zadanie 171. Czy zbiór nierosnących ciągów o wyrazach naturalnych jest przeliczalny? (ciąg $\langle a_i, i \in \mathbb{N}\rangle$ jest nierosnący, jesli $a_i \leq a_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$).

Zadanie 172. Udowodnij, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

Zadanie 173. Wykaż, że zbiór słabo rosnących funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest nieprzeliczalny (funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo rosnąca*, jeśli $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ dla wszelkich $x, y \in \mathbb{N}$).

Zadanie 174. Wykaż, że zbiór słabo malejących funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest przeliczalny (funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo malejąca*, jeśli $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ dla wszelkich $x, y \in \mathbb{N}$).

Zadanie 175. Liczba a jest punktem skupienia ciagu $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych, jeśli istnieje podciąg (x_{j_i}) ciągu (x_i) zbieżny do a. Ile ciąg może mieć punktów skupienia?

Zadanie 176. Ile jest bijekcji $f : A \to A$, gdy zbiór A jest przeliczalny?

Zadanie 177. Liczba rzeczywista x jest *algebraiczna*, jeśli istnieje wielomian jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych, taki, że x jest jego pierwiastkiem. Udowodnij, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Zadanie 178. Jaka jest moc zbioru wszystkich nieskończonych niemalejących ciągów o wyrazach naturalnych? Jaka jest, dla danego n, moc zbioru wszystkich nieskończonych niemalejących ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$?

Zadanie 179. Wykaż, że jeśli $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze przeliczalnym A, to zbiór klas równoważności $A/_{\sim} = \{[a]_{\sim} : a \in A\}$ jest przeliczalny.

Zadanie 180. Wiadomo, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze A, zbiór klas równoważności $A/_{\sim}$ jest przeliczalny oraz dla każdego $a \in A$, klasa równoważności $[a]_{\sim}$ elementu a jest przeliczalna. Wykaż, że zbiór A jest przeliczalny.

Zadanie 181. Czy zbiór relacji równoważności na zbiorze przeliczalnym jest zbiorem przeliczalnym?

Zadanie 182. Dany jest nieskończony przeliczalny zbiór A i liczba $n \in \mathbb{N}$. Ile jest relacji równoważności $\sim$ na zbiorze A, takich, że dla każdego $a \in A$ klasa abstrakcji $[a]_{\sim}$ ma dokładnie n elementów?

Zadanie 183. Ile jest relacji równoważności na przeliczalnym zbiorze A, takich, że wszystkie ich klasy abstrakcji są skończone?

Zadanie 184. Niech zbiory $A \cup B$ i $C \cup D$ będą przeliczalne nieskończone. Która z poniższych formuł wynika z tego założenia? Uzasadnij swoje odpowiedzi.

$$A \sim C \vee B \sim D$$
$$A \sim C \vee A \sim D \vee B \sim C \vee B \sim D$$
$$(A \sim C \wedge B \sim D) \vee (A \sim D \wedge B \sim C)$$
$$A \sim C \vee A \sim D$$

Zadanie 185. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rośnie szybciej* niż ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

Pokaż, że dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje ciąg rosnący od niego szybciej. Niech $\mathfrak{S}$ będzie zbiorem ciągów liczb rzeczywistych o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje w zbiorze $\mathfrak{S}$ ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$ rosnący od niego szybciej. Wykorzystując metodę przekątniową udowodnij, że $\mathfrak{S}$ nie jest zbiorem przeliczalnym.

Zadanie 186. Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych odcinków na prostej jest przeliczalny. Pokaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych odcinków na płaszczyźnie.

Zadanie 187. Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych kół na płaszczyźnie jest przeliczalny. Pokaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych okręgów na płaszczyźnie. Koło to zbiór punktów $\langle x, y\rangle$ spełniających warunek

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \le r$$

dla pewnego punktu $\langle x_0, y_0\rangle$ i dodatniej liczby rzeczywistej r, a okrąg to zbiór punktów $\langle x, y\rangle$ spełniających warunek

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$$

Zadanie 188. Ósemka, to dwa zewnętrznie styczne okręgi. Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych ósemek na płaszczyźnie jest przeliczalny. Czy moża ułożyć na płaszczyźnie więcej niż przeliczalnie wiele rozłącznych okręgów?

Zadanie 189. T-kształt, to figura na płaszczyźnie, złożona z pary prostopadłych odcinków niezerowej długości, z których jeden końcem styka się z drugim w miejscu różnym od końca tego drugiego (dlatego ta figura przypomina literę T). Krzyż, to figura złożona z pary nierównoległych, przecinających się odcinków niezerowej długości, które nie mają wspólnych końców. Jak wiele rozłącznych T-kształtów można ułożyć na płaszczyźnie? Jak wiele krzyży można ułożyć na płaszczyźnie?

Zadanie 190. Parasol, to bryła złożona z koła o niezerowej średnicy i prostopadłego do niego odcinka o niezerowej długości, który styka się swym końcem ze środkiem koła. Pokaż, że każdy zbiór rozłącznych parasoli w przestrzeni trójwymiarowej ma co najwyżej moc przeliczalną.

12. Porządki częściowe

12.1. Przykłady porządków

Zadanie 191. Niech A będzie zbiorem niepustym oraz niech $\langle B, \leq_B\rangle$ będzie porządkiem częściowym. Na zbiorze funkcji B^A określamy relację $\leq$ przyjmując, że dla $f, g \in B^A$ jest $f \leq g$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \leq_B g(a)$ dla każdego $a \in A$. Wykaż, że $\langle B^A, \leq\rangle$ jest porządkiem częściowym.

Zadanie 192. Pokaż, że na zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nie można wprowadzić porządku $\leq$, takiego, że jednocześnie:

- zero jest porównywalne z każdą liczbą zespoloną, tj. $z = 0$ lub $z > 0$ lub $z < 0$ dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$;
- porządek $\leq$ jest zgodny z działaniami arytmetycznymi, dokładniej $-z < 0$ i $wz > 0$ dla dowolnych $w, z > 0$ oraz $-z > 0$ dla dowolnego $z < 0$.

Zadanie 193. Czy dla danego zbioru $X \neq \emptyset$ można tak określić relację R, by równocześnie:

1. zbiór $\langle X, R\rangle$ był zbiorem częściowo uporządkowanym,
2. R była relacją równoważności w X?

Zadanie 194. Czy dla danego zbioru X takiego, że $|X| \geq 2$ można określić relację R taką, by równocześnie:

1. zbiór $\langle X, R\rangle$ był zbiorem liniowo uporządkowanym,
2. R była relacją równoważności w X?

Zadanie 195. Czy na zbiorze A o mocy większej niż 1 można zdefiniować porządek jednocześnie dobry i gęsty?

Zadanie 196. Niech dla relacji R

- $Z(R)$ oznacza, że R jest zwrotna;
- $S(R)$ oznacza, że R jest symetryczna;
- $P(R)$ oznacza, że R jest przechodnia;
- $A(R)$ oznacza, że R jest słaboantysymetryczna.

Podaj przykłady relacji R_1, R_2, R_3 i R_4 takich, że

1. $Z(R_1) \wedge S(R_1) \wedge P(R_1)$
2. $Z(R_2) \wedge P(R_2) \wedge \neg S(R_2)$
3. $Z(R_3) \wedge S(R_3) \wedge P(R_3) \wedge A(R_3)$
4. $\neg Z(R_4) \wedge \neg A(R_4) \wedge P(R_4)$

Zadanie 197. Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określamy relacje:

1. $f R_1 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}| < \infty$,
2. $f R_2 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}| < 5$,
3. $f R_3 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}| < \infty$,
4. $f R_4 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}| < 5$,
5. $f R_5 g$ jeśli $f(n) \leq g(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Które z nich są relacjami a) równoważności, b) częściowego porządku, c) liniowego porządku?

Definicja 5. Niech $\langle A, \leq\rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Na zbiorze A^* skończonych ciągów elementów zbioru A określamy relację $\preceq$ przyjmując, że dla dowolnych $u, w \in A^*$ zachodzi $u \preceq w$ wtedy i tylko wtedy, gdy u jest przedrostkiem w lub istnieje $i \leq \min(|u|, |w|)$ takie, że dla $j < i$ zachodzi $u(j) = w(j)$ oraz $u(i) < w(i)$. Relację $\preceq$ nazywamy *porządkiem leksykograficznym* na A^* generowanym przez porządek $\leq$.

Zadanie 198. Wykaż, że relacja $\preceq$ jest porządkiem częściowym.

Zadanie 199. Wykaż, jeśli $\langle A, \leq\rangle$ jest porządkiem liniowym, to $\langle A^*, \preceq\rangle$ też jest porządkiem liniowym.

Zadanie 200. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami liniowymi. Relację $\leq$ na $A \times B$ określamy wzorem

$$\langle a_1, b_1\rangle \leq \langle a_2, b_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2$$

Wykaż, że: a) $\leq$ jest porządkiem częściowym na $A \times B$, b) $\leq$ jest porządkiem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A lub zbiór B jest jednoelementowy.

12.2. Izomorfizm porządkowy

Definicja 6. Zbiory uporządkowane $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ są *izomorficzne*, jeżeli istnieje bijekcja $\phi : A \to B$ zachowująca porządek, tzn. taka, że $\phi(a_1) \leq_B \phi(a_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \leq_A a_2$, dla wszelkich $a_1, a_2 \in A$.

Zadanie 201. Udowodnij, że następujące zbiory: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $\mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}\backslash[0, 1)$ i $\mathbb{Q}\backslash[0, 1]$ uporządkowane zwykłą relacją porządku są izomorficzne ($\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych, (a, b) — przedział otwarty o końcach a i b, $[a, b]$ zaś — przedział domknięty).

Definicja 7. Porządek $\leq$ na zbiorze A jest:

- *liniowy*, jeśli dowolne dwa elementy zbioru A są porównywalne, tj. $a \leq b$ lub $b \leq a$ dla wszystkich $a, b \in A$;
- *gęsty*, jeśli pomiędzy każdą parą elementów zbioru A znajduje się trzeci element, tj. gdy dla dowolnych $a, b \in A$, takich, że $a < b$, istnieje $c \in A$, taki, że $a < c < b$;
- *bez końców*, jeśli dla dowolnego elementu zbioru A istnieje element od niego większy i element od niego mniejszy, tj. gdy dla każdego $a \in A$ istnieją $b, c \in A$, takie, że $b < a < c$.

Dla przykładu zwykły porządek na wszystkich pięciu zbiorach z zadania 201 jest liniowy, gęsty i bez końców. Zbiory te są izomorficzne nie przez przypadek, o czym przekonasz się rozwiązując kolejne zadanie. Zauważ ponadto, że zwykły porządek na zbiorze $\mathbb{Q}\backslash(0, 1)$ nie jest gęsty, a na zbiorze $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nie jest bez końców.

Zadanie 202. Pokaż, że dowolne dwa zbiory przeliczalne uporządkowane liniowymi, gęstymi relacjami porządku bez końców są izomorficzne.

Zadanie 203. Uzasadnij, że twierdzenie z poprzedniego zadania jest fałszywe dla zbiorów nieprzeliczalnych, tj. podaj przykład dwóch nieprzeliczalnych zbiorów tej samej mocy, uporządkowanych liniowymi, gęstymi relacjami porządku bez końców, które nie są izomorficzne.

Zadanie 204. Pokaż, że zbiory: liczb naturalnych ze zwykłym porządkiem i skończonych ciągów liczb naturalnych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach naturalnych *nie są* izomorficzne.

Zadanie 205. Pokaż, że zbiory: liczb wymiernych ze zwykłym porządkiem i skończonych ciągów liczb wymiernych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach wymiernych *są* izomorficzne. *Wsk.:* skorzystaj z wyników poprzednich zadań.

Zadanie 206. Pokaż, że zbiory: liczb rzeczywistych ze zwykłym porządkiem i skończonych ciągów liczb rzeczywistych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach rzeczywistych *nie są* izomorficzne.

Zadanie 207. W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wprowadzamy relację $\sim$, taką, że $x \sim y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$. Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 208. W zbiorze wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych wprowadzamy relację

$$\bar{a} R \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k (a_k = b_k \wedge \forall n < k (a_n < b_n)) \vee \bar{a} = \bar{b}$$

Czy ta relacja jest liniowym porządkiem? Czy jest gęstym porządkiem? Czy ten porządek jest izomorficzny z $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$?

Zadanie 209. W zbiorze $\mathbb{C}$ liczb zespolonych wprowadzamy porządek

$$x R y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} x < \operatorname{Re} y \vee (\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y \wedge \operatorname{Im} x < \operatorname{Im} y)$$

Udowodnij, że R jest liniowym gęstym porządkiem bez końców. Czy $\langle \mathbb{C}, R \rangle$ jest izomorficzny z $\langle \mathbb{R}, \leq$?

Zadanie 210. Udowodnij, że każdy zbiór liniowo uporządkowany $\langle X, \preceq \rangle$, taki, że każdy element posiada poprzednik i następnik oraz taki, że jeśli $x \preceq y$, to $\{z : x \preceq z \wedge z \preceq y\}$ jest skończony, jest izomorficzny ze zbiorem $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ liczb całkowitych uporządkowanym standardową relacją mniejszości $\leq$.

Zadanie 211. Podaj przykład przeliczalnego liniowego porządku takiego, że każdy element posiada następnik, istnieje element najmniejszy, każdy element prócz najmniejszego posiada poprzednik, ale nie izomorficznego z $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

Zadanie 212. W zbiorze $\mathbb{R}/\sim$ definiujemy relację $\preceq$, taką, że $[x]_\sim \preceq [y]_\sim \iff x \leq y$, gdzie $\leq$ jest standardowym porządkiem na liczbach rzeczywistych. Uzasadnij, że definicja $\preceq$ jest poprawna. Udowodnij, że $\langle \mathbb{R}/\sim, \preceq \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym. Pokaż, że $\langle \mathbb{R}/\sim, \preceq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ są izomorficzne porządkowo, gdzie $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ jest zbiorem liczb całkowitych ze standardowym porządkiem.

Zadanie 213. W zbiorze $\mathbb{R}/\sim$ definiujemy działania arytmetyczne: $[x]_\sim + [y]_\sim = [x + y]_\sim$ oraz $[x]_\sim \cdot [y]_\sim = [x \cdot y]_\sim$. Czy powyższa definicja jest poprawna?

12.3. Inkluzja jako relacja porządku na zbiorze liczb naturalnych

Definicja 8. Rodzina zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ jest *łańcuchem*, jeśli dla wszelkich $s, t \in T$

$$A_t \subseteq A_s \vee A_s \subseteq A_t$$

(tj. gdy $\subseteq$ jest na tej rodzinie porządkiem liniowym).

Definicja 9. Rodzina zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ jest *antyłańcuchem*, jeśli dla wszelkich $s, t \in T$

$$A_s \subseteq A_t \vee A_t \subseteq A_s \quad \Longrightarrow \quad s = t$$

Zadanie 214. Pokaż, że w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ istnieje łańcuch mocy continuum.

Zadanie 215. Pokaż, że w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ istnieje antyłańcuch mocy continuum.

Definicja 10. Rodzina zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ jest *prawie rozłączna*, jeśli dla wszelkich $s, t \in T$ zbiór $A_t \cap A_s$ jest skończony.

Zadanie 216 (Sierpiński). Pokaż, że w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ istnieje rodzina mocy continuum zbiorów prawie rozłącznych.

Definicja 11. Dla danego zbioru X, filtrem w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ nazywamy taki zbiór $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, że jeśli $A \in \mathcal{F}$ i $A \subseteq B \subseteq X$, to również $B \in \mathcal{F}$, oraz jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to również $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Zadanie 217. Udowodnij, że jeśli $A \subseteq X$ to $\{B \subseteq X : A \subseteq B\}$ jest filtrem. Nazywamy go *filtrem głównym wyznaczonym przez A*.

Zadanie 218. Pokaż, że jeśli X jest zbiorem skończonym, to każdy filtr na $\mathcal{P}(X)$ jest główny.

Zadanie 219. Pokaż, że jeśli X jest zbiorem nieskończonym, to istnieje filtr na $\mathcal{P}(X)$, który nie jest główny.

Zadanie 220. Niech $\mathcal{F}$ będzie filtrem na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dla ciagów o wyrazach naturalnych określamy relację R jak następuje: $\bar{a} R \bar{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{n : a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$. Udowodnij, że R jest relacją równoważności.

Definicja 12. Relacja R jest *ufundowana*, jeśli nie istnieje nieskończony ciąg $x_0, x_1, x_2, \ldots$, taki, że dla każdego i zachodzi $R(x_i, x_{i+1})$.

Relacja R jest *słabo konfluentna*, jeśli dla każdych $x_1, x_2, x_3 \in X$ istnieje taki $x_4 \in X$, że jeśli $x_1 R x_2$ i $x_1 R x_3$, to $x_2 \bar{R} x_4$ i $x_3 \bar{R} x_4$, gdzie $\bar{R}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Relacja R jest *konfluentna*, jeśli dla każdych $x_1, x_2, x_3 \in X$ istnieje taki $x_4 \in X$, że jeśli $x_1 \bar{R} x_2$ i $x_1 \bar{R} x_3$, to również $x_2 \bar{R} x_4$ i $x_3 \bar{R} x_4$, gdzie $\bar{R}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Zadanie 221. Pokaż, że istnieje relacja R słabo konfluentna, która nie jest konfluentna.

Zadanie 222. Pokaż, że jeśli relacja R jest ufundowana i słabo konfluentna, to jest konfluentna.

12.4. Liczba różnych relacji porządku

Zadanie 223. Ile jest relacji częściowego porządku w zbiorze n-elementowym?

Zadanie 224. Ile jest relacji porządku liniowego w zbiorze n elementowym?

Zadanie 225. Niech $\preceq$ oznacza porządek częściowy na liczbach naturalnych. Mówimy, że $\preceq$ jest *zgodny* ze zwykłym porządkiem, gdy

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad (n_1 \preceq n_2 \Rightarrow n_1 \leq n_2)$$

Ile jest porządków częściowych $\preceq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zgodnych ze zwykłym porządkiem i takich, że

1. w każdym antyłańcuchu są co najwyżej dwa elementy?
2. co najwyżej skończona liczba elementów należy do jakiegoś łańcucha o liczbie elementów większej niż 1?
3. zbiór
$$\{x \mid (\exists y)(x \neq y \wedge (y \preceq x \vee x \preceq y))\}$$
jest skończony?
4. w zbiorze $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ istnieje element największy?
5. w każdym łańcuchu są co najwyżej dwa elementy?

12.5. Relacje w zbiorze formuł zdaniowych

Definicja 13. Niech V będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. W zbiorze $\mathcal{F}(V)$ formuł zdaniowych, zbudowanych ze zmiennych ze zbioru V, spójnika negacji $\neg$ i spójników koniunkcji $\wedge$, alternatywy $\vee$, implikacji $\Rightarrow$ i równoważności $\Leftrightarrow$ wprowadzamy binarną relację $\sim$ przyjmując, że:

$$\alpha \sim \beta \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła } (\alpha \Leftrightarrow \beta) \text{ jest tautologią.}$$

Zadanie 226. Wykaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Zadanie 227. Ile jest klas abstrakcji relacji $\sim$, gdy zbiór zmiennych V

(a) ma trzy elementy,

(b) ma n elementów,

(c) ma moc $\aleph_0$?

Zadanie 228. W zbiorze $\mathcal{F}(V)$ wprowadzamy relacje $\sim_1$, $\sim_2$ i $\sim_3$ przyjmując, że

$\alpha \sim_1 \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest spełnialna;
$\alpha \sim_2 \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest sprzeczna;
$\alpha \sim_3 \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest prawdziwa dla dokładnie połowy wartościowań zmiennych występujących w formułach α i β.

Która z tych relacji jest relacją równoważności?

Definicja 14. Niech $\phi_a \in \mathcal{F}(V)$ będzie ustaloną formułą. W zbiorze formuł zdaniowych $\mathcal{F}(V)$ wprowadzamy binarną relację $\sim_{\phi_a}$, przyjmując, że

$$\phi_1 \sim_{\phi_a} \phi_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła } (\phi_a \Rightarrow (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)) \text{ jest tautologią.}$$

Zadanie 229. Udowodnij, że $\sim_{\phi_a}$ jest relacją równoważności. Opisz klasy równoważności formuł $p \vee \neg p$ i $p \wedge \neg p$.

Definicja 15. W zbiorze klas abstrakcji $\mathcal{F}(V)/_\sim$ wyżej opisanej relacji $\sim$ wprowadzamy relację $\leq$ taką, że $[\phi_1]_\sim \leq [\phi_2]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$ jest tautologią.

Zadanie 230. Sprawdź, że powyższa definicja relacji $\leq$ jest poprawna (nie zależy od wyboru reprezentanta klasy abstrakcji) i że definiuje porządek częściowy.

Zadanie 231. Czy $\langle \mathcal{F}(V)/_\sim, \leq \rangle$ jest kratą? Czy jest kratą zupełną?

Zadanie 232. Przyjmijmy, że zbiór zmiennych V jest przeliczalny nieskończony. Znajdź w zbiorze $\langle \mathcal{F}(V)/_\sim, \leq \rangle$ nieskończony podzbiór liniowo uporządkowany (łańcuch).

Zadanie 233. Przyjmijmy, że zbiór zmiennych V jest przeliczalny nieskończony. Czy można w zbiorze $\langle \mathcal{F}(V)/_\sim, \leq \rangle$ znaleźć nieskończony *antyłańcuch*, to znaczy zbiór X taki, że jeśli $x \neq y$, to $\neg(x \leq y)$ dla wszelkich $x, y \in X$?

Zadanie 234. Ile jest klas abstrakcji relacji $\sim$ gdy a) $|V| = 2$, b) $|V| = 3$, c) $|V| = 5$, d) $|V| = n \in \mathbb{N}$, e) $|V| = \aleph_0$?

Zadanie 235. Wypisz najkrótszych reprezentantów wszystkich klas abstrakcji relacji $\sim$ gdy zbiór V ma dwa elementy. Narysuj diagram porządku $\leq$ dla tego przypadku.

Zadanie 236. Wyznacz zbiór elementów minimalnych i kres dolny zbioru $F_1 = \mathcal{F}(V)/_\sim \setminus \{[\bot]_\sim\}$ gdy zbiór zmiennych V jest (a) skończony i (b) nieskończony.

Zadanie 237. Niech zbior zmiennych $V = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wyznacz kresy (dolny i górny) zbiorów $F_2 = \{[\alpha_n]_\sim\}_{n=1}^{\infty}$ i $F_3 = \{[\beta_n]_\sim\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $\alpha_n = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$ i $\beta_n = \bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 \vee \ldots \vee p_n$.

Zadanie 238. Niech zbior zmiennych $V = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$. Wyznacz kresy (dolny i górny) zbioru $F_4 = \{[\gamma_n]_\sim\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $\gamma_n = \bigvee_{i=0}^{n} (p_{2i} \vee \neg p_{2i+1})$.

Zadanie 239. W zbiorze $\mathcal{F}(V)$, gdzie $V = \{p_1, \ldots, p_5\}$, definiujemy relacje R_1, R_2 oraz R_3 w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \phi R_1 \psi &\quad\Leftrightarrow\quad \phi \text{ i } \psi \text{ mają tyle samo wystąpień spójników logicznych} \\ \phi R_2 \psi &\quad\Leftrightarrow\quad (\phi \Leftrightarrow \psi) \text{ jest tautologią} \\ \phi R_3 \psi &\quad\Leftrightarrow\quad (\phi \Leftrightarrow \psi) \text{ jest formułą spełnialną} \end{aligned}$$

Która z relacji R_1, R_2 oraz R_3 jest relacją równoważności? W każdym przypadku w razie pozytywnej odpowiedzi wyznacz moc zbioru klas abstrakcji danej relacji.

Zadanie 240. Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem formuł zadaniowych zbudowanych ze zmiennych ze zbioru $V = \{p, q, r, \ldots\}$ i spójników implikacji $\Rightarrow$ i fałszu $\perp$. Binarna relacja R na zbiorze $\mathcal{F}$ jest *monotoniczna*, jeśli

1. $\perp R \phi$
2. jeśli $\phi_1 R \phi_2$ i $\psi_1 R \psi_2$, to $(\phi_2 \Rightarrow \psi_1) R (\phi_1 \Rightarrow \psi_2)$

dla wszelkich formuł $\phi, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}$.

1. Pokaż, że w zbiorze relacji monotonicznych na $\mathcal{F}$ uporządkowanym relacją inkluzji istnieje element najmniejszy. Relację tę będziemy oznaczać $\sqsubseteq$.
2. Pokaż, że relacja $\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem na $\mathcal{F}$. Pokaż, że nie jest to porządek liniowy.
3. Pokaż, że jeśli $\phi \sqsubseteq \psi$, to $\phi \Rightarrow \psi$ jest tautologią. Pokaż, że implikacja odwrotna nie zachodzi.

13. Słowa

Definicja 16. Niech L będzie zbiorem słów (językiem) nad alfabetem $\{0, 1\}$. Mówimy, że słowa $u, v \in \{0, 1\}^*$ są *równoważne względem języka* L, jeżeli

$$\forall x \in \{0, 1\}^*. \ (ux \in L \iff vx \in L)$$

Zapis $u \sim_L v$ oznacza, że słowa u i v są równoważne względem języka L.
Dla danego słowa w nad ustalonym alfabetem przez w^n oznaczamy słowo $\underbrace{ww \ldots w}_{n \text{ razy}}$. Formalnie

$$\begin{array}{rcl} w^0 & = & \epsilon \\ w^{n+1} & = & ww^n \end{array}$$

gdzie ϵ jest słowem pustym. Przez w^* oznaczamy zbiór słów postaci w^n dla wszelkich naturalnych n, tj. $w^* = \{w^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 241. Wykaż, że $\sim_L$ jest relacją równoważności.

Zbiór klas równoważności relacji $\sim_L$ oznaczamy $\mathcal{Q}(L)$.

Zadanie 242. Pokaż, że jeśli dla pewnych słów $w \in L$ i $v \in \{0, 1\}^*$ zachodzi $wv \in [w]_\sim$, to $wv^n \in L$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 243. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim_L$ równoważności słów względem następujących języków:

$$\begin{array}{rcl} L_1 & = & \{1^n \mid 1 \leq n \leq 6\} \\ L_2 & = & (0011)^* \\ L_3 & = & \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Zadanie 244. Dla języka L nad alfabetem $\{0, 1\}$ określamy funkcje

$$\begin{array}{rcl} f & : & \mathcal{Q}(L) \times \mathcal{Q}(L) \to \mathcal{Q}(L) \\ g & : & \mathcal{Q}(L) \times \{0, 1\} \to \mathcal{Q}(L) \end{array}$$

gdzie $\mathcal{Q}(L)$ jest rodziną klas abstrakcji relacji $\sim_L$ równoważności względem języka L, wzorami:

$$\begin{array}{rcl} f([u]_{\sim_L}, [w]_{\sim_L}) & = & [uw]_{\sim_L} \\ g([u]_{\sim_L}, a) & = & [ua]_{\sim_L} \end{array}$$

gdzie $u, w \in \{0, 1\}^*$ oraz $a \in \{0, 1\}$. Która z powyższych definicji jest poprawna?

Zadanie 245. Niech g będzie funkcją zdefiniowaną w poprzednim zadaniu. Kładziemy

$$\begin{array}{rcl} g^*(\epsilon) & = & g([\epsilon]_{\sim_L}, \epsilon) \\ g^*(wa) & = & g(g^*(w), a) \end{array}$$

dla $w \in \{0, 1\}^*$ i $a \in \{0, 1\}$. Wykaż, że słowo $w \in \{0, 1\}^*$ należy do języka L wtedy i tylko wtedy, gdy $g^*(w) \subseteq L$.

14. Kresy zbiorów

Zadanie 246. Rodzinę $\mathcal{P}(A)$ podzbiorów niepustego zbioru A porządkujemy relacją inkluzji $\subseteq$. Wykaż, że kres górny dowolnego podzbioru $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(A)$ jest równy sumie teoriomnogościowej zbiorów do niego należących, a kres dolny — przekrojowi. Formalnie: $\sup\{X_s\}_{s\in S} = \bigcup_{s\in S} X_s$ oraz $\inf\{X_s\}_{s\in S} = \bigcap_{s\in S} X_s$ dla dowolnej rodziny $\{X_s\}_{s\in S} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Zadanie 247. Wykaż, że dla każdego zbioru rodzina wszystkich relacji równoważności określonych na tym zbiorze uporządkowana relacją inkluzji jest kratą zupełną.

Zadanie 248. Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym. Wykaż, że rodzina $\mathcal{K} = \{R : R \subseteq A^2\}$ binarnych relacji określonych na zbiorze A uporządkowana relacją inkluzji $\subseteq$ jest kratą zupełną.

Definicja 17. Relacja podzielności liczb naturalnych $| \subset \mathbb{N}^2$ jest określona następująco:

$$x \mid y \quad \Leftrightarrow \quad \exists z \in \mathbb{N}(xz = y)$$

Zadanie 249. Pokaż, że relacja $|$ jest porządkiem częściowym. Udowodnij, że każdy podzbiór $\langle \mathbb{N}, | \rangle$ posiada kres dolny. Pokaż też, że $\inf\{m, n\} = \gcd(m, n)$ i $\sup\{m, n\} = \operatorname{lcm}(m, n)$, gdzie gcd jest największym wspólnym podzielnikiem dwu liczb, a lcm — najmniejszą wspólną wielokrotnością.

Zadanie 250. Rozważmy relację $|$ na zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Znajdź zbiór elementów minimalnych w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$.
2. Udowodnij, że w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$ nie ma elementów maksymalnych.

Zadanie 251.

1. Znajdź ogólną postać łańcucha w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$,
2. Znajdź ogólną postać antyłańcucha w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$.
3. Udowodnij, że relacja inkluzji w zbiorze wszystkich łańcuchów zbioru $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, | \rangle$ jest częściowym porządkiem. Znajdź postać łańcuchów minimalnych i maksymalnych względem relacji inkluzji.

Zadanie 252. Znajdź przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R \rangle$, takiego, że w zbiorze $\langle X, R \rangle$ jest dokładnie jeden element maksymalny i nie ma elementu największego. Znajdź przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R \rangle$, takiego, że w zbiorze $\langle X, R \rangle$ jest dokładnie jeden element minimalny i nie ma elementu najmniejszego.

Zadanie 253. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wprowadzamy relację R wzorem

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \forall n (a_n \le b_n).$$

1. Udowodnij, że zbiór $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, R \rangle$ jest częściowo uporządkowany. Znajdź elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy w tym zbiorze.
2. Czy zbiór ten jest uporządkowany liniowo?

Zadanie 254. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, wprowadzamy realcję S wzorem

$$aSb \quad \Leftrightarrow \quad \exists k. \forall n < k. (a_n = b_n \wedge a_k < b_k) \vee (a = b)$$

1. Udowodnij, że zbiór $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, S \rangle$ jest liniowo uporządkowany.
2. Udowodnij, że $aRb \Rightarrow aSb$ dla wszelkich $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, gdzie R jest relacją rozważaną w zadaniu 253.

Definicja 18. Funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ są *równe prawie wszędzie*, jeśli zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) \neq g(n)\}$$

jest skończony. Zapis $f \approx g$ oznacza, że funkcje f i g są równe prawie wszędzie.

Zadanie 255. Pokaż, że $\approx$ jest relacją równoważności.

Zadanie 256. Ile jest klas abstrakcji relacji $\approx$? Jaka jest moc każdej z nich?

Definicja 19. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *majoryzuje* funkcję $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jeśli zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} : f(n) < g(n)\}$$

jest skończony. Zapis $g \preceq f$ oznacza, że funkcja f majoryzuje funkcję g.

Na zbiorze $\mathcal{F} = \{[f]_{\approx} \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ klas abstrakcji relacji $\approx$ wprowadzamy relację $\preceq$ przyjmując, że

$$[f]_{\approx} \preceq [g]_{\approx} \quad \Leftrightarrow \quad f \preceq g$$

Zadanie 257. Wykaż, że definicja relacji $\preceq$ na zbiorze $\mathcal{F}$ jest poprawna (nie zależy od wyboru reprezentantów klas abstrakcji) i że relacja $\preceq$ jest częściowym porządkiem na $\mathcal{F}$.

Zadanie 258. Niech dana będzie funkcja $e(n) = 2^n$ i rodzina funkcji $f_k(n) = n^k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wykaż, że dla żadnego k funkcja f_k nie majoryzuje funkcji e.

Zadanie 259. Czy istnieje ciąg funkcji $\langle f_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ taki, że $f_i \prec f_{i+1}$ dla $i \in \mathbb{N}$, oraz dla każdej funkcji $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje i takie, że $g \prec f_i$?

Zadanie 260. Wykaż, że każdy przeliczalny podzbiór $X \subseteq \mathcal{F}$ posiada w zbiorze $\mathcal{F}$ ograniczenie górne.

Zadanie 261. Niech $\{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ będzie podziałem zbioru $\mathbb{N}$ na zbiory nieskończone. Definiujemy ciąg funkcji $\{f_j : j \in \mathbb{N}\}$ kładąc

$$f_j(n) \quad = \quad \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \in \bigcup_{i=1}^{j} A_i \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wykaż, że zbiór $\{[f_j]_\approx : j \in \mathbb{N}\}$ nie ma kresu górnego w $\langle \mathcal{F}, \preceq\rangle$.

Definicja 20. *Nieskończonym łańcuchem wstępującym* w zbiorze uporządkowanym $\langle A, \leq\rangle$ nazywamy ciąg $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ taki, że $a_i < a_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, gdzie $a < b$ oznacza, że $a \leq b$ i $a \neq b$. Podobnie ciąg $\{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ jest *łańcuchem zstępującym*, jeśli $a_{i+1} < a_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$.

Zadanie 262. Wykaż, że żaden przeliczalny nieskończony ściśle wstępujący łańcuch nie posiada w zbiorze $\mathcal{F}$ kresu górnego.

Zadanie 263. Jak jest największa moc ściśle wstępującego łańcucha w zbiorze $\mathcal{F}$?

Zadanie 264. Wykaż, że jeśli $\langle\{0, 1\}^*, \preceq\rangle$ jest zbiorem uporządkowanym leksykograficznie nad zbiorem $\langle\{0, 1\}, \leq\rangle$, gdzie $0 \leq 1$, to w zbiorze $\langle\{0, 1\}^*, \preceq\rangle$ można znaleźć nieskończony łańcuch wstępujący i nieskończony łańcuch zstępujący. Czy w zbiorze $\langle\{0, 1\}^*, \preceq\rangle$ istnieje element najmniejszy lub największy?

Definicja 21. Niech Z oznacza zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. W zbiorze Z wprowadzamy relację $\sim$ następująco:

$$X \sim Y \quad \text{wtw} \quad |X \doteq Y| < \aleph_0$$

Zadanie 265. Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Definicja 22. W zbiorze klas abstrakcji $Z/_\sim$ wprowadzamy relację $\leq$, taką że:

$$[X]_\sim \leq [Y]_\sim \quad \text{wtw} \quad |X \setminus Y| < \aleph_0$$

Zadanie 266. Sprawdź, czy definicja $\leq$ jest poprawna.

Zadanie 267. Sprawdź, czy $\leq$ jest porządkiem częściowym.

Zadanie 268. Czy ten porządek jest regularny?

Zadanie 269. Znajdź w $\langle Z/_\sim, \leq\rangle$ nieskończony podzbiór liniowo uporządkowany.

Zadanie 270. Znajdź w $\langle Z/_\sim, \leq\rangle$ nieskończony antyłańcuch.

Zadanie 271. Wykaż, że $\langle Z/_\sim, \leq\rangle$ nie jest zupełny.

Zadanie 272. Wykaż, że każdy ściśle malejący ciąg $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$ elementów $\langle Z/_\sim, \leq\rangle$ (gdzie $x > y$ gdy $y \leq x$ i $y \neq x$) ma w $Z/_\sim$ ograniczenie dolne, tj. istnieje $y \in Z/_\sim$, taki że $y \leq x_i$ dla każdego i.

Zadanie 273. Wykaż, że $\langle Z/_\sim, \leq\rangle$ jest kratą.

14.1. Porządki zupełne

Definicja 23. Podzbiór A zbioru uporządkowanego $\langle X, \leq\rangle$ jest *skierowany*, jeśli wraz z każdymi dwoma elementami zawiera (jakikolwiek) element nie mniejszy od nich obu, tj. dla każdych elementów $a_1, a_2 \in A$, istnieje element $b \in A$, taki, że $a_1 \leq b$ i $a_2 \leq b$. Zauważ, że każdy podzbiór liniowo uporządkowany jest skierowany. Porządek $\leq$ na zbiorze X jest *zupełny*, jeśli istnieje element najmniejszy w X i każdy skierowany podzbiór zbioru X posiada w X kres górny.

Zadanie 274. Pokaż, że relacja inkluzji na rodzinie skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych nie jest porządkiem zupełnym.

Zadanie 275. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami zupełnymi. W produkcie $A \times B$ defininiujemy relację $\leq$ w następujący sposób: $\langle a_1, b_1\rangle \leq \langle a_2, b_2\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \leq_A a_2$ oraz $b_1 \leq_B b_2$. Udowodnij, że $\langle A \times B, \leq\rangle$ jest porządkiem zupełnym.

Zadanie 276. Niech A będzie zbiorem niepustym oraz niech $\langle B, \leq_B\rangle$ będzie porządkiem częściowym zupełnym. Wykaż, że $\langle B^A, \leq\rangle$ jest porządkiem zupełnym, gdzie $f \leq g$ dla $f, g \in B^A$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \leq_B g(a)$ dla każdego $a \in A$.

Zadanie 277. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ oraz $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami częściowymi zupełnymi. Wykaż, że $\langle [A, B], \leq\rangle$ jest porządkiem zupełnym, gdzie $[A, B]$ oznacza zbiór funkcji ciągłych z A w B oraz $f \leq g$, dla $f, g \in B^A$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \leq_B g(a)$ dla każdego $a \in A$.

Zadanie 278. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami zupełnymi. Pokaż, że funkcja $\phi : [A, B] \times A \to B$, gdzie $[A, B]$ jest zbiorem funkcji ciągłych z A w B, zdefiniowana wzorem $\phi(f, a) = f(a)$ jest ciągła.

Zadanie 279. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A i B relacja inkluzji na zbiorze $B^{\subseteq A}$ funkcji częściowych z A w B jest porządkiem zupełnym. Czy $\langle B^{\subseteq A}, \subseteq\rangle$ jest kratą zupełną?

Zadanie 280. Zbiór W na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek, tj. gdy $\overline{ab} \subseteq W$ dla dowolnych punktów $a, b \in W$. Pokaż, że relacja inkluzji na rodzinie wypukłych podzbiorów płaszczyzny jest porządkiem zupełnym.

14.2. Twierdzenie o punkcie stałym

Zadanie 281. Niech $A \neq \emptyset$ i niech $f : A \to A$. Udowodnij, że dla dowolnego $a \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $X \subseteq A$, taki, że $a \in X$ oraz $\vec{f}^{-1}(X) \subseteq X$.

Zadanie 282. Niech $R \subseteq A^2$ i niech funkcja $\phi_R : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ będzie zdefiniowana wzorem

$$\phi_R(X) \quad = \quad X \cup X^{-1} \cup XX \cup E_A \cup R$$

gdzie $E_A = \{\langle x, x\rangle : x \in A\}$. Wykaż, że dla każdej relacji $R \subseteq A^2$ istnieje najmniejszy punkt stały funkcji ϕ_R.

Zadanie 283. Niech, że R^+ będzie najmniejszym punktem stałym funkcji ϕ_R. Wykaż, że R^+ jest najmniejszą (względem relacji inkluzji $\subseteq$) relacją równoważności zawierającą relację R.

Zadanie 284. Na rodzinie $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$ wszystkich języków nad alfabetem $\{0, 1\}$ określamy funkcję

$$f(X) \quad = \quad X \cup \{w01 \mid w \in X\}$$

Znajdź najmniejszy punkt stały funkcji f w zbiorze $\mathcal{L}$ uporządkowanym relacją inkluzji. Czy istnieje największy punkt stały tej funkcji? Ile punktów stałych ma funkcja $g(X) = \{w01 \mid x \in X\}$?

15. Dobry porządek

Zadanie 285. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$ będą zbiorami uporządkowanymi, w których porządki $\leq_A$ i $\leq_B$ są regularne. Na zbiorze $A \times B$ definiujemy relację $\leq$, przyjmując, że $\langle x_1, y_1\rangle \leq \langle x_2, y_2\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \leq_A x_2$ i $y_1 \leq_B y_2$, dla wszelkich $x_1, x_2 \in A$ i $y_1, y_2 \in B$. Wykaż, że relacja $\leq$ jest porządkiem regularnym na zbiorze $A \times B$.

Zadanie 286. Załóżmy, że zbiór $\langle X, R\rangle$ jest dobrze uporządkowany, tzn. liniowo uporządkowany i regularny. Znajdź warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór $\langle X, R^{-1}\rangle$ był także dobrze uporządkowany.

Zadanie 287. Udowodnij, że jeśli $f : A \to B$ jest monotoniczną bijekcją między dobrymi porządkami $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$, to funkcja odwrotna f^{-1} też jest monotoniczna. Czy założenie, że porządki $\leq_A$ i $\leq_B$ są dobre jest istotne?

Zadanie 288. W zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ wprowadzamy relację R wzorem

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad (2|x \wedge 2|y \wedge y \leq x) \vee (2|x \wedge \neg(2|y)) \vee (\neg(2|x) \wedge \neg(2|y) \wedge x \leq y)$$

Udowodnij, że zbiór $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, R \rangle$ jest liniowo uporządkowany. Czy jest to dobry porządek?

Zadanie 289. Element $x \in X$ nazywamy (bezpośrednim) *następnikiem* elementu y w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X, R \rangle$ jeśli spełniony jest warunek

$$yRx \wedge \forall z[(yRz \wedge zRx) \Rightarrow (y = z \vee z = x)]$$

Udowodnij, że w zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element (poza co najwyżej elementem największym) posiada następnik. Czy każdy element poza elementem pierwszym musi posiadać poprzednik?

Zadanie 290. Dany jest zbiór

$$A \quad = \quad \left\{ n + \frac{m}{m+1} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

1. Czy $\langle A, < \rangle$ jest dobrym porządkiem ($<$ jest zwykłą relacją mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych)?
2. Ile jest nierosnących funkcji z $\mathbb{N}$ w A?

Zadanie 291. W zbiorze $\mathcal{F} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację $\leq_F$ kładąc

$$f \leq_F g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)).$$

Czy porządek częściowy $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$ jest

a) kratą,

b) kratą zupełną,

c) porządkiem zupełnym,

d) porządkiem regularnym?

Zadanie 292. Niech $\mathcal{F} = \{f \in 2^{\mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : f(n) = 1\}$ jest skończony$\}$. W zbiorze $\mathcal{F}$ wprowadzamy relacje $\leq_F$ i $\leq_L$ kładąc

$$\begin{aligned} f \leq_F g \quad &\Leftrightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)) \text{ oraz} \\ f \leq_L g \quad &\Leftrightarrow \quad f = g \vee (\exists m \in \mathbb{N})(f(m) < g(m) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(n < m \Rightarrow f(n) = g(n))). \end{aligned}$$

a) Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$ jest porządkiem liniowym?

b) Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_L \rangle$ jest porządkiem liniowym?

c) Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$ jest porządkiem regularnym?

d) Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_L \rangle$ jest porządkiem regularnym?

e) Czy $\langle \mathcal{F}, (\leq_F)^{-1} \rangle$ jest porządkiem regularnym?

f) Czy $\langle \mathcal{F}, (\leq_L)^{-1} \rangle$ jest porządkiem regularnym?

16. Indukcja

Zadanie 293. W klasie jest $2n$ dzieci i n dwuosobowych ławek. Wykaż przez indukcję, że dzieci można podzielić w pary na $\frac{(2n)!}{2^n}$ sposobów i rozsadzić w ławkach na $n!\frac{(2n)!}{2^n}$ sposobów.

Zadanie 294. Skończony zbiór liniowo uporządkowany $\langle A, \leq_A \rangle$ ma n elementów, a zbiór uporządkowany $\langle B, \leq_B \rangle$ ma 2 elementy. Na ile sposobów można porządek liniowy na A rozszerzyć o elementy zbioru B (to znaczy znaleźć porządek liniowy $\langle A \cup B, \leq \rangle$, taki, że $(a_1 \leq_A a_2) \Leftrightarrow (a_1 \leq a_2)$, dla $a_1, a_2 \in A$ oraz $(b_1 \leq_B b_2) \Leftrightarrow (b_1 \leq b_2)$, dla $b_1, b_2 \in B$)? Odpowiedź uzasadnij przy pomocy dowodu przez indukcję.

Zadanie 295. Udowodnij, że jeśli wyrazy ciągu spełniają warunki $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, to $a_n = 2^n + 1$.

Zadanie 296. Dany jest ciąg a_n taki, że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że jeśli $n > 0$, to $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

Zadanie 297. Dany jest ciąg a_n taki, że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że jeśli $n > 0$, to $a_n^2 = (-1)^{n+1} + a_{n-1}a_{n+1}$.

Zadanie 298. Dany jest ciąg a_n, taki, że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że jeśli $n > 0$, to $a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2$.

Zadanie 299. Udowodnij, że obszary wyznaczone przez dowolną skończoną liczbę prostych na płaszczyźnie można pokolorować dwoma kolorami tak, by żadne dwa obszary o tym samym kolorze nie miały wspólnego boku.

Zadanie 300. Wykaż indukcyjnie, że $2^n \geq n^2$ dla każdego $n \geq 5$.

Zadanie 301. Zbiór W na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek, tj. gdy $\overline{ab} \subseteq W$ dla dowolnych punktów $a, b \in W$. Niech $\langle W_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ będzie ciągiem zbiorów wypukłych, takich, że $W_i \subseteq W_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Pokaż, że zbiór $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ jest wypukły.

Zadanie 302. Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ będzie zbiorem, takim, że spełniona jest koniunkcja warunków

1. $0, 1 \in X$
2. $\forall n\ (n \in X \Rightarrow 2n \in X)$
3. $\forall n\ (n + 1 \in X \Rightarrow n \in X)$

Udowodnij, że $X = \mathbb{N}$.

Zadanie 303. Dany jest zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający warunki:

1. $0, 1 \in X$,
2. jeśli $x \in X$ oraz $x + 1 \in X$ to $x + 2 \in X$, dla każdej liczby naturalnej x.

Wykaż, że $X = \mathbb{N}$. Czy to twierdzenie pozostanie słuszne, jeśli warunek 1. zastąpimy przez słabszy warunek $0 \in X$?

Zadanie 304. Rozważmy grę, w której ruchy wykonują na zmianę gracz A i gracz B. Gracz A dostaje n cukierków i rozpoczyna grę. W każdym kroku gracz, który ma cukierki, zjada jeden lub dwa cukierki i przekazuje resztę cukierków przeciwnikowi. Wygrywa ten gracz, który zje ostatniego cukierka. Wykaż, że jeśli n dzieli się przez 3, to gracz B potrafi wygrać niezależnie od ruchów gracza A, natomiast jeśli n nie dzieli się przez 3, to gracz A potrafi wygrać niezależnie od ruchów gracza B.

Zadanie 305. Wykaż, że n prostych przecina się na płaszczyźnie w co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ punktach.

Zadanie 306. Pokaż przez indukcję, że dla każdej formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\vee, \wedge \Rightarrow, \neg$, liczba wystąpień zmiennych jest o 1 większa od liczby wystąpień binarnych spójników zdaniowych.

Zadanie 307. Pokaż przez indukcję, że dla każdego zbioru A mocy $n \in \mathbb{N}$ istnieje $n!$ bijekcji $f : A \to A$.

17. Elementy algebry uniwersalnej

Definicja 24. *Homomorfizmem* algebry $\mathcal{A} = \langle A, \cdot^{\mathcal{A}}\rangle$ w algebrę $\mathcal{B} = \langle B, \cdot^{\mathcal{B}}\rangle$ nazywamy funkcję $h : A \to B$, taką, że dla każdego n-argumentowego symbolu funkcji f sygnatury algebry $\mathcal{A}$ i każdego ciągu $a_1, \ldots, a_n$ elementów A zachodzi równość $h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$.

Zadanie 308. Znajdź wszystkie homomorfizmy algebry $\langle\{a\}^*, \cdot, \epsilon\rangle$ w algebrę $\langle\{a, b\}^*, \cdot, \epsilon\rangle$, gdzie $\cdot$ oznacza konkatenację (złączenie) słów, a ϵ oznacza słowo puste.

Zadanie 309. Niech Σ będzie dowolną sygnaturą i niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą dowolnymi algebrami sygnatury Σ. Wykaż, że istnieje algebra $\mathcal{C}$ o sygnaturze Σ, dla której istnieją homomorfizmy: g algebry $\mathcal{C}$ na $\mathcal{A}$ i h algebry $\mathcal{C}$ na $\mathcal{B}$.

Zadanie 310. Niech $\langle\{a, b\}^*, \cdot\rangle$ będzie algebrą słów nad alfabetem $\{a, b\}$ z konkatenacją „$\cdot$”. Jaka jest moc zbioru wszystkich homomorfizmów $h : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ algebry $\langle\{a, b\}^*, \cdot\rangle$ w siebie?

Zadanie 311. Udowodnij, że ciało $\mathbb{Z}_p = (\{0, \ldots, p - 1\}, +, \cdot, 0, 1)$ dla dowolnej liczby pierwszej p spełnia formułę $\forall x (x \neq 0 \Rightarrow \exists y(x \cdot y = 1))$.

Zadanie 312. Niech $\mathbb{Z}_n$ oznacza algebrę $\langle\{0, 1, \ldots, n - 1\}, +\rangle$, gdzie $+$ oznacza dodawanie modulo n. Ile jest homomorfizmów

1. $h : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_3$,
2. $h : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$?

Zadanie 313. Ile jest homomorfizmów $h : \mathbb{Z}_{2^n} \to \mathbb{Z}_k$, dla $k \leq 2^n$.

Zadanie 314. Niech $\mathfrak{B}_n$ oznacza algebrę $\langle \mathcal{P}(\{0, \ldots, n-1\}), \cup, \cap, \setminus \rangle$. Ile jest homomorfizmów:

1. $h : \mathfrak{B}_5 \to \mathfrak{B}_3$?
2. $h : \mathfrak{B}_3 \to \mathfrak{B}_5$?

Zadanie 315. W zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definiujemy działania

$$\begin{array}{rcl} [X]_\sim \cup [Y]_\sim & = & [X \cup Y]_\sim \\ [X]_\sim \cap [Y]_\sim & = & [X \cap Y]_\sim \\ [X]_\sim \setminus [Y]_\sim & = & [X \setminus Y]_\sim \end{array}$$

Czy powyższe definicje są poprawne? Czy funkcja $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$ określona wzorem $h(X) = [X]_\sim$ jest homomorfizmem algebry $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \setminus \rangle$ w algebrę $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \cup, \cap, \setminus \rangle$.

Definicja 25. W zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$ definiujemy porządek $\preceq$ kładąc $[X]_\sim \preceq [Y]_\sim$, jeśli $X \cup Y \in [Y]_\sim$.

Zadanie 316. Sprawdź, czy powyższa definicja jest poprawna. Czy $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \preceq \rangle$ jest kratą?

Zadanie 317. Czy zbiór $\{[X]_\sim \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $X_n = \{2^n k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ma kres dolny?

Zadanie 318. Czy w $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \preceq \rangle$ istnieje nieskończony antyłańcuch?

Zadanie 319. Przyjmijmy, że $[0, 1) = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r < 1\}$, funkcja $f : \mathbb{R} \to [0, 1)$ przyporządkowuje liczbie x część ułamkową x (tj. $f(x) \in [0, 1)$ i $x - f(x)$ jest liczbą całkowitą dla każdego $x \in \mathbb{R}$), a funkcja $g : [0, 1) \to \mathbb{R}$ jest identycznością na $[0, 1)$ (to znaczy $g(x) = x$ dla $x \in [0, 1)$). W zbiorze $[0, 1)$ definiujemy działanie $\oplus$ kładąc $x \oplus y = f(x + y)$. Rozważamy algebry

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_1 & = & \langle \mathbb{R}, + \rangle \\ \mathcal{R}_2 & = & \langle \mathbb{R}, +, \times \rangle \\ \mathcal{R}_3 & = & \langle [0, 1), \oplus \rangle \\ \mathcal{R}_4 & = & \langle [0, 1), \oplus, \times \rangle \end{array}$$

a) Czy f jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_1$ w $\mathcal{R}_3$?
b) Czy f jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_2$ w $\mathcal{R}_4$?
c) Czy g jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_3$ w $\mathcal{R}_1$?
d) Czy g jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_4$ w $\mathcal{R}_2$?

18. Problem unifikacji

Zadanie 320. Udowodnij następujące twierdzenie o zwartości dla problemu unifikacji: zadanie unifikacji $\{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}_{i \in I}$, w którym występuje jedynie skończenie wiele różnych zmiennych, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego skończone podzadanie $\{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}_{i \in I_0}$, dla $I_0 \subseteq I$, $|I_0| < \infty$, ma rozwiązanie. Pokaż, że twierdzenie jest fałszywe, jeśli zadanie zawiera nieskończenie wiele zmiennych.

W poniższych zadaniach znajdź najogólniejszy unifikator dla podanych instacji problemu unifikacji (lub uzasadnij, że takowy nie istnieje) w algebrze termów o sygnaturze $\Sigma = \{c, d, g, f\}$ i zbiorze zmiennych $\mathcal{X} = \{x, y, z, u, v, \ldots\}$.

Zadanie 321. $\{f(x, f(x, c, g(z)), f(g(g(z)), x, g(c))) \stackrel{?}{=} f(f(u, v, v), y, y)\}$

Zadanie 322. $\{f(f(d, y), f(z, x)) \stackrel{?}{=} f(f(y, z), f(x, c))\}$

Zadanie 323. $\{f(f(x, y), f(z, u)) \stackrel{?}{=}$
$f(f(f(f(u, u), f(u, u)), f(f(x, x), f(x, x))), f(f(f(y, y), f(y, y)), f(f(u, u), f(u, u))))\}$

Zadanie 324. $\{f(x_1, x_1) \stackrel{?}{=} x_2,\ f(x_2, x_2) \stackrel{?}{=} x_3, \ldots,\ f(x_{n-1}, x_{n-1}) \stackrel{?}{=} x_n\}$

19. Systemy dowodzenia

Podaj formalne wyprowadzenia w systemie hilbertowskim sekwentów wymienionych w poniższych zadaniach.

Zadanie 325. $\vdash p \wedge q \Rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

Zadanie 326. $\{p, \neg p\} \vdash q$

Zadanie 327. $\{p \Rightarrow q,\, p, q \Rightarrow r\} \vdash r$

Zadanie 328. Niech $\hat{\alpha}$ oznacza *dualizację formuły* α, dla dowolnej formuły α, tzn. formułę powstałą przez zastąpienie każdego wystąpienia symbolu $\vee$ przez $\wedge$, i każdego wystąpienia $\wedge$ przez $\vee$. Udowodnij, że

- α jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest $\neg\hat{\alpha}$;
- $\alpha \Leftrightarrow \beta$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest $\hat{\alpha} \Leftrightarrow \hat{\beta}$.

Zadanie 329. Niech $\vdash_{H_1}$ oznacza hilbertowski system dowodzenia H, w którym aksjomat $\Delta \vdash \neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ jest zastąpiony przez $\Delta \vdash (\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha)$. Udowodnij, że obydwa systemy są równoważne, tzn., że dla dowolnego sekwentu $\Delta \vdash \alpha$ zachodzi $\Delta \vdash_H \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \vdash_{H_1} \alpha$.

Zadanie 330. Udowodnij, że aksjomatu $\Delta \vdash (\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha)$ hilbertowskiego systemu dowodzenia nie można wyprowadzić z pozostałych aksjomatów za pomocą reguły odrywania.

Zadanie 331. Udowodnij $\vdash_H \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ używając twierdzenia o dedukcji oraz bez użycia tego twierdzenia.

Zadanie 332. Pokaż, że w systemie $\vdash_H$ wyprowadzalna jest reguła

$$\frac{\Delta \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \Delta \vdash \neg\beta}{\Delta \vdash \neg\alpha}$$