Uniwersytet Wrocławski, Instytut Informatyki
Studia magisterskie na kierunku Informatyka
Przedmiot obowiązkowy w semestrze zimowym pierwszego roku studiów
30 godzin wykładu + 30 godzin repetytorium + 30 godzin ćwiczeń

Logika dla informatyków

Materiały do zajęć

Leszek Pacholski

Wrocław, 2004

	2004/5
Właściciel tej kopii notatek	Rok akad.

Uwaga: W niniejszej książeczce zebrano listy zadań, notatki do wykładów oraz inne materiały przygotowywane do zajęć z *Logiki dla informatyków* w latach 1997–2004. Mimo iż materiały te posiadają bardziej dopracowaną formę, niż przygotowywane do innych zajęć kserograficzne kopie oraz zostały oddane do druku i oprawy, jednak nie były poddane — jak to ma miejsce w przypadku podręczników — solidnej korekcie i zawierają sporo błędów. Nie zamieszczono w nich także szczegółowych wyjaśnień i komentarzy. Dlatego notatki te *nie są podręcznikiem do wykładu*. Mają jedynie służyć jako wykaz zagadnień obowiązujących do egzaminu i lista zadań przerabianych na ćwiczeniach. Przegląd zalecanych do zajęć podręczników jest zamieszczony na stronie xi.

Podczas redagowania notatek wykorzystano:
- skrypt J. Tiuryna *Wstęp do teorii mnogości i logiki*
- listy zadań M. Zakrzewskiego
- materiały A. Kościelskiego i T. Wierzbickiego
- podręczniki wymienione w bibliografii na stronie xi

Redakcja i skład: T. Wierzbicki
Konsultacja merytoryczna: A. Kościelski

Wydanie drugie, (nieznacznie) poprawione i rozszerzone

Data utworzenia dokumentu: 15 września 2004

ISBN: 83–917081–7–9

Strona WWW zajęć: `http://www.ii.uni.wroc.pl/~pacholsk/logika.phtml`

Szanowni Państwo,

Program wykładu logiki dla informatyków nie jest trudny — w następnych semestrach będziecie Państwo słuchali dużo trudniejszych wykładów. Mimo to co roku znaczna część studentów nie zdaje egzaminu z logiki.

Jednym z powodów niepowodzenia na egzaminie jest to, że jest to dla Was pierwszy w życiu wykład akademicki, w którym pojawia się duża liczba nowych pojęć. Pojęcia te, na ogół dosyć abstrakcyjne, pojawiają się licznie na każdych zajęciach. Trzeba się ich wszystkich nauczyć. Nauczyć — to mało, gdyż matematyka nie polega na wykonywaniu mniej lub bardziej skomplikowanych rachunków, lecz na przeprowadzaniu rozumowań. Dlatego jest bardzo ważne, byście nie tylko je znali, ale i dobrze rozumieli. Wykład ma Wam w tym pomóc, ale wielu z Was nie zdoła na samym wykładzie opanować całego materiału. Na wykładzie nie nauczycie się też sprawnie posługiwać wprowadzonymi pojęciami. Dlatego musicie systematycznie pracować w domu. Jeśli przed zajęciami przypomnicie sobie wcześniej wprowadzone definicje, zwiększycie swoje szanse na zrozumienie nowego materiału. Jeśli natomiast nie będziecie znać wcześniej wprowadzonych pojęć, będziecie z dużym prawdopodobieństwem siedzieć na wykładzie, jak na tureckim kazaniu. Jeżeli przyswojenie nowych pojęć sprawia Wam trudność, radzę także przed wykładem przejrzeć podane w przygotowanych przez nas notatkach definicje, które dopiero zostaną na zajęciach wprowadzone. Być może czytając je po raz pierwszy przed wykładem nie potraficie ich w pełni zrozumieć, ale gdy je wcześniej przeczytacie, wyniesiecie z wykładu znacznie więcej. Poza tym będziecie przed zajęciami wiedzieć, czego nie rozumiecie i o co na wykładzie zapytać.

Od wielu lat wszystkim studentom zaczynającym studia powtarzam to, co napisałem w poprzednim paragrafie. Niestety z marnym skutkiem. Co roku w drugiej połowie semestru okazuje się, że znaczna część studentów nie rozumie wykładu, bo nie pamięta wcześniej wprowadzonych definicji i nie zna treści udowodnionych wcześniej twierdzeń. Co roku mniej niż połowa studentów zdaje egzamin z logiki. Bardzo nas to martwi. Chcielibyśmy, aby znaczna większość z Was mogła ukończyć studia. Dlatego aby Was zdyscyplinować i zmusić do systematycznej pracy wprowadzamy opisane w regulaminie zajęć rygory (punktowy system zaliczania ćwiczeń, kartkówki, egzamin połówkowy itd.). Ich celem nie jest uprzykrzenie Wam życia, ale zwiększenie szansy na to, że zdacie egzamin.

Leszek Pacholski

Spis treści

A

Informacje ogólne

A.1. Program wykładu

Ponieważ przedmiot *Logika dla Informatyków* jest obowiązkowy, jego program jest ustalony w *Programie Studiów Informatycznych na Uniwersytecie Wrocławskim* z 17 czerwca 1997 z późniejszymi zmianami, dostępnym m. in. w sekretariacie Instytutu Informatyki, pok. 29 i — w wersji elektronicznej — pod adresem:

`http://www.ii.uni.wroc.pl/program/`

A.2. Zapisy na zajęcia

W zajęciach mogą uczestniczyć zarówno studenci studiów magisterskich, jak i licencjackich. Na zajęcia należy się zapisać w internetowym systemie *Zapisy*, dostępnym pod adresem `zapisy.ii.uni.wroc.pl`. Zadeklarowanie przedmiotu w systemie *Zapisy* jest formą umowy pomiędzy studentem i uczelnią. Student zobowiązuje się uczęszczać na zajęcia, uczelnia zaś zobowiązuje się je prowadzić i ocenić studenta po ich zakończeniu. Dlatego do egzaminu będą mogły przystąpić jedynie osoby zapisane na wykład, a zaliczenie ćwiczeń będą mogły uzyskać jedynie osoby zapisane na ćwiczenia.

Chociaż w systemie *Zapisy* prowadzący są dla porządku przypisani do poszczególnych grup ćwiczeniowych, jednak w kolejnych tygodniach mają zajęcia z różnymi grupami. Dlatego przy wyborze grupy nie należy się kierować nazwiskiem prowadzącego, gdyż każdy student będzie miał przeciętnie trzy ćwiczenia z każdym z prowadzących.

Jedna z grup ćwiczeniowych jest oznaczona jako *grupa zaawansowana*. Do tej grupy powinni się zapisać studenci o większych zdolnościach i aspiracjach matematycznych. Rozwiązuje się w niej nieco trudniejsze (ale i ciekawsze) zadania i wymaga od studentów nieco większej samodzielności. Przytoczone na następnych stronach *Zasady prowadzenia i zaliczania ćwiczeń* dotyczą jedynie grup podstawowych. Sposób zaliczania ćwiczeń w grupie zaawansowanej jest ogłaszany przez prowadzącego te ćwiczenia i nie jest opisany w niniejszych notatkach. Rotacja prowadzących nie obejmuje grupy zaawansowanej.

A.3. Obsada zajęć i konsultacje

Obsada zajęć dydaktycznych jest ogłoszona w *Terminarzu zajęć* na dany rok akademicki, dostępnym pod adresem

`http://www.ii.uni.wroc.pl/~pacholsk/logter.phtml`

Każdy student ma niepodważalne prawo do bezpośredniej rozmowy z prowadzącymi na temat zajęć, w których uczestniczy. Uważamy, że z takich spotkań, tj. *konsultacji*, studenci korzystają nawet zbyt mało. Serdecznie zapraszając na konsultacje mamy jednak prośbę, by przestrzegać ustalonych przez prowadzących zasad. Każdy pracownik dydaktyczny wyznacza dwie godziny w tygodniu, w czasie których jest do dyspozycji studentów. Poszczególni prowadzący ustalają także inne sposoby konsultacji. Pracownicy spędzają w Instytucie znacznie więcej czasu, niż podane dwie godziny, ale poza dydaktyką wykonują też wiele innych prac. Dlatego prosimy traktować ze zrozumieniem ogłoszenia typu „proszę studentów o nieprzychodzenie poza godzinami konsultacji”. Prośba o respektowanie podanych terminów dotyczy szczególnie spraw technicznych, takich jak reklamacje dotyczące rankingu, czy wpisy ocen do indeksów. Studentów zapisanych na przedmiot jest ponad stu, a prowadzący — jeden. Nie chcemy, żeby studenci odnieśli wrażenie, że prowadzący starają się od nich izolować. Chodzi tylko o to, by nasze kontakty z dużą liczbą studentów przebiegały sprawnie i nie dezorganizowały naszej pracy w Instytucie.

Godziny konsultacji można znaleźć m. in. w *Terminarzu zajęć* i na stronach domowych prowadzących.

Poza prowadzącymi wykład, repetytorium i ćwiczenia, zajęcia obsługuje także *sekretarz dydaktyczny*. Do jego zadań należy m. in. przygotowywanie rankingów ćwiczeń i wyliczanie ocen końcowych. Wszelkie problemy techniczne dotyczące punktacji za zadania, zadania domowe i kartkówki proszę wyjaśniać nie z prowadzącymi ćwiczenia, lecz bezpośrednio u sekretarza dydaktycznego w podanych przez niego terminach.

B

Literatura

Podstawowym podręcznikiem do wykładu jest skrypt:

1. Jerzy Tiuryn, *Wstęp do teorii mnogości i logiki*, który można zakupić w sekretariacie Instytutu, pok. 29 lub wypożyczyć w bibliotece Instytutu (10 egzemplarzy, sygnatury: S.3315, S.3316, S.3317, S.3318, S.3319, S.3320, S.3321, S.3322, S.3323, S.3324). Wersja elektroniczna jest dostępna pod adresem:

   `http://www.mimuw.edu.pl/~tiuryn/`

Spośród licznych podręczników dostępnych w bibliotekach i księgarniach warto wymienić:

2. Kazimierz Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa, 1982. Krótkie wprowadzenie do teorii mnogości. W bibliotece Instytutu jest 10 egzemplarzy, sygnatury: II 1310, II 1373, II 5874, II 4609, II 8355, S.3285, S.3382, S.3395, S.3410 oraz tłumaczenie angielskie: II 116.

3. Kazimierz Kuratowski, Andrzej Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa, 1978. Obszerny wykład teorii mnogości. W bibliotece Instytutu są dwa egzemplarze, sygnatury: II 286, II 8358.

4. Wiktor Marek, Janusz Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, Warszawa, 2000. Obszerny zbiór prostych, typowych zadań. W bibliotece Instytutu jest 12 egzemplarzy, sygnatury: II 2463, II 1180, II 6859, S.2752, II 8231, S.3156, S.3157, S.3158, S.3159, II 8334, S.3207, S.3208.

5. Helena Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, PWN, Warszawa, 1999. Klasyczny podręcznik podstaw logiki i teorii mnogości. W bibliotece Instytutu jest 14 egzemplarzy, sygnatury: S.2529, S.2687, I 7767, I 8144, S.3127, S.3128, S.3129, S.3164, S.3165, S.3166, S.3204, S.3205, S.3206, S.3242.

6. Kenneth A. Ross, Charles R. B. Wright, *Matematyka dyskretna*, PWN, Warszawa, 1986. Wbrew tytułowi książka zawiera sporo elementarnie wyłożonego materiału z logiki i teorii mnogości. W bibliotece Instytutu jest 16 egzemplarzy, sygnatury: S. 2936, S. 2937, S. 3301, S. 3302, S. 3303, S. 3304, S. 3305, S. 3338, S. 3339, II 7922, II 8535, II 8582, II 8890, II 8891, II 8954 i II 8955, oraz oryginał angielski (*Discrete Mathematics*, Prentice Hall, 1988): II 7074 i II 7133.

7. Jerzy Słupecki, Ludwik Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, PWN, Warszawa, 1963. W bibliotece Instytutu są trzy egzemplarze, sygnatury: S. 804, S. 3571 i S. 3572.

C

Zasady prowadzenia i zaliczania ćwiczeń

Poniższy regulamin dotyczy jedynie zajęć w grupach podstawowych i nie obejmuje grupy zaawansowanej.

C.1. Wstęp

Zasadniczym celem ćwiczeń z przedmiotu *Logika dla informatyków* jest ułatwienie studentom samodzielnej pracy nad opanowaniem materiału w czasie *całego semestru*. Ocena z ćwiczeń jest oceną jakości i intensywności pracy studenta w trakcie semestru, w odróżnieniu od egzaminu z przedmiotu *Logika dla informatyków*, który ocenia stan wiedzy studenta w chwili zakończenia semestru.

Wykładowca ogłasza z odpowiednim wyprzedzeniem numery zadań z niniejszego zbioru. Studenci rozwiązują podane zadania *samodzielnie w domu*. Jeżeli student ma wątpliwości i chciałby je skonsultować z prowadzącym, powinien to uczynić w czasie godzin konsultacji prowadzącego. Zakłada się przy tym, że studenci będą dążyć do pewnej samodzielności w pracy nad opanowaniem przedmiotu. Zachęca się także studentów do wspólnej nauki.

Podstawą do wystawienia oceny jest liczba zadań, które student rozwiązał w trakcie całego semestru i, pomijając wyjątkowe przypadki, ocena zależy w sposób liniowy od tej ilości. Prowadzący spotyka się ze studentami regularnie na ćwiczeniach, aby ustalić faktyczną liczbę zadań rozwiązanych przez każdego studenta. Dlatego pomimo iż na zajęciach powinna panować swobodna atmosfera, nie należy zapominać, że każde ćwiczenia są w istocie *sprawdzianem* wiedzy studentów. Prezentowanie rozwiązań na tablicy całej grupie studentów ma także walor dydaktyczny, pozwala bowiem osobom które nie poradziły sobie z zadaniem na poznanie jego wzorcowego rozwiązania (z określonych niżej zasad szczegółowych wynika, że rozwiązanie prezentują jedynie studenci dobrze przygotowani). Ocena studenta jest bezwzględna, tj. niezależna od osiągnięć innych uczestników zajęć.

Numery zadań obowiązujących na następny tydzień są ogłaszane na wykładzie. Są one także wymienione w *Terminarzu zajęć* na dany rok. Podczas całego semestru jest prowadzony ranking ćwiczeń zawierający zestawienie aktualnie zdobytej liczby punktów przez każdego studenta i prognozę oceny końcowej. Po zakończeniu semestru ranking zawiera ostateczne wyniki ćwiczeń. We wszelkich sprawach dotyczących liczby zdobytych punktów i zadań domowych studenci winni zgłaszać się do sekretarza dydaktycznego w czasie jego godzin konsultacji.

Na każde z około 13 zajęć zadaje się przeciętnie 8 zadań. W semestrze zadaje się więc do rozwiązania około stu zadań. Niniejsze notatki zawierają 822 zadania, a więc spory nadmiar. Zachęca się studentów do rozwiązywania także pozostałych zadań.

Data ogłoszenia ocen z ćwiczeń jest podana w *Terminarzu zajęć*. Tego samego dnia w podanych godzinach studenci winni przyjść do sekretarza dydaktycznego celem uzyskania wpisów do indeksów. W tym terminie będzie też można wyjaśniać wszelkie problemy dotyczące liczby zdobytych punktów z ćwiczeń. Wpisy zaliczeń do indeksów w innych terminach nie będą dokonywane.

Pierwsze ćwiczenia w semestrze nie są punktowane. Na zajęciach są rozwiązywane zadania z rozdziału 0 niniejszych notatek.

C.2. Szczegółowe zasady prowadzenia zajęć

1. Co najmniej na trzy dni (zwykle na tydzień) przed zajęciami jest ogłaszana (w trakcie wykładu, w gablocie w hallu, na stronie WWW wykładu itp.) lista numerów zadań z niniejszego zbioru. Na ćwiczeniach są rozwiązywane wybrane zadania z tej listy. Prowadzącemu pozostawia się decyzję odnośnie wyboru zadań do rozwiązania.

W roku akademickim 2004/5 będzie wdrażany elektroniczny system zgłaszania zadań. Decyzja o wyborze tego systemu lub powrocie do tradycyjnego sposobu deklarowania zadań zostanie podjęta w odpowiedniej chwili i ogłoszona na wykładzie. W zależności od tej decyzji będzie obowiązywał jeden z poniższych punktów 2a lub 2b.

2a. Przed rozpoczęciem zajęć student wypełnia kupon wpisując numery zadań z listy, które potrafi rozwiązać.[1] Kartka powinna być wypełniona czytelnie, zawierać datę, jednoznacznie wpisane numery zadań[2] oraz imię i nazwisko studenta. Bezpośrednio po wejściu do sali ćwiczeniowej prowadzący zajęcia zbiera kupony. *Gdy prowadzący przychodzi do sali ćwiczeniowej, kupony powinny być już wypełnione przez studentów tak, by mogły być natychmiast zebrane i by*

[1] Gotowe kupony można wyciąć z ostatnich stron niniejszej książeczki.

[2] Niedopuszczalne są sformułowania typu „pierwsza część zadania 7” itp. Zadanie jest niepodzielną całością a deklaracja studenta powinna być jednoznaczna: tak lub nie.

prowadzący nie musiał opóźniać rozpoczęcia zajęć oczekując na wypełnienie kuponów.

2b. Przed rozpoczęciem zajęć student łączy się przy pomocy przeglądarki internetowej z serwerem systemu deklaracji znajdującym się pod adresem

`http://www.ii.uni.wroc.pl/deklaracje/`

i wypełnia elektroniczny formularz zgłoszenia zadań. Na pięć minut przed rozpoczęciem zajęć przyjmowanie deklaracji zostaje wstrzymane, a prowadzący otrzymują wydruk wypełnionych kuponów.

3. Po rozpoczęciu zajęć dokonywanie jakichkolwiek zmian w treści złożonych deklaracji[3] jest niemożliwe.

4. Rozwiązanie danego zadania na tablicy przedstawia jedna z osób, wybrana przez prowadzącego, która zgłosiła gotowość rozwiązania tego zadania.[4] Prowadzący ma prawo przerwać osobie referującej w dowolnym momencie i poprosić inne osoby, które zgłosiły gotowość rozwiązania danego zadania, o kontynuowanie.[5]

5. Na każdych zajęciach student zdobywa liczbę punktów równą sumie wartości zadań, które zgłosił do rozwiązania z listy przewidzianej na dane zajęcia, z wyjątkiem przypadków opisanych w punktach 8 i 9.

6. W ciągu semestru student ma obowiązek dostarczyć rozwiązania dwóch zadań domowych. Na każdych zajęciach prowadzący wyznaczają po około trzy osoby w każdej grupie ćwiczeniowej. Te osoby mają obowiązek przynieść na następne ćwiczenia pracę pisemną, napisaną czytelnie na arkuszu papieru formatu A4 lub wydrukowaną na komputerze. Zadania domowe mają rozwinąć u studentów zdolność jasnego, precyzyjnego i czytelnego redagowania rozwiązań zadań. Za pracę można otrzymać od 0 do 5 punktów. Oceniona praca jest zwracana autorom w kolejnym tygodniu. Zadania sprawdza sekretarz dydaktyczny.

---

[3] Np. prośby o wycofanie lub dopisanie jakiegoś zadania.

[4] Niniejsze regulacje nie ustalają sposobu wyboru tej osoby. Może on być dokonany losowo. Prowadzący może też np. częściej wybierać osoby, które w przeszłości nie poradziły sobie, mimo zadeklarowanej chęci, z rozwiązaniem zadania na tablicy. Może również przedstawić rozwiązanie tego zadania samodzielnie albo pozostawić to rozwiązanie ochotnikowi.

[5] Niniejsze regulacje nie precyzują postępowania w sytuacji, gdy następna osoba stwierdzi, że jej sposób rozumowania jest zupełnie inny. Może wówczas rozpocząć referowanie rozwiązania od początku. Decyzja należy do prowadzącego.

punkty	ocena
$-\infty \div 74$	ndst
$75 \div 87$	dst
$88 \div 100$	dst+
$101 \div 113$	db
$114 \div 126$	db+
$127 \div +\infty$	bdb

Tablica C.1. Sposób przeliczania liczby punktów na ocenę z ćwiczeń

7. Student powinien znać definicje wprowadzanych na wykładzie pojęć i sformułowania podstawowych twierdzeń. Oczekujemy, że przed każdym wykładem i każdymi ćwiczeniami studenci będą przypominać sobie wcześniej poznany materiał. Aby ułatwić studentom systematyczne powtarzanie wcześniej poznanego materiału, ćwiczenia mogą rozpoczynać się od bardzo prostej kartkówki sprawdzającej znajomość pojęć wprowadzanych na wykładzie oraz podstawowych faktów (według niniejszych notatek do wykładu). Za znajomość definicji i podstawowych twierdzeń — czyli za poprawną odpowiedź na wszystkie pytania zadane w kartkówce — student otrzymuje 10 punktów. W semestrze odbędzie się około czterech kartkówek.

8. Jeżeli podczas przedstawiania rozwiązania na tablicy okaże się, że student popełnił błąd (np. przeoczył trudność lub źle zrozumiał treść zadania) i nie jest w stanie rozwiązać poprawnie tego zadania, nie otrzymuje punktów za to zadanie i dodatkowo traci dwa razy tyle punktów, ile można było zdobyć za jego poprawne rozwiązanie.

9. Jeżeli okaże się, że student oświadczył nieprawdę i nie umie w ogóle rozwiązać zadania lub nawet nie rozumie jego treści, traci wszystkie punkty zdobyte danego dnia oraz dodatkowo 10 punktów.[6] W ten sam sposób jest traktowany student, który nie przyniósł pracy domowej, opisanej w punkcie 6.

10. Liczba punktów uzyskana przez studenta w ciągu całego semestru jest sumą liczby punktów zadeklarowanych na ćwiczeniach (wraz z otrzymanymi punktami karnymi), punktów za zadania domowe i punktów z kartkówek. Ocena końcowa z zajęć jest wystawiana na podstawie tej liczby, według tablicy C.1.

[6] Z punktu widzenia interesów studenta okazuje się krytyczne rozróżnienie między tym punktem i poprzednim. Niestety, mimo jasnego sformułowania, chodzi tu o kwestię merytoryczną co do której podanie ścisłego algorytmu postępowania jest niemożliwe. Rozróżnienie to pozostaje do decyzji prowadzącego.

W ciągu semestru do rozwiązania zostaną przedstawione zadania o łącznej liczbie punktów nie mniejszej niż 104. Oznacza to, że łącznie z punktami za zadania domowe (10) i za kartkówki (40) można uzyskać co najmniej 154 punkty.

11. Ocena końcowa nie podlega poprawianiu po zakończeniu semestru. Nie ma kolokwiów poprawkowych.[7]

12. Studenci po zapisaniu się do grup ćwiczeniowych nie mogą ich zmieniać, mimo iż wszystkie zajęcia odbywają się w tym samym czasie.

13. Podczas referowania zadań przy tablicy student nie może mieć przy sobie notatek.

[7] Student powinien mieć świadomość, że zajęć można nie zaliczyć. W szczególności utrata punktów zgodnie z paragrafem 9 może jednoznacznie i nieodwołalnie skazać studenta na niezaliczenie zajęć i konieczność powtarzania przedmiotu w następnym roku lub skreślenie z listy studentów.

D

Egzaminy

Oceną, jaką student otrzymuje z przedmiotu, jest wynik egzaminu zasadniczego. W razie otrzymania oceny niedostatecznej student ma prawo przystąpić do egzaminu poprawkowego.

W razie przyłapania na ściąganiu podczas którejkolwiek części egzaminu student otrzymuje ocenę niedostateczną. Ocena ta jest ostateczna i nie podlega poprawianiu, a sprawa tego studenta jest kierowana do Dziekana.

Na egzamin należy przynieść przybory do pisania (pióro, długopis) i dowolny dokument ze zdjęciem w celu potwierdzenia tożsamości (dowód osobisty, paszport, legitymacja studencka, indeks itp). W trakcie egzaminu indeksy nie będą zbierane. Używanie notatek i własnego papieru jest niedozwolone. Wnoszenie toreb, wierzchnich okryć i wszelkich innych ruchomości na salę egzaminacyjną jest niedopuszczalne. Studenci powinni pozostawić je np. w szafkach w szatni. Strój odświętny na egzaminie nie jest wymagany.

Zarówno za egzamin zasadniczy (dwuczęściowy), jak i poprawkowy (jednoczęściowy) można otrzymać od -100 do 100 punktów. Jeżeli punktacja za zadanie egzaminacyjne wynosi n, znaczy to, że za rozwiązanie tego zadania można otrzymać od $-n$ do n punktów. Punkty ujemne będą przyznawane za umieszczenie w rozwiązaniu odpowiedzi kompromitująco fałszywych. Za brak rozwiązania zadania otrzymuje się 0 punktów. Liczba punktów możliwych do zdobycia na egzaminie może zostać zwiększona poprzez dodanie zadań bonusowych.

Do wyników egzaminu zasadniczego i poprawkowego dolicza się punkty bonusowe za zaliczenie ćwiczeń. Liczba punktów bonusowych jest częścią całkowitą ilorazu: $(C-75)/10$, gdzie C oznacza całkowitą liczbę punktów uzyskanych na zaliczenie ćwiczeń w semestrze bezpośrednio poprzedzającym egzamin. *Osobom, które zaliczyły ćwiczenia w poprzednich latach punktów bonusowych się nie dolicza. Studentom odbywającym ćwiczenia w grupie zaawansowanej punktów bonusowych się nie dolicza.* Punkty z egzaminu zasadniczego i poprawkowego przeliczają się na oceny zgodnie z tablicą D.2.

Terminy egzaminów, miejsca ich przeprowadzenia, przydział studentów do sal, terminy ogłoszenia wyników oraz miejsca i terminy konsultacji poegzaminacyjnych

punkty	ocena
$-100 \div 49$	ndst
$50 \div 59$	dst
$60 \div 69$	dst+
$70 \div 79$	db
$80 \div 89$	db+
$90 \div +\infty$	bdb

Tablica D.2. Sposób przeliczania liczby punktów na ocenę z egzaminu

są podane w *Terminarzu zajęć*. Wszelkie wątpliwości dotyczące sposobu oceniania egzaminu i otrzymanych ocen studenci powinni wyjaśniać w trakcie konsultacji poegzaminacyjnych. W czasie konsultacji po egzaminie końcowym i poprawkowym studenci winni zgłosić się z indeksami i kartami zaliczeń celem otrzymania wpisu oceny do indeksu. Wpisy do indeksów i konsultacje dotyczące wyników egzaminów w innych terminach nie będą dokonywane.

Treść zadań egzaminacyjnych oraz wyniki egzaminów są ogłaszane w *Terminarzu zajęć* po zakończeniu egzaminu.

D.1. Egzamin zasadniczy

Ocena z egzaminu zasadniczego jest wystawiana na podstawie sumy punktów z dwóch egzaminów — połówkowego i końcowego — i punktów bonusowych. Egzamin połówkowy odbywa się w połowie semestru, egzamin końcowy zaś w sesji zimowej. Na egzaminie połówkowym można zdobyć do 40 punktów, na egzaminie zasadniczym zaś 60 punktów. Zakres materiału na egzaminie połówkowym obejmuje zajęcia poprzedzające egzamin. Zakres materiału na egzaminie końcowym obejmuje cały semestr.

W razie nieobecności na egzaminie połówkowym lub końcowym spowodowanej chorobą student ma obowiązek dostarczyć egzaminatorowi (osobiście, pocztą lub przez osoby trzecie) zwolnienie lekarskie w ciągu trzech dni licząc od dnia egzaminu. Nieusprawiedliwiona w ten sposób nieobecność studenta na którejkolwiek części egzaminu zasadniczego jest równoznaczna z uzyskaniem zerowej liczby punktów z tego egzaminu. W szczególnych przypadkach decyzję o usprawiedliwieniu nieobecności na egzaminie może podjąć Dziekan.

D.1.1. Egzamin połówkowy

Wszyscy studenci zapisani na przedmiot *Logika dla Informatyków* mają obowiązek stawić się na ten egzamin.

W razie usprawiedliwionej nieobecności na egzaminie połówkowym całkowitą liczbę punktów z egzaminu zasadniczego oblicza się na podstawie wyników egzaminu końcowego, mnożąc liczbę zdobytych na nim punktów przez 10/6.

D.1.2. Egzamin końcowy

Do egzaminu końcowego mogą przystąpić jedynie osoby, które uzyskały zaliczenie ćwiczeń. Wszyscy studenci zapisani na przedmiot „Logika dla Informatyków”, którzy uzyskali zaliczenie ćwiczeń, mają obowiązek stawić się na ten egzamin.

W razie usprawiedliwionej nieobecności na egzaminie końcowym egzaminator ustali dla danej osoby inny termin egzaminu w sesji zimowej.

D.2. Egzamin poprawkowy

W razie otrzymania oceny niedostatecznej z egzaminu zasadniczego student przystępuje do egzaminu poprawkowego w sesji poprawkowej.

Nieobecność na egzaminie poprawkowym (niezależnie od przyczyn — usprawiedliwionych bądź nie) jest równoznaczna z uzyskaniem oceny niedostatecznej z tego egzaminu. Ocena z egzaminu poprawkowego nie podlega poprawianiu.

Notacja matematyczna

Matematycy używają liter pochodzących z różnych krojów pisma i różnych alfabetów. Poniżej są zebrane alfabety użyte w niniejszych notatkach.

Pismo łacińskie, gotyckie, blokowe i kaligraficzne

$$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ j\ k\ l\ m\ n\ o\ p\ q\ r\ s\ t\ u\ v\ w\ x\ y\ z$$
$$A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H\ I\ J\ K\ L\ M\ N\ O\ P\ Q\ R\ S\ T\ U\ V\ W\ X\ Y\ Z$$
$$\mathfrak{a}\ \mathfrak{b}\ \mathfrak{c}\ \mathfrak{d}\ \mathfrak{e}\ \mathfrak{f}\ \mathfrak{g}\ \mathfrak{h}\ \mathfrak{i}\ \mathfrak{j}\ \mathfrak{k}\ \mathfrak{l}\ \mathfrak{m}\ \mathfrak{n}\ \mathfrak{o}\ \mathfrak{p}\ \mathfrak{q}\ \mathfrak{r}\ \mathfrak{s}\ \mathfrak{t}\ \mathfrak{u}\ \mathfrak{v}\ \mathfrak{w}\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{y}\ \mathfrak{z}$$
$$\mathfrak{A}\ \mathfrak{B}\ \mathfrak{C}\ \mathfrak{D}\ \mathfrak{E}\ \mathfrak{F}\ \mathfrak{G}\ \mathfrak{H}\ \mathfrak{I}\ \mathfrak{J}\ \mathfrak{K}\ \mathfrak{L}\ \mathfrak{M}\ \mathfrak{N}\ \mathfrak{O}\ \mathfrak{P}\ \mathfrak{Q}\ \mathfrak{R}\ \mathfrak{S}\ \mathfrak{T}\ \mathfrak{U}\ \mathfrak{V}\ \mathfrak{W}\ \mathfrak{X}\ \mathfrak{Y}\ \mathfrak{Z}$$
$$\mathbb{A}\ \mathbb{B}\ \mathbb{C}\ \mathbb{D}\ \mathbb{E}\ \mathbb{F}\ \mathbb{G}\ \mathbb{H}\ \mathbb{I}\ \mathbb{J}\ \mathbb{K}\ \mathbb{L}\ \mathbb{M}\ \mathbb{N}\ \mathbb{O}\ \mathbb{P}\ \mathbb{Q}\ \mathbb{R}\ \mathbb{S}\ \mathbb{T}\ \mathbb{U}\ \mathbb{V}\ \mathbb{W}\ \mathbb{X}\ \mathbb{Y}\ \mathbb{Z}$$
$$\mathcal{A}\ \mathcal{B}\ \mathcal{C}\ \mathcal{D}\ \mathcal{E}\ \mathcal{F}\ \mathcal{G}\ \mathcal{H}\ \mathcal{I}\ \mathcal{J}\ \mathcal{K}\ \mathcal{L}\ \mathcal{M}\ \mathcal{N}\ \mathcal{O}\ \mathcal{P}\ \mathcal{Q}\ \mathcal{R}\ \mathcal{S}\ \mathcal{T}\ \mathcal{U}\ \mathcal{V}\ \mathcal{W}\ \mathcal{X}\ \mathcal{Y}\ \mathcal{Z}$$

Alfabet grecki

Niektóre małe litery greckie mają dwa warianty pisowni. Przeważnie używa się pierwszego z podanych.

A	α	alfa	I	ι	jota	P	ρ, ϱ	ro
B	β	beta	K	κ	kappa	Σ	σ, ς	sigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mi	Υ	υ	ypsilon
E	ϵ, ε	epsilon	N	ν	ni	Φ	ϕ, φ	fi
Z	ζ	dzeta	Ξ	ξ	ksi	X	χ	chi
H	η	eta	O	o	omikron	Ψ	ψ	psi
Θ	θ, ϑ	teta	Π	π, ϖ	pi	Ω	ω	omega

Alfabet hebrajski

Z alfabetu hebrajskiego używamy pierwszej litery $\aleph$, która nazywa się *alef*.

0

Zadania na dobry początek

Zadania z bieżącego rozdziału są rozwiązywane na pierwszych ćwiczeniach w semestrze. Zadań tych nie deklaruje się i nie są one punktowane.

Zadanie 1. Oto przykłady trzech wnioskowań przez indukcję:

1. *Pokażę, że wszystkie liczby naturalne są parzyste. Oczywiście* 0 *jest liczbą parzystą. Niech* n *będzie dowolną liczbą naturalną i załóżmy, że dla wszystkich* $k < n$, k *jest parzyste. Niech* n_1 *i* n_2 *będzie dowolnym rozbiciem liczby* n *na sumę liczb mniejszych (tzn.* $n = n_1 + n_2$*). Ponieważ* n_1 *oraz* n_2 *są mniejsze od* n, n_1 *i* n_2 *są parzyste, a więc* n *jest parzyste jako suma dwóch liczb parzystych.*

2. *Pokażę, że wszystkie dodatnie liczby naturalne są nieparzyste. Oczywiście* 1 *jest liczbą nieparzystą. Niech* n *będzie dowolną liczbą naturalną i załóżmy, że dla wszystkich* $k < n$, k *jest nieparzyste. Niech* 1, n_1 *i* n_2 *będzie dowolnym rozbiciem liczby* n *na sumę trzech liczb mniejszych (tzn.* $n = n_1 + n_2 + 1$*). Ponieważ* n_1 *oraz* n_2 *są mniejsze od* n, n_1 *i* n_2 *są nieparzyste, a więc* n *jest nieparzyste jako suma dwóch liczb nieparzystych i liczby* 1.

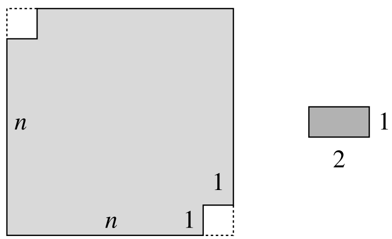
3. *Pokażę, że wszystkie proste na płaszczyźnie są równoległe. Rozważmy jednoelementowy zbiór prostych na płaszczyźnie. Oczywiście wszystkie proste należące do tego zbioru są do siebie równoległe. Załóżmy, że w każdym* n*-elementowym zbiorze prostych wszystkie proste są do siebie równoległe. Rozważmy teraz* $n + 1$*-elementowy zbiór prostych. Ustalmy w nim jedną prostą* p*. Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie pozostałe* n *prostych jest do siebie równoległe. Ustalmy teraz inną prostą* q*. Na mocy założenia indukcyjnego wszystkie pozostałe* n *prostych jest również do siebie równoległe. Ponieważ relacja równoległości prostych jest przechodnia, wszystkie* $n+1$ *prostych jest równoległe. Na mocy zasady indukcji matematycznej każdy zbiór prostych na płaszczyźnie zawiera wyłącznie proste równoległe. W szczególności dotyczy to zbioru wszystkich prostych na płaszczyźnie.*

Które z tych rozumowań jest poprawne? Wskaż błędy popełnione w błędnych rozumowaniach.

Zadanie to zostało tu zamieszczone po to, by pokazać, że matematyka jest *nauką ścisłą*. Nie ma dowodów „prawie dobrych”. Nawet najdrobniejsza luka w rozumowaniu powoduje, że staje się ono bezwartościowe. Uprawiając matematykę musimy wypowiadać się bardzo jasno i precyzyjnie, i zwracać baczną uwagę, czy nasze rozumowania nie zawierają ukrytych błędów. Większość zadań w niniejszym zbiorze zawiera *prawdziwe* twierdzenia. Dlatego błędy w dowodach tych twierdzeń nie prowadzą do tak spektakularnych głupstw, jak w tym zadaniu. Nie oznacza to jednak, że możemy przedstawiać fałszywe dowody tych twierdzeń. Takie dowody są bowiem równie złe i bezużyteczne, jak fałszywe dowody fałszywych twierdzeń!

Celem kolejnych zadań jest zwrócenie uwagi na fakt, że matematyka jest sztuką przeprowadzania rozumowań a nie wykonywania rachunków. Wrażenie, że zadania te są mniej „matematyczne” niż np. ćwiczenia polegające na wyznaczeniu całki nieoznaczonej jest zupełnie błędne. Przeciwnie, sposób ich rozwiązywania ma więcej wspólnego z metodami pracy matematyków niż sposoby rozwiązywania zadań rachunkowych.

Zadanie 2. Rozważmy kwadrat o boku n, gdzie $n \geq 3$, z którego usunięto dwa naprzeciwległe narożniki o wymiarach 1×1, jak na poniższym rysunku:



Dla jakich n można tak otrzymaną figurę pokryć prostokątami o wymiarach 1×2? (Prostokąty można obracać.)

Zadanie 3. Jest rok 2036. Zbliża się otwarcie nowego odcinka autostrady A3654, wysłano więc robotników drogowych, by ustawili znaki przy każdym z sześciu wyjazdów z autostrady na 50-kilometrowym odcinku biegnącym na południe z Kurozwęk do Szczekocina, w tym przy wyjeździe do Męcikału. Przy każdym wyjeździe robotnicy mają ustawić znak odległości do Szczekocina, znak z numerem drogi przecinającej autostradę przy danym wyjeździe (w tym znak z numerem drogi 197), znak z nazwą miasta, do którego można dojechać wybierając dany wyjazd i znak oznaczający usługi lub ciekawe miejsca znajdujące się przy danym wyjeździe. Nieszczęśliwie dla robotników projektant drogi, będąc amatorem łamigłówek, przygotował instrukcję rozstawienia znaków w postaci zagadki logicznej zamieszczonej poniżej.

Robotnicy są bezradni. Czy mógłbyś im pomóc ustawić po cztery znaki przy każdym z sześciu wyjazdów z autostrady[1]?

1. Wyjazd do Strzebielina jest 20 kilometrów dalej od Szczekocina niż wyjazd, przy którym można kupić jedzenie.
2. Wyjazd do Leszczydołu jest dwa razy dalej na północ od Szczekocina niż wyjazd do parku narodowego.
3. Znak „noclegi” nie jest ustawiony razem z kierunkowskazem do drogi 88.
4. Wyjazd do Bordziłówki jest 20 kilometrów bliżej Szczekocina niż wyjazd do drogi 770.
5. Wyjazd do Pieścirogów znajduje się 5 kilometrów na południe od wyjazdu ze stacją benzynową.
6. Nie, znak „ciekawe widoki” nie znajduje się przy wyjeździe do Strzebielina.
7. Wyjazd do drogi 56 znajduje się 20 kilometrów na południe od wyjazdu do Krzczonowa.
8. Znak „park narodowy” i kierunkowskaz do Bordziłówki znajdują się przy różnych wyjazdach.
9. Wyjazd do drogi 29 znajduje się 5 kilometrów dalej od Szczekocina niż wyjazd na kemping.
10. Pierwszy wyjazd znajduje się 10 kilometrów na południe od Kurozwęk, ostatni zaś — szósty — 5 kilometrów na północ od Szczekocina.
11. Wyjazd do drogi 213, który nie jest wyjazdem do Leszczydołu, nie stoi razem ze znakiem „noclegi”.
12. Ani Strzebielin, ani Leszczydół nie znajdują się przy drodze 770.
13. Bordziłówka nie znajduje się przy drodze 56.

Zadanie 4. Oto fragment raportu policji sporządzony przez młodego aspiranta:

> *Świadek nie był zastraszony lub też, jeśli Henry popełnił samobójstwo, to testament odnaleziono. Jeśli świadek był zastraszony, to Henry nie popełnił samobójstwa. Jeśli testament odnaleziono, to Henry popełnił samobójstwo. Jeśli Henry nie popełnił samobójstwa, to testament odnaleziono.*

Co komendant policji może wywnioskować z powyższego raportu (poza oczywistym faktem, że należy zwolnić aspiranta)? Odpowiedz na pytania: *Czy świadek był zastraszony? Czy Henry popełnił samobójstwo? Czy testament odnaleziono?*

[1] Ta zagadka jest spolszczoną wersją łamigłówki Randalla L. Whipkey'a pochodzącej ze strony `www.crpuzzles.com`. Nazwy miejscowości wybrano ze skorowidza „Atlasu samochodowego Polski”.

Rozumowania, które przeprowadzamy, są często tak subtelne i skomplikowane, że musimy używać sformalizowanego języka, by móc przedstawić nasze idee dostatecznie precyzyjnie. Symboliki matematycznej nie należy nadużywać, jednak sprawne posługiwanie się notacją matematyczną jest niezbędną umiejętnością. Trzy kolejne zadania dotyczą właśnie tego zagadnienia.

Zadanie 5. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *ciągła*, jeśli

$$\forall x_0{\in}\mathbb{R}\ \forall \epsilon{>}0\ \exists \delta{>}0\ \forall x{\in}\mathbb{R}\ \big(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\big).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „funkcja f nie jest ciągła."

Zadanie 6. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą* (w sensie Cauchy'ego) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \epsilon{>}0\ \exists \delta{>}0\ \forall x{\in}\mathbb{R}\ \big(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon\big).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0."

Zadanie 7. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą* (w sensie Heinego) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie y, jeśli

$$\forall x{\in}\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \big((\lim_{n\to\infty} x_n = y \wedge \forall n{\in}\mathbb{N}\ x_n \neq y) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = g\big).$$

Nie używając znaku negacji zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie y."

1

Rachunek zdań i rachunek kwantyfikatorów

1.1. Składnia rachunku zdań

Definicja 1. *Formuły rachunku zdań* budujemy ze *zmiennych zdaniowych* i *spójników logicznych* (*funktorów zdaniotwórczych*): fałszu $\bot$, prawdy $\top$, negacji $\neg$, koniunkcji $\wedge$, alternatywy $\vee$, implikacji $\Rightarrow$ i równoważności $\Leftrightarrow$ w następujący sposób:

1. Symbole $\bot$ i $\top$ są formułami rachunku zdań.
2. Każda zmienna zdaniowa jest formułą rachunku zdań.
3. Jeżeli ϕ, ϕ_1 i ϕ_2 są formułami rachunku zdań, to są nimi także: $(\neg\phi)$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ i $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$.
4. Wszystkie formuły rachunku zdań można zbudować przy pomocy reguł opisanych w punktach 1–3.

Zmienne zdaniowe będziemy oznaczać literami: p, q, r, s itd., często z indeksami: p_1, p_2 itd. Formuły zdaniowe będziemy oznaczać literami: ϕ, ψ, ρ itd., często również z indeksami: ϕ_1, ϕ_2 itd. Dla większej czytelności będziemy w formułach opuszczać nawiasy, zakładając następującą kolejność wiązania (od najsilniejszego do najsłabszego): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i przyjmując, że $\wedge$, $\vee$ i $\Leftrightarrow$ łączą w lewo, tj. np. $p \vee r \vee s$ znaczy $(p \vee r) \vee s$, zaś $\Rightarrow$ — w prawo, tj. np. $p \Rightarrow r \Rightarrow s$ znaczy $p \Rightarrow (r \Rightarrow s)$. Zatem np. $p \vee q \vee r \wedge s$ oznacza $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$.

1.2. Wartości logiczne i znaczenie formuł zdaniowych

Definicja 2. Zbiór *wartości logicznych* $\mathcal{B} = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ zawiera dwa elementy: T (prawda) i F (fałsz).[1] Niech V oznacza zbiór zmiennych zdaniowych. *Wartościowanie zmiennych*, to odwzorowanie $\sigma : V \to \mathcal{B}$. Nadaje ono wartości logiczne zmiennym zdaniowym.

[1] Oznaczenia pochodzą od angielskich słów *true* i *false*.

$\bot$
F

$\top$
T

ϕ	$\neg\phi$
F	T
T	F

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

ϕ	ψ	$\phi \Rightarrow \psi$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

ϕ	ψ	$\phi \Leftrightarrow \psi$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Rysunek 1. Znaczenie spójników logicznych

Wartość logiczna dowolnej formuły zdaniowej zależy jedynie od wartościowania występujących w niej zmiennych i można ją wyznaczyć korzystając z tabelek z rysunku 1. Dlatego mówimy, że wartościowanie zmiennych nadaje wartość logiczną formułom. Formalnie, wartościowanie zmiennych σ wyznacza *wartościowanie formuł* $\hat{\sigma}$, które przypisuje wartości logiczne dowolnym formułom w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
\hat{\sigma}(\bot) &= \mathsf{F} \\
\hat{\sigma}(\top) &= \mathsf{T} \\
\hat{\sigma}(p) &= \sigma(p) \\
\hat{\sigma}(\neg\phi) &= \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi) = \mathsf{F} \\ \mathsf{F}, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi) = \mathsf{T} \end{cases} \\
\hat{\sigma}(\phi_1 \wedge \phi_2) &= \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = \mathsf{T} \text{ i } \hat{\sigma}(\phi_2) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F}, & \text{w p.p.} \end{cases} \\
\hat{\sigma}(\phi_1 \vee \phi_2) &= \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = \mathsf{T} \text{ lub } \hat{\sigma}(\phi_2) = \mathsf{T} \\ \mathsf{F}, & \text{w p.p.} \end{cases} \\
\hat{\sigma}(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) &= \begin{cases} \mathsf{F}, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = \mathsf{T} \text{ i } \hat{\sigma}(\phi_2) = \mathsf{F} \\ \mathsf{T}, & \text{w p.p.} \end{cases} \\
\hat{\sigma}(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2) &= \begin{cases} \mathsf{T}, & \text{gdy } \hat{\sigma}(\phi_1) = \hat{\sigma}(\phi_2) \\ \mathsf{F}, & \text{w p.p.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Wartość logiczną $\hat{\sigma}(\phi) \in \mathcal{B}$ nazywamy *wartością logiczną formuły ϕ przy wartościowaniu σ*. Ponieważ dla danego wartościowania zmiennych wartościowanie formuł jest określone jednoznacznie, znak ˆ będziemy opuszczać i zarówno wartościowanie zmiennych, jak i wartościowanie formuł będziemy oznaczać tym samym symbolem i nazywać po prostu *wartościowaniem*.

Definicja 3. Formuła jest:

- *spełniona* przy danym wartościowaniu zmiennych, jeżeli przy tym wartościowaniu ma ona wartość T;
- *spełnialna*, jeżeli istnieje wartościowanie zmiennych, dla którego ta formuła jest spełniona;
- *prawdziwa* (jest *tautologią*), jeśli jest spełniona dla każdego wartościowania zmiennych;
- *sprzeczna*, jeśli nie jest spełniona (ma wartość F) dla żadnego wartościowania zmiennych.

O formule spełnionej przy danym wartościowaniu zmiennych będziemy niekiedy mówić, że jest *prawdziwa* przy tym wartościowaniu. W analogicznej sytuacji, gdy formuła nie jest spełniona, będziemy ją nazywać *fałszywą* przy tym wartościowaniu.

Obecnie zajmiemy się sposobami sprawdzania, czy dana formuła jest tautologią.

1.2.1. Metoda zero-jedynkowa

Przykładami tautologii są formuły $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ oraz $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ zwane *prawami de Morgana*. Aby się o tym przekonać rysujemy tabelkę (rysunek 2) umieszczając w kolumnach 1 i 2 wartości zmiennych zdaniowych p i q. W kolumnie 3 umieszczamy wartości formuły $p \vee q$ wyliczone z użyciem tabelki dla alternatywy. W kolumnie 4 obliczamy, w oparciu o tabelkę negacji, wartości formuły $\neg(p \vee q)$. Kolumny 5 i 6 wyznaczamy również w oparciu o tabelkę negacji. Aby wyznaczyć wartości formuły $(\neg p) \wedge (\neg q)$ korzystamy z wartości zapisanych w kolumnach 5 i 6 i z tabelki koniunkcji. Ostatnią, ósmą kolumnę wyznaczamy przy użyciu tabelki dla równoważności z wartości logicznych zapisanych w kolumnach 4 i 7. Po skonstruowaniu tabelki zauważamy, że dla każdego z czterech możliwych wartościowań zmiennych p i q formuła $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ ma wartość logiczną T, jest więc tautologią.

1.2.2. Skrócona metoda zerojedynkowa

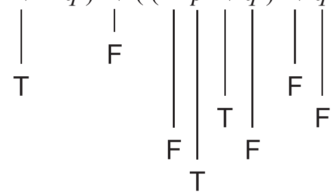
Sprawdzenie czy formuła jest tautologią można znacznie przyspieszyć, jeśli zamiast bezmyślnie sprawdzać wartość formuły dla wszystkich możliwych wartościowań zmiennych, będziemy świadomie poszukiwać wartościowania, dla którego formuła nie jest spełniona. Ustalenie takiego wartościowania przekona nas, że formuła nie jest tautologią, dojście do sprzeczności zaś — że nią jest. Rozważmy dla ustalenia uwagi formułę $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$. Formuła ta nie jest spełniona,

$$\phi = \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	ϕ
F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	F	T

Rysunek 2. Tabelkowa metoda sprawdzenia, że formuła ϕ jest tautologią

$$\phi = (\neg\, p \Rightarrow \neg\, q\,) \Rightarrow ((\neg\, p \Rightarrow q\,) \Rightarrow q\,)$$



Rysunek 3. Wartościowanie, dla którego formuła ϕ nie jest spełniona

jeśli poprzednik implikacji $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest prawdziwy przy pewnym wartościowaniu, jej następnik $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ zaś fałszywy przy tym wartościowaniu. Formuła $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ jest fałszywa tylko wówczas, gdy $\neg p \Rightarrow q$ jest spełniona oraz $\sigma(q) = \mathsf{F}$. Ale $\neg p \Rightarrow q$ jest spełniona dla $\sigma(q) = \mathsf{F}$ tylko wówczas, gdy $\neg p$ nie jest spełniona, tj. gdy $\sigma(p) = \mathsf{T}$. Zauważamy na koniec, że przy wartościowaniu $\sigma(p) = \mathsf{T}$ i $\sigma(q) = \mathsf{F}$ nasza wyjściowa formuła istotnie nie jest spełniona, nie jest więc tautologią (rysunek 3).

Rozważmy teraz formułę $\phi = p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$. Aby ϕ nie była spełniona, musi być $\sigma(p) = \mathsf{T}$ oraz powinna nie być spełniona formuła $q \Rightarrow p$. Formuła ostatnia nie jest spełniona tylko wówczas, gdy $\sigma(q) = \mathsf{T}$ oraz $\sigma(p) = \mathsf{F}$. Zatem aby ϕ nie była spełniona, musiałoby być jednocześnie $\phi(p) = \mathsf{T}$ i $\phi(p) = \mathsf{F}$, co jest niemożliwe. Formuła ϕ jest zatem tautologią (rysunek 4).

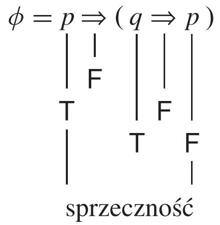
Przykład 4. Przykładami tautologii są

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$
$$(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p)$$

W zadaniach 8–26 udowodnij, że podane formuły są tautologiami.

Zadanie 8 (modus ponens). $(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Zadanie 9 (modus tollens). $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$



Rysunek 4. Ilustracja dowodu nie wprost, iż formuła ϕ jest tautologią

Zadanie 10 (prawo kompozycji). $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$

Zadanie 11 (prawo kompozycji). $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow q \Rightarrow r$

Zadanie 12 (prawo symplifikacji). $p \wedge q \Rightarrow p$

Zadanie 13 (prawo symplifikacji). $q \Rightarrow p \vee q$

Zadanie 14 (prawo symplifikacji). $p \Rightarrow q \Rightarrow p$

Zadanie 15 (prawo Dunsa Szkota). $\neg p \Rightarrow p \Rightarrow q$

Zadanie 16 (prawo dylematu konstrukcyjnego). $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q) \Rightarrow r$

Zadanie 17 (prawo eksportacji). $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow q \Rightarrow r$

Zadanie 18 (prawo importacji). $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r$

Zadanie 19 (prawo redukcji do absurdu). $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$

Zadanie 20 (prawo sprzeczności). $\neg(p \wedge \neg p)$

Zadanie 21 (prawo wyłączonego środka). $p \vee \neg p$

Zadanie 22 (prawo sylogizmu hipotetycznego). $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Rightarrow p \Rightarrow r$

Zadanie 23 (prawo Pierce'a). $((p \Rightarrow q) \Rightarrow p) \Rightarrow p$

Zadanie 24 (Prawo Claviusa). $(\neg p \Rightarrow p) \Rightarrow p$

Zadanie 25 (Prawo Claviusa). $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$

Zadanie 26 (prawo tożsamości). $p \Leftrightarrow p$

Powyższe tautologie były od dawna badane przez logików, gdyż opisują typowe schematy przeprowadzania rozumowań. Ich zwyczajowe nazwy podano w nawiasach.

W zadaniach 27–62 sprawdź, które z podanych formuł są (a) tautologiami, (b) formułami spełnialnymi, (c) formułami sprzecznymi.

Zadanie 27. $p \vee q \vee r \Rightarrow \neg p \Rightarrow (q \vee r) \wedge \neg p$

Zadanie 28. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge q \Leftrightarrow p)$

Zadanie 29. $(p \vee q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)$

Zadanie 30. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow p \wedge s \Rightarrow q \vee r$

Zadanie 31. $p \vee q \vee r \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q)$

Zadanie 32. $((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q) \Rightarrow p \vee q \vee r$

Zadanie 33. $(p \vee q \Leftrightarrow r \vee s) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s))$

Zadanie 34. $(p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s) \Rightarrow (p \vee q \Leftrightarrow r \vee s)$

Zadanie 35. $(p \wedge q \Leftrightarrow r \wedge s) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \wedge (q \Leftrightarrow s))$

Zadanie 36. $(p \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$

Zadanie 37. $(p \vee q) \wedge \neg p \Rightarrow q$

Zadanie 38. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge r \Rightarrow q$

Zadanie 39. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow q \vee r$

Zadanie 40. $p \Rightarrow \neg p \vee q$

Zadanie 41. $(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Rightarrow p$

Zadanie 42. $\neg(p \wedge (\neg p \wedge q))$

Zadanie 43. $p \Rightarrow \neg q \wedge q \Rightarrow r$

Zadanie 44. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow p \vee q$

Zadanie 45. $(p \vee q \Rightarrow p \vee \neg q) \Rightarrow \neg p \vee q$

Zadanie 46. $(p \wedge q) \vee (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \Rightarrow q$

Zadanie 47. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Zadanie 48. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow p \vee r \Rightarrow q \vee s$

Zadanie 49. $(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$

Zadanie 50. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow p \wedge r \Rightarrow q \wedge s$

Zadanie 51. $(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \vee q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow p \wedge q \wedge r$

Zadanie 52. $\neg(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow p \wedge \neg q$

Zadanie 53. $((p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Rightarrow r) \Rightarrow (r \Rightarrow p) \Rightarrow q \Rightarrow p$

Zadanie 54. $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r) \vee (p \Rightarrow s) \Rightarrow p \Rightarrow q \vee r \vee s$

Zadanie 55. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge r \wedge s \Rightarrow q$

Zadanie 56. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge (s \Rightarrow q) \Rightarrow p \wedge r \wedge \neg s \Rightarrow q$

Zadanie 57. $(p \wedge q \Rightarrow r) \wedge (p \wedge q \Rightarrow \neg r) \Rightarrow \neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

Zadanie 58. $(\neg p \wedge q) \vee (p \vee \neg q) \Rightarrow (p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow p \Rightarrow r$

Zadanie 59. $(p \vee q) \wedge (r \vee s) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)) \wedge ((q \Rightarrow s) \vee (q \Rightarrow p))$

Zadanie 60. $(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (t \Rightarrow u) \Rightarrow p \wedge r \wedge t \Rightarrow q \wedge s \wedge u$

Zadanie 61. $(p \Leftrightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Zadanie 62. $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow p$

Zadanie 63. Niech symbole ϕ i ψ oznaczają formuły zdaniowe. Udowodnij poniższe stwierdzenia lub podaj przykłady świadczące o ich fałszywości:

1. Jeśli $\phi \Rightarrow \psi$ jest tautologią i ϕ jest tautologią, to ψ jest tautologią.
2. Jeśli $\phi \Rightarrow \psi$ jest spełnialna i ϕ jest spełnialna, to ψ jest spełnialna.
3. Jeśli $\phi \Rightarrow \psi$ jest tautologią i ϕ jest spełnialna, to ψ jest spełnialna.
4. Jeśli $\phi \Rightarrow \psi$ jest spełnialna i ϕ jest tautologią, to ψ jest spełnialna.

1.2.3. Równoważność formuł

Definicja 5. Mówimy, że formuły ϕ i ψ są *równoważne*, jeśli dla każdego wartościowania przyjmują tę samą wartość logiczną (tj. gdy formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią).

Przykład 6. Formuły $\neg(p \vee q)$ i $\neg p \wedge \neg q$ są równoważne.

Zadanie 64. Udowodnij, że a) dowolne dwie tautologie, b) dowolne dwie formuły sprzeczne są równoważne. Czy dowolne dwie formuły spełnialne są równoważne?

W zadaniach 65–79 udowodnij, że podane formuły są równoważne.

Zadanie 65 (prawo transpozycji prostej). $p \Rightarrow q$ oraz $\neg q \Rightarrow \neg p$

Zadanie 66 (prawo transpozycji złożonej). $p \wedge q \Rightarrow r$ oraz $p \wedge \neg r \Rightarrow \neg q$

Zadanie 67 (prawo pochłaniania). p oraz $p \vee (p \wedge q)$

Zadanie 68 (prawo pochłaniania). p oraz $p \wedge (p \vee q)$

Zadanie 69 (prawo podwójnego przeczenia). $\neg\neg p$ oraz p

Zadanie 70 (prawo negowania fałszu). $\neg\bot$ oraz $\top$

Zadanie 71 (prawo negowania prawdy). $\neg\top$ oraz $\bot$

Zadanie 72 (prawo de Morgana). $\neg(p \wedge q)$ oraz $\neg p \vee \neg q$

Zadanie 73 (prawo de Morgana). $\neg(p \vee q)$ oraz $\neg p \wedge \neg q$

Zadanie 74 (prawo negowania implikacji). $\neg(p \Rightarrow q)$ oraz $p \wedge \neg q$

Zadanie 75 (prawo negowania równoważności). $\neg(p \Leftrightarrow q)$ oraz $\neg p \Leftrightarrow q$

Zadanie 76 (prawo negowania równoważności). $\neg(p \Leftrightarrow q)$ oraz $p \Leftrightarrow \neg q$

Zadanie 77. $p \Rightarrow q$ oraz $\neg p \vee q$

Zadanie 78. $p \Leftrightarrow q$ oraz $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

Zadanie 79. $p \Leftrightarrow q$ oraz $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

Równoważność przedstawionych powyżej formuł jest od dawna znana logikom, wykorzystuje się ją bowiem przeprowadzając rozumowania. W nawiasach wymieniono zwyczajowe nazwy podanych praw.

W zadaniach 80–110 sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

Zadanie 80. $p \vee q \Rightarrow r$ oraz $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

Zadanie 81. $p \wedge q \Rightarrow r$ oraz $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

Zadanie 82. $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$ oraz $p \Rightarrow q \Rightarrow r$

Zadanie 83. $p \vee q$ oraz $q \vee p$

Zadanie 84. $p \wedge q$ oraz $q \wedge p$

Zadanie 85. $p \Rightarrow q$ oraz $q \Rightarrow p$

Zadanie 86. $p \Leftrightarrow q$ oraz $q \Leftrightarrow p$

Spójnik logiczny $\oplus$ jest *przemienny*, jeżeli formuły $p \oplus q$ i $q \oplus p$ są równoważne. W powyższych zadaniach sprawdza się więc, które spośród spójników logicznych są przemienne.

Zadanie 87. $p \vee (q \vee r)$ oraz $(p \vee q) \vee r$

Zadanie 88. $p \wedge (q \wedge r)$ oraz $(p \wedge q) \wedge r$

Zadanie 89. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ oraz $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$

Zadanie 90. $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r$

Spójnik logiczny $\oplus$ jest *łączny*, jeżeli formuły $p \oplus (q \oplus r)$ i $(p \oplus q) \oplus r$ są równoważne. W powyższych zadaniach sprawdza się więc, które spośród spójników logicznych są łączne.

Zadanie 91. $p \vee (q \vee r)$ oraz $q \vee (p \vee r)$

Zadanie 92. $p \wedge (q \wedge r)$ oraz $q \wedge (p \wedge r)$

Zadanie 93. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ oraz $q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Zadanie 94. $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ oraz $q \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Zadanie 95. $p \wedge (q \vee r)$ oraz $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Zadanie 96. $p \wedge (q \wedge r)$ oraz $(p \wedge q) \wedge (p \wedge r)$

Zadanie 97. $p \wedge (q \Rightarrow r)$ oraz $(p \wedge q) \Rightarrow (p \wedge r)$

Zadanie 98. $p \wedge (q \Leftrightarrow r)$ oraz $(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge r)$

Zadanie 99. $p \vee (q \vee r)$ oraz $(p \vee q) \vee (p \vee r)$

Zadanie 100. $p \vee (q \wedge r)$ oraz $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Zadanie 101. $p \vee (q \Rightarrow r)$ oraz $(p \vee q) \Rightarrow (p \vee r)$

Zadanie 102. $p \vee (q \Leftrightarrow r)$ oraz $(p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee r)$

Zadanie 103. $p \Rightarrow (q \vee r)$ oraz $(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)$

Zadanie 104. $p \Rightarrow (q \wedge r)$ oraz $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

Zadanie 105. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ oraz $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Zadanie 106. $p \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)$ oraz $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow r)$

Zadanie 107. $p \Leftrightarrow (q \vee r)$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$

Zadanie 108. $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \wedge (p \Leftrightarrow r)$

Zadanie 109. $p \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Zadanie 110. $p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$ oraz $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Spójnik logiczny $\oplus$ jest *lewostronnie rozdzielny* względem spójnika $\otimes$, jeżeli formuły $p \oplus (q \otimes r)$ i $(p \oplus q) \otimes (p \oplus r)$ są równoważne. W powyższych zadaniach sprawdza się więc, które spośród spójników logicznych są rozdzielne względem których.

Zadanie 111. Spójnik logiczny $\oplus$ jest *prawostronnie rozdzielny* względem spójnika $\otimes$, jeżeli formuły $(p \otimes q) \oplus r$ i $(p \oplus r) \otimes (q \oplus r)$ są równoważne. Które spośród spójników logicznych $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ są prawostronnie rozdzielne względem których?

1.2.4. Lemat o podstawianiu

Definicja 7. *Podstawieniem* formuły ψ w miejsce zmiennej zdaniowej p nazywamy przekształcenie, które formule ϕ przyporządkowuje formułę powstałą przez wstawienie formuły ψ w miejsce każdego wystąpienia zmiennej p w formule ϕ. Formalnie:

$$
\begin{array}{rcl}
p[p/\psi] & = & \psi \\
q[p/\psi] & = & q, \quad \text{dla } q \neq p \\
(\neg\phi)[p/\psi] & = & \neg(\phi[p/\psi]) \\
(\phi_1 \vee \phi_2)[p/\psi] & = & (\phi_1[p/\psi]) \vee (\phi_2[p/\psi]) \\
(\phi_1 \wedge \phi_2)[p/\psi] & = & (\phi_1[p/\psi]) \wedge (\phi_2[p/\psi]) \\
(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)[p/\psi] & = & (\phi_1[p/\psi]) \Rightarrow (\phi_2[p/\psi]) \\
(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)[p/\psi] & = & (\phi_1[p/\psi]) \Leftrightarrow (\phi_2[p/\psi])
\end{array}
$$

Przykład 8. $(p \Rightarrow p \vee q)[p/q \Rightarrow p] = (q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \vee q$.

W podobny sposób definiujemy jednoczesne podstawienie formuł w miejsce kilku zmiennych zdaniowych $[p_1/\psi_1, \ldots, p_n/\psi_n]$. Jest to odwzorowanie, które formule ϕ przyporządkowuje formułę powstałą przez wstawienie formuły ψ_i w miejsce każdego wystąpienia zmiennej p_i w formule ϕ, dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Lemat 9 (o podstawianiu). Jeżeli formuła ϕ jest tautologią, to dla dowolnej zmiennej p i dowolnej formuły ψ formuła $\phi[p/\psi]$ jest tautologią.

Powyższy lemat ma bardzo duże znaczenie praktyczne, pozwala bowiem dowodzić, że skomplikowane formuły są tautologiami. Dla przykładu formuła $(q \Rightarrow p) \Rightarrow (q \Rightarrow p) \vee q$ z przykładu 8 jest tautologią, gdyż jest wynikiem podstawienia formuły $q \Rightarrow p$ w miejsce zmiennej p w tautologii $p \Rightarrow p \vee q$.

W zadaniach 112–115 zbadaj, czy podane formuły są tautologiami.

Zadanie 112. $(s \wedge u \wedge t \wedge (p \vee q \vee r)) \Rightarrow (x \Rightarrow y \wedge \neg z) \Leftrightarrow$
$((p \vee q \vee r) \Rightarrow (s \wedge u \wedge t) \Rightarrow (x \Rightarrow y \wedge \neg z))$

Zadanie 113. $\neg((p \Rightarrow q \wedge (r \vee s \Leftrightarrow \neg p)) \wedge \neg((p \Rightarrow q \wedge (r \vee s \Leftrightarrow \neg p))))$

Zadanie 114. $(p \wedge \neg q) \wedge ((r \Rightarrow s) \vee (p \Rightarrow q \Rightarrow r \vee \neg s)) \Rightarrow \neg(q \vee \neg p)$

Zadanie 115. $((p \Rightarrow q \vee r) \vee s \vee t) \wedge \neg(p \Rightarrow q \vee r) \Rightarrow s \vee t$

Zadanie 116. Wskaż podstawienie $[p/\phi_1, q/\phi_2, r/\phi_3]$, dla którego formuła

$$(p \vee (q \wedge r))\ [p/\phi_1, q/\phi_2, r/\phi_3]$$

jest a) tautologią, b) formułą spełnialną, c) formułą sprzeczną.

1.3. Formalizacja rozumowań w języku rachunku zdań

Zadanie 117. Sformalizuj zadanie 3, tj. pokaż, jak znaleźć odpowiedzi na postawione w nim pytania korzystając z rachunku zdań.

Zadanie 118. Sformalizuj zadanie 4, tj. pokaż, jak znaleźć odpowiedzi na postawione w nim pytania korzystając z rachunku zdań.

Zadanie 119. Podczas pewnej kampanii wyborczej Olek, Józek i Kazik wygłosili następujące oświadczenia:

Olek: *Józek zawsze kłamie.*

Józek: *Kazik zawsze kłamie.*

Kazik: *Olek zawsze kłamie.*

Pokaż, że co najmniej dwóch spośród nich nie miało racji.

Zadanie 120. Podczas tej samej kampanii wyborczej Basia, Hania, Kasia i Ola stwierdziły, że:

Basia: *Hania zawsze kłamie.*

Hania: *Kasia czasem mówi prawdę.*

Kasia: *Ola czasem kłamie.*

Ola: *Basia zawsze mówi prawdę.*

Ile pań powiedziało prawdę?

Zadanie 121. Zbadaj zasadność poniższych rozumowań:

1. Jeśli stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to wzrosną wydatki rządowe lub pojawi się bezrobocie. Jeśli wydatki rządowe nie wrosną, to podatki zostaną obniżone. Jeśli podatki zostaną obniżone i stopa procentowa nie ulegnie zmianie, to bezrobocie się nie pojawi. Zatem wydatki rządowe wzrosną.
2. Jeśli ceny wzrosną, to spadnie popyt. Jeśli popyt spadnie, to spadną ceny. Zatem jeśli ceny wzrosną, to spadną. Zatem ceny spadną!

1.4. Własności formuł zdaniowych

Definicja 10. Napis $\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$ oznacza $\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, zaś $\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i$ oznacza $\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$.

Przyjmujemy przy tym, że $\bigwedge_{i=1}^{0} \phi_i$ oznacza $\top$, zaś $\bigvee_{i=1}^{0} \phi_i$ oznacza $\bot$.

Definicja 11. Niech V będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. *V-literałem* nazywamy formułę postaci p lub $\neg p$, gdzie $p \in V$. Jeżeli zbiór zmiennych zdaniowych jest ustalony, to formułę takiej postaci nazywamy po prostu *literałem*. Niekiedy do zbioru literałów zaliczamy też stałe logiczne $\top$ i $\bot$.

Zadanie 122. Dane są formuły $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_n$. Wykaż, że dla każdego n poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \big(\phi_i \Rightarrow \psi_i\big)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \phi_i\Big) \Rightarrow \Big(\bigvee_{i=1}^{n} \psi_i\Big)\Big).$$

Zadanie 123. Dane są formuły $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$. Wykaż, że dla każdego n poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\Big(\bigvee_{i=1}^{n} \big(\phi_i \Rightarrow \psi\big)\Big) \quad \Rightarrow \quad \Big(\Big(\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i\Big) \Rightarrow \psi\Big).$$

Zadanie 124. Czy istnieje taki nieskończony ciąg formuł $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ rachunku zdań, że wszystkie formuły $\phi_{i+1} \Rightarrow \phi_i$ są tautologiami rachunku zdań, zaś żadna z formuł $\phi_i \Rightarrow \phi_{i+1}$ nie jest tautologią?

Zadanie 125. Czy istnieje taki nieskończony ciąg formuł $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ rachunku zdań, że wszystkie formuły $\phi_i \Rightarrow \phi_{i+1}$ są tautologiami rachunku zdań, zaś żadna z formuł $\phi_{i+1} \Rightarrow \phi_i$ nie jest tautologią?

Zadanie 126. Udowodnij, że formuła rachunku zdań zbudowana wyłącznie ze zmiennych i spójnika równoważności „$\Leftrightarrow$" (oczywiście do jej zapisania można też używać nawiasów) jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda zmienna występuje w niej parzystą liczbę razy.

Zadanie 127. Udowodnij, że jeśli p jest zmienną zdaniową, a ϕ formułą rachunku zdań, taką, że $p \Rightarrow \phi$ i $\neg\phi \Rightarrow p$ są tautologiami, to ϕ jest tautologią.

Zadanie 128. Niech $\phi_1, \ldots, \phi_n$ będą formułami zdaniowymi, w których nie występują zmienne zdaniowe $p_1, \ldots, p_{n+1}$. Udowodnij, że formuła

$$\bigwedge_{i=1}^{n} \phi_i$$

jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest formuła

$$\neg p_1 \vee \bigvee_{i=1}^{n} (\phi_i \wedge p_i \wedge \neg p_{i+1}) \vee p_{n+1}.$$

Zadanie 129. Udowodnij, że jeżeli formuła ϕ jest tautologią, to dla dowolnych formuł $\psi_1, \ldots, \psi_n$ formuła

$$\psi_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \psi_n \Rightarrow \phi$$

jest tautologią.

Zadanie 130. Udowodnij, że jeżeli ϕ jest formułą sprzeczną, to dla dowolnych formuł $\psi_1, \ldots, \psi_n$ formuła

$$\phi \Rightarrow \psi_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \psi_n$$

jest tautologią.

Zadanie 131. Dla jakich $n \geq 1$ formuła

$$(\ldots((p \Rightarrow p) \Rightarrow p) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p,$$

w której zmienna p występuje n razy jest tautologią?

Zadanie 132. Niech p^0 oznacza $\neg p$ oraz niech p^1 oznacza p. Dla jakich ciągów $(i_1, \ldots, i_n) \in \{0, 1\}^n$ formuła

$$(\ldots((p^{i_1} \Rightarrow p^{i_2}) \Rightarrow p^{i_3}) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow p^{i_n}$$

jest tautologią?

Zadanie 133. Niech $p_1, \ldots, p_n$ będą wszystkimi zmiennymi zdaniowymi występującymi w formule ϕ. Udowodnij, że formuła ϕ jest spełnialna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podstawienie $[p_1/\phi_1, \ldots, p_n/\phi_n]$ takie, że formuła $\phi[p_1/\phi_1, \ldots, p_n/\phi_n]$ jest tautologią. Udowodnij, że formuła ϕ nie jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podstawienie $[p_1/\phi_1, \ldots, p_n/\phi_n]$ takie, że formuła $\phi[p_1/\phi_1, \ldots, p_n/\phi_n]$ jest sprzeczna.

Zadanie 134. Dane są formuły $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$. Czy formuły

$$(\ldots((\psi \Rightarrow \phi_1) \Rightarrow \phi_2) \Rightarrow \ldots) \Rightarrow \phi_n$$

oraz

$$\psi \Rightarrow (\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n)$$

są równoważne?

Zadanie 135. Dane są formuły $\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi$. Czy formuły

$$\phi_1 \Rightarrow (\phi_2 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (\phi_n \Rightarrow \psi) \ldots))$$

oraz

$$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \Rightarrow \psi$$

są równoważne?

Zadanie 136. Pokaż przez indukcję, że każda formuła ϕ zbudowana ze zmiennych p i q oraz spójnika $\Rightarrow$ jest równoważna dokładnie jednej z formuł z poniższego zbioru:

$$\{\top, p, q, (p \Rightarrow q), (q \Rightarrow p), (p \vee q)\}.$$

W poniższych zadaniach przyjmiemy następujące oznaczenia. Niech ϕ będzie formułą rachunku zdań zbudowaną wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\vee$ oraz $\wedge$ (oczywiście można używać nawiasów). Niech ϕ^d oznacza formułę powstałą z ϕ przez zastąpienie każdego wystąpienia spójnika $\vee$ spójnikiem $\wedge$, zaś każdego wystąpienia spójnika $\wedge$ spójnikiem $\vee$. Niech ϕ^n oznacza formułę powstałą przez zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej zdaniowej negacją tej zmiennej.

Zadanie 137. Udowodnij, że jeżeli formuły ϕ_1 i ϕ_2 są równoważne, to równoważne są także formuły ϕ_1^d i ϕ_2^d.

Zadanie 138. Udowodnij, że jeżeli formuły ϕ_1 i ϕ_2 są równoważne, to równoważne są także formuły ϕ_1^n i ϕ_2^n.

Zadanie 139. Udowodnij, że dla dowolnej formuły ϕ formuły $\neg\phi^d$ oraz ϕ^n są równoważne.

Zadanie 140. Wykaż, że dla każdej formuły spełnialnej ϕ ze zmiennymi ze zbioru $V = \{p, q, r\}$ istnieje formuła ψ postaci $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3$ taka, że każde ϕ_i jest V-literałem, ϕ_i są parami różne oraz $\psi \Rightarrow \phi$ jest tautologią.

Zadanie 141 (lemat interpolacyjny Craiga dla rachunku zdań). Niech $V(\phi)$ oznacza zbiór zmiennych zdaniowych występujących w formule ϕ. Przypuśćmy, że ϕ i ψ są takimi formułami rachunku zdań, że $\phi \Rightarrow \psi$ jest tautologią. Udowodnij, że istnieje formuła ρ, taka, że $\phi \Rightarrow \rho$ oraz $\rho \Rightarrow \psi$ są tautologiami i $V(\rho) \subseteq V(\phi) \cap V(\psi)$.

Zadanie 142 (o zamkniętym układzie twierdzeń). Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną. Przypuśćmy, że dla pewnego wartościowania są spełnione formuły:

$$\begin{aligned} p_1 \vee \ldots \vee p_n&, \\ p_i \Rightarrow q_i&, \qquad \text{dla } i = 1, \ldots, n, \\ \neg(q_i \wedge q_j)&, \qquad \text{dla } 1 \leq i < j \leq n. \end{aligned}$$

Udowodnij, że wartościowanie to spełnia także formuły

$$q_i \Rightarrow p_i, \quad \text{dla } i = 1, \ldots, n.$$

Przez *wartościowanie formuły* ϕ będziemy w poniższych zadaniach rozumieć odwzorowanie przyporządkowujące zmiennym *występującym w tej formule* wartości logiczne T i F. Formuła zawierająca n różnych zmiennych ma więc 2^n wartościowań.

Zadanie 143. Wykaż, że formuła $(\ldots((p_1 \Rightarrow p_2) \Rightarrow p_3) \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_{n-1}) \Rightarrow p_n$ jest fałszywa dla dokładnie

$$\frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

wartościowań tej formuły. Dla ilu wartościowań jest fałszywa formuła

$$p_n \Rightarrow (p_{n-1} \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \ldots \Rightarrow (p_2 \Rightarrow p_1)\ldots) \,?$$

Zadanie 144. Niech ϕ oraz ψ będą formułami rachunku zdań zbudowanymi wyłącznie ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\vee$ oraz $\wedge$ (oczywiście można używać nawiasów). Pokaż, że formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest spełniona przez co najmniej dwa wartościowania. Podaj przykład formuł ϕ i ψ takich, że formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest spełniona przez dokładnie dwa wartościowania.

1.5. Postaci normalne formuł zdaniowych

1.5.1. Usuwanie symbolu negacji

Formuły w których symbol negacji występuje przed formułą złożoną są często trudne do zrozumienia (wyrażenie „nie prawda, że liczba n dzieli się przez 2 lub przez 3” jest bardziej skomplikowane, niż równoważne mu wyrażenie „liczba n nie dzieli się przez 2 i nie dzieli się przez 3”). *Prawa negowania formuł zdaniowych* z zadań 69–76 pozwalają znaleźć dla danej formuły formułę jej równoważną, w której negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi. Istotnie, dla dowolnej formuły ϕ na mocy lematu o podstawianiu i prawa podwójnego przeczenia formuły $\neg\neg\phi$ oraz ϕ są równoważne. Na mocy lematu o podstawianiu i prawa de Morgana dla dowolnych formuł ϕ_1 i ϕ_2 formuły $\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)$ oraz $\neg\phi_1 \vee \neg\phi_2$ są równoważne. Podobnie postępujemy dla formuł dowolnej innej postaci. Możemy zatem zdefiniować odwzorowanie $\mathcal{T}$ przyporządkowujące dowolnym formułom formuły, w których negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathcal{T}(p) & = & p, \quad \text{dla } p \in V \\
\mathcal{T}(\bot) & = & \bot \\
\mathcal{T}(\top) & = & \top \\
\mathcal{T}(\phi_1 \vee \phi_2) & = & \mathcal{T}(\phi_1) \vee \mathcal{T}(\phi_2) \\
\mathcal{T}(\phi_1 \wedge \phi_2) & = & \mathcal{T}(\phi_1) \wedge \mathcal{T}(\phi_2) \\
\mathcal{T}(\phi_1 \Rightarrow \phi_2) & = & \mathcal{T}(\phi_1) \Rightarrow \mathcal{T}(\phi_2) \\
\mathcal{T}(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2) & = & \mathcal{T}(\phi_1) \Leftrightarrow \mathcal{T}(\phi_2) \\
\mathcal{T}(\neg p) & = & \neg p, \quad \text{dla } p \in V \\
\mathcal{T}(\neg\bot) & = & \top \\
\mathcal{T}(\neg\top) & = & \bot \\
\mathcal{T}(\neg(\phi_1 \vee \phi_2)) & = & \mathcal{T}(\neg\phi_1) \wedge \mathcal{T}(\neg\phi_2) \\
\mathcal{T}(\neg(\phi_1 \wedge \phi_2)) & = & \mathcal{T}(\neg\phi_1) \vee \mathcal{T}(\neg\phi_2) \\
\mathcal{T}(\neg(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)) & = & \mathcal{T}(\phi_1) \wedge \mathcal{T}(\neg\phi_2) \\
\mathcal{T}(\neg(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)) & = & \mathcal{T}(\neg\phi_1) \Leftrightarrow \mathcal{T}(\phi_2) \\
\mathcal{T}(\neg\neg\phi) & = & \mathcal{T}(\phi)
\end{array}
$$

Fakt 12. Dla dowolnej formuły ϕ, formuły ϕ oraz $\mathcal{T}(\phi)$ są równoważne i w formule $\mathcal{T}(\phi)$ negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi.

Zadanie 145–199. Zaneguj formuły z zadań 8–62 i — korzystając z praw negowania formuł logicznych — znajdź formuły im równoważne, w których negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi. (Zadanie nr i, dla $i = 145, \ldots, 199$, dotyczy formuły z zadania $i - 137$.)

Formuły, w których negacja występuje jedynie przed zmiennymi zdaniowymi możemy określić jako formuły zbudowane z literałów przy pomocy spójników logicznych alternatywy, koniunkcji, implikacji i równoważności. Zauważmy, że na mocy lematu o podstawianiu i zadań 77–79 każda formuła jest równoważna pewnej formule nie zawierającej spójników implikacji i równoważności. Możemy więc rozpatrywać formuły zbudowane z literałów jedynie przy pomocy spójników alternatywy i koniunkcji. Jeszcze węższe klasy formuł rozważamy w następnych paragrafach.

1.5.2. Dysjunkcyjna postać normalna

Definicja 13. Formuła ma *dysjunkcyjną postać normalną* (DNF, ang. *Disjunctive Normal Form*), jeśli ma postać

$$\bigvee_{i=1}^{n}\left(\bigwedge_{j=1}^{m_i} l_{ij}\right),$$

gdzie l_{ij} są literałami, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, m_i$. Mówiąc skrótowo, dysjunkcyjna postać normalna, to alternatywa koniunkcji literałów.

Zadanie 200. Udowodnij, że dla każdej formuły zdaniowej ϕ istnieje formuła ψ równoważna z ϕ i mająca dysjunkcyjną postać normalną.

Zadanie 201–255. Znajdź formuły mające dysjunkcyjną postać normalną równoważne formułom z zadań 8–62. (Zadanie nr i, dla $i = 201, \ldots, 255$, dotyczy formuły z zadania $i - 193$.)

Zadanie 256. Znajdź formuły zdaniowe ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 mające dysjunkcyjną postać normalną, zawierające zmienne p, q i r i spełnione dla podanych niżej wartościowań:

p	q	r	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3
T	T	T	T	F	F
T	T	F	F	F	F
T	F	T	T	T	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	F	F

1.5.3. Koniunkcyjna postać normalna

Definicja 14. *Klauzulą* nazywamy formułę postaci

$$\bigvee_{j=1}^{m} l_j,$$

gdzie l_j są literałami, dla $j = 1, \ldots, m$. Innymi słowy klauzula to alternatywa literałów.

Definicja 15. Formuła ma *koniunkcyjną postać normalną* (CNF, ang. *Conjunctive Normal Form*), jeśli ma postać

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{m_i} l_{ij}\right),$$

gdzie l_{ij} są literałami, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, m_i$, tj. gdy jest koniunkcją klauzul.

Zadanie 257. Udowodnij, że dla każdej formuły zdaniowej ϕ istnieje formuła ψ równoważna z ϕ i mająca koniunkcyjną postać normalną.

Zadanie 258–312. Znajdź formuły mające koniunkcyjną postać normalną równoważne formułom z zadań 8–62. (Zadanie nr i, dla $i = 258, \ldots, 312$, dotyczy formuły z zadania $i - 250$.)

Definicja 16. Formuła ma postać k-CNF, gdzie k jest liczbą naturalną, jeżeli ma postać

$$\bigwedge_{i=1}^{n}\left(\bigvee_{j=1}^{k} l_{ij}\right),$$

gdzie l_{ij} są literałami, dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $j = 1, \ldots, k$, tj. gdy jest koniunkcją klauzul zawierających po k literałów.

Zadanie 313. Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci 1-CNF.

Zadanie 314. Dla dowolnego $k \geq 1$ wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci k-CNF.

Definicja 17. Formuła ma postać CNF_j, gdzie j jest liczbą naturalną, jeżeli ma postać CNF i każda zmienna występuje w niej co najwyżej j razy. Formuła ma postać k-CNF_j, gdzie k i j są liczbami naturalnymi, jeżeli ma postać k-CNF i każda zmienna występuje w niej co najwyżej j razy.

Zadanie 315. Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci CNF_1.

Zadanie 316. Dla dowolnego $k \geq 1$ wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą postaci CNF_k.

Definicja 18. Literał l jest *pozytywny*, jeżeli $l = p$ dla pewnej zmiennej $p \in V$. Literał l jest *negatywny*, jeżeli $l = \neg p$ dla pewnej zmiennej $p \in V$.

Definicja 19. Operację negowania literału definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} \overline{p} &= \neg p, \\ \overline{\neg p} &= p, \end{aligned}$$

dla dowolnego $p \in V$.

Zadanie 317. Niech $C = \bigvee_{j=1}^{m} l_j$ będzie dowolną klauzulą i niech

$$\begin{aligned} P &= \{j \in \{1, \ldots, m\} \mid \text{literał } l_j \text{ jest pozytywny}\}, \\ N &= \{j \in \{1, \ldots, m\} \mid \text{literał } l_j \text{ jest negatywny}\} \end{aligned}$$

oraz

$$C' = \bigwedge_{j \in N} \overline{l_j} \Rightarrow \bigvee_{j \in P} l_j.$$

Udowodnij, że formuły C oraz C' są równoważne.

Na mocy powyższego zadania klauzule można zapisywać w postaci

$$\bigwedge_{j=1}^{m} p_j \Rightarrow \bigvee_{j=1}^{n} q_j,$$

gdzie p_j i q_j są zmiennymi zdaniowymi.

Definicja 20. Klauzula $\bigvee_{j=1}^{m} l_j$ jest *klauzulą hornowską*, jeżeli co najwyżej jeden spośród literałów $l_1, \ldots, l_m$ jest pozytywny. Formuła ma *postać hornowską*, jeżeli jest koniunkcją klauzul hornowskich.

Klauzule hornowskie można więc zapisać w postaci

$$\bigwedge_{j=1}^{m} p_j \Rightarrow q \quad \text{lub} \quad \bigwedge_{j=1}^{m} p_j \Rightarrow \bot,$$

gdzie p_j oraz q są zmiennymi zdaniowymi.

Zadanie 318. Wskaż przykład formuły, która nie jest równoważna z żadną formułą w postaci hornowskiej.

Zadanie 319–373. Które spośród formuł z zadań 8–62 można przedstawić w postaci hornowskiej? Tam, gdzie to możliwe, podaj tę postać. (Zadanie nr i, dla $i = 319, \ldots, 373$, dotyczy formuły z zadania $i - 311$.)

1.6. Funkcje boolowskie i zupełne zbiory spójników

Definicja 21. Funkcje $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$, gdzie $\mathcal{B} = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ i $n \geq 0$, nazywamy n-argumentowymi *funkcjami boolowskimi* lub *funkcjami logicznymi*.

Do tej pory zbiór spójników logicznych był ustalony ($\bot$, $\top$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$). Nic jednak nie stoi na przeszkodzie, by rozważać różne zestawy spójników i wprowadzać nowe spójniki. Z każdym spójnikiem związujemy jego *znaczenie* — funkcję boolowską określającą prawdziwość formuł zbudowanych przy użyciu tego spójnika. Tabelki funkcji boolowskich określających prawdziwość spójników $\bot$, $\top$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ zostały przedstawione na rysunku 1.

Definicja 22. Formuła ϕ zbudowana ze zmiennych $p_1, \ldots, p_n$ *opisuje* n-argumentową funkcję boolowską f, jeżeli dla każdego wartościowania σ zmiennych $p_1, \ldots, p_n$ zachodzi:

$$f(\sigma(p_1), \ldots, \sigma(p_n)) \quad = \quad \sigma(\phi).$$

Jeżeli formuła ϕ zbudowana ze zmiennych $p_1, \ldots, p_n$ opisuje funkcję f, to piszemy

$$f(p_1, \ldots, p_n) \quad \equiv \quad \phi.$$

Definicja 23. Zbiór spójników logicznych jest *zupełny*, jeżeli dowolną funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zdaniowej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne. Zbiór spójników jest *2-zupełny*, jeżeli każdą *co najwyżej dwuargumentową* funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zdaniowej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne.

Innymi słowy zbiór spójników jest zupełny (2-zupełny), jeśli każdą funkcję boolowską (każdą funkcję boolowską co najwyżej dwuargumentową) można przedstawić jako złożenie funkcji boolowskich określających znaczenie spójników z podanego zbioru.

Zadanie 374. Ile jest funkcji boolowskich n-argumentowych?

Zadanie 375. Pokaż, że $\{\vee, \wedge\}$ nie jest zupełny.

Zadanie 376. Pokaż, że $\{\vee, \wedge, \Leftrightarrow, \Rightarrow\}$ nie jest zupełny.

Zadanie 377. Pokaż, że $\{\Leftrightarrow, \bot\}$ nie jest zupełny.

Zadanie 378. Pokaż, że $\{\wedge, \vee, \neg\}$ jest zupełny.

Zadanie 379. Pokaż, że $\{\wedge, \neg\}$ jest zupełny.

Zadanie 380. Pokaż, że $\{\vee, \neg\}$ jest zupełny.

Zadanie 381. Pokaż, że $\{\Rightarrow, \bot\}$ jest zupełny.

Zadanie 382. Pokaż, że $\{\Rightarrow, \neg\}$ jest zupełny.

Zadanie 383. Pokaż, że $\{\vee, \Leftrightarrow, \bot\}$ jest zupełny.

Zadanie 384. Udowodnij, że każdy 2-zupełny zbiór spójników jest zupełny.

Zadanie 385. Udowodnij, że zbiór $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg\}$ jest 2-zupełny.

Zadanie 386. Czy system spójników $\{\oplus, \top\}$ jest zupełny, gdzie $p \oplus q$ jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy $p \wedge \neg q$, zaś $\top$ oznacza prawdę?

Zadanie 387. Pokaż, że istnieje binarny spójnik $\uparrow$, taki, że $\{\uparrow\}$ jest zupełny.

Zadanie 388. Ile jest binarnych spójników logicznych $\oplus$, takich, że $\{\oplus\}$ jest zupełny?

1.7. Składnia rachunku kwantyfikatorów

Definicja 24. W *rachunku kwantyfikatorów* używamy tzw. *zmiennych indywiduowych* pochodzących z nieskończonego zbioru $X = \{x, y, z, x_1, x_2, \ldots\}$, *symboli funkcyjnych* $f, g, f_1, f_2, \ldots$ i *symboli relacyjnych* $p, q, p_1, p_2, \ldots$ Z każdym symbolem funkcyjnym i z każdym symbolem relacyjnym związujemy liczbę naturalną, która określa liczbę jego argumentów (*arność*). Symbole funkcyjne 0-argumentowe nazywamy *symbolami stałych*. Symbole relacyjne można uważać za uogólnienie zmiennych zdaniowych z rachunku zdań (zmienne zdaniowe, to 0-argumentowe symbole relacyjne).

Termy są napisami postaci x, $f(x)$, $g(f_1(x), f_2(x))$ itp. Formalnie:

1. Każda zmienna indywiduowa jest termem.
2. Każdy symbol stałej jest termem.
3. Jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami, a f jest n-argumentowym ($n > 0$) sybolem funkcyjnym, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ jest termem.
4. Każdy term można zbudować przy pomocy reguł 1–3.

Formuły atomowe są napisami postaci $p(t_1)$, $q(t_1, t_2)$ itp., gdzie t_1 i t_2 są termami. Formalnie:

1. Symbole $\bot$ i $\top$ są formułami atomowymi.
2. Każdy 0-argumentowy symbol relacyjny jest formułą atomową.

3. Jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami, a p jest n-argumentowym ($n > 0$) sybolem relacyjnym, to $p(t_1, \ldots, t_n)$ jest formułą atomową.
4. Każdą formułę atomową można otrzymać przy pomocy reguł 1–3.

Formuły rachunku kwantyfikatorów (które będziemy oznaczać ϕ, ψ, ...) budujemy z *formuł atomowych* za pomocą *spójników logicznych* w sposób podobny, jak w rachunku zdań. Ponadto możemy używać kwantyfikatorów $\forall$ i $\exists$. Formalnie:

1. Każda formuła atomowa jest formułą rachunku kwantyfikatorów.
2. Jeżeli ϕ_1 i ϕ_2 są formułami rachunku kwantyfikatorów, to są nimi także: $(\neg\phi_1)$, $(\phi_1 \wedge \phi_2)$, $(\phi_1 \vee \phi_2)$, $(\phi_1 \Rightarrow \phi_2)$ i $(\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)$.
3. Jeżeli x jest zmienną indywiduową, a ϕ — formułą rachunku kwantyfikatorów, to formułami rachunku kwantyfikatorów są też $(\forall x\, \phi)$ i $(\exists x\, \phi)$.
4. Każdą formułę rachunku kwantyfikatorów można otrzymać przy pomocy reguł 1–3.

Dla zwiększenia czytelności opuszczamy niektóre nawiasy w podobny sposób, jak w rachunku zdań.

Definicja 25. Mówimy, że w formule $\forall x\, \phi$ (lub $\exists x\, \phi$) kwantyfikator $\forall$ (lub $\exists$) *wiąże* wystąpienia zmiennej x w formule ϕ, oraz że wystąpienia zmiennej x w formule ϕ są *związane* przez ten kwantyfikator. Wystąpienia zmiennych, które nie są związane w danej formule, są w niej *wolne*. Formalnie zbiór $\mathrm{FV}(\phi)$ zmiennych, które występują jako wolne w formule ϕ definiujemy następująco:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{FV}(x) & = & \{x\} \\
\mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) & = & \mathrm{FV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{FV}(t_n) \\
\mathrm{FV}(\bot) & = & \emptyset \\
\mathrm{FV}(\top) & = & \emptyset \\
\mathrm{FV}(p(t_1, \ldots, t_n)) & = & \mathrm{FV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{FV}(t_n) \\
\mathrm{FV}(\neg\phi) & = & \mathrm{FV}(\phi) \\
\mathrm{FV}(\phi \circ \psi) & = & \mathrm{FV}(\phi) \cup \mathrm{FV}(\psi), \quad \text{gdzie } \circ \in \{\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow\} \\
\mathrm{FV}(\mathcal{Q}x\, \phi) & = & \mathrm{FV}(\phi) \setminus \{x\}, \quad \text{gdzie } \mathcal{Q} \in \{\forall, \exists\}
\end{array}
$$

Podobnie definiujemy zbiór zmiennych występujących w formule jako związane.

1.8. Znaczenie formuł rachunku kwantyfikatorów

Formalna definicja *tautologii* (*formuły prawdziwej*, *prawa rachunku kwantyfikatorów*) jest nieco bardziej skomplikowana, niż w przypadku rachunku zdań. Z tego powodu podamy ją dopiero w rozdziale 12. Tutaj powiemy jedynie, że formuła ϕ jest tautologią, jeżeli jest spełniona przy każdej interpretacji symboli funkcyjnych i relacyjnych. Przy danej interpretacji symboli funkcyjnych i relacyjnych formuła $\forall x\ \phi$ jest spełniona, gdy jest spełniona formuła ϕ dla każdej wartości zmiennej x, zaś formuła $\exists x\ \phi$ jest spełniona, gdy istnieje pewna wartość zmiennej x, dla której formuła ϕ jest spełniona.

Przykład 26. Prawami rachunku kwantyfikatorów są np. *prawa negowania kwantyfikatorów*:

$$\begin{aligned} \neg(\forall x\ \phi) &\quad\Leftrightarrow\quad \exists x\ \neg\phi \\ \neg(\exists x\ \phi) &\quad\Leftrightarrow\quad \forall x\ \neg\phi \end{aligned}$$

Ich intuicyjny sens jest jasny: „nieprawda, że *dla każdego x* formuła ϕ jest prawdziwa" oznacza, że „*istnieje x*, dla którego formuła ϕ nie jest prawdziwa." Podobnie „nieprawda, że *istnieje x*, dla którego formuła ϕ jest prawdziwa" oznacza, że „*dla każdego x* formuła ϕ nie jest prawdziwa."

Niech ϕ i ψ oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów być może zawierające wolne wystąpienia zmiennej x. W poniższych zadaniach sprawdź, które z podanych formuł są prawami rachunku kwantyfikatorów.

Zadanie 389. $(\forall x\ (\phi \vee \psi)) \Rightarrow (\forall x\ \phi) \vee (\forall x\ \psi)$

Zadanie 390. $(\forall x\ \phi) \vee (\forall x\ \psi) \Rightarrow (\forall x\ (\phi \vee \psi))$

Zadanie 391. $(\forall x\ (\phi \wedge \psi)) \Rightarrow (\forall x\ \phi) \wedge (\forall x\ \psi)$

Zadanie 392. $(\forall x\ \phi) \wedge (\forall x\ \psi) \Rightarrow (\forall x\ (\phi \wedge \psi))$

Zadanie 393. $(\forall x\ (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\forall x\ \phi) \Rightarrow (\forall x\ \psi)$

Zadanie 394. $((\forall x\ \phi) \Rightarrow (\forall x\ \psi)) \Rightarrow (\forall x\ (\phi \Rightarrow \psi))$

Zadanie 395. $(\forall x\ (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\exists x\ \phi) \Rightarrow (\forall x\ \psi)$

Zadanie 396. $((\exists x\ \phi) \Rightarrow (\forall x\ \psi)) \Rightarrow (\forall x\ (\phi \Rightarrow \psi))$

Zadanie 397. $(\exists x\ (\phi \vee \psi)) \Rightarrow (\exists x\ \phi) \vee (\exists x\ \psi)$

Zadanie 398. $(\exists x\ \phi) \vee (\exists x\ \psi) \Rightarrow (\exists x\ (\phi \vee \psi))$

Zadanie 399. $(\exists x\ \phi) \wedge (\exists x\ \psi) \Rightarrow (\exists x\ (\phi \wedge \psi))$

Zadanie 400. $(\exists x\ (\phi \wedge \psi)) \Rightarrow (\exists x\ \phi) \wedge (\exists x\ \psi)$

Zadanie 401. $((\exists x\, \phi) \Rightarrow (\exists x\, \psi)) \Rightarrow (\exists x\, (\phi \Rightarrow \psi))$

Zadanie 402. $(\exists x\, (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\exists x\, \phi) \Rightarrow (\exists x\, \psi)$

Zadanie 403. $((\forall x\, \phi) \Rightarrow (\exists x\, \psi)) \Rightarrow (\exists x\, (\phi \Rightarrow \psi))$

Zadanie 404. $(\exists x\, (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\forall x\, \phi) \Rightarrow (\exists x\, \psi)$

Zadanie 405. $((\forall x\, \phi) \Leftrightarrow \neg(\forall x\, \psi)) \Rightarrow \exists x\, (\phi \Leftrightarrow \neg\psi)$

Zadanie 406. $\exists x\, (\phi \Leftrightarrow \neg\psi) \Rightarrow ((\forall x\, \phi) \Leftrightarrow \neg(\forall x\, \psi))$

Zadanie 407. $\forall x\, \phi \Rightarrow \exists x\, \phi$

Zadanie 408. $\exists x\, \phi \Rightarrow \forall x\, \phi$

Niech ϕ oznacza formułę rachunku kwantyfikatorów zawierającą być może wolne wystąpienia zmiennych x i y. W poniższych zadaniach sprawdź, które z podanych formuł są prawami rachunku kwantyfikatorów.

Zadanie 409. $(\forall x\, \exists y\, \phi) \Rightarrow (\exists y\, \forall x\, \phi)$

Zadanie 410. $(\exists y\, \forall x\, \phi) \Rightarrow (\forall x\, \exists y\, \phi)$

Niech ϕ i ψ oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów, przy czym zmienna x nie ma wolnych wystąpień w formule ϕ (lecz może mieć w ψ). W poniższych zadaniach sprawdź, czy podane formuły są równoważne.

Zadanie 411. $\forall x\, (\phi \vee \psi)$ oraz $\phi \vee (\forall x\, \psi)$

Zadanie 412. $\forall x\, (\phi \wedge \psi)$ oraz $\phi \wedge (\forall x\, \psi)$

Zadanie 413. $\forall x\, (\phi \Rightarrow \psi)$ oraz $\phi \Rightarrow (\forall x\, \psi)$

Zadanie 414. $\forall x\, (\phi \Rightarrow \psi)$ oraz $\phi \Rightarrow (\exists x\, \psi)$

Zadanie 415. $\forall x\, (\psi \Rightarrow \phi)$ oraz $(\forall x\, \psi) \Rightarrow \phi$

Zadanie 416. $\forall x\, (\psi \Rightarrow \phi)$ oraz $(\exists x\, \psi) \Rightarrow \phi$

Zadanie 417. $\forall x\, (\phi \Leftrightarrow \psi)$ oraz $\phi \Leftrightarrow (\forall x\, \psi)$

Zadanie 418. $\forall x\, (\phi \Leftrightarrow \psi)$ oraz $\phi \Leftrightarrow (\exists x\, \psi)$

Zadanie 419. $\exists x\, (\phi \vee \psi)$ oraz $\phi \vee (\exists x\, \psi)$

Zadanie 420. $\exists x\, (\phi \wedge \psi)$ oraz $\phi \wedge (\exists x\, \psi)$

Zadanie 421. $\exists x\,(\phi \Rightarrow \psi)$ oraz $\phi \Rightarrow (\exists x\,\psi)$

Zadanie 422. $\exists x\,(\phi \Rightarrow \psi)$ oraz $\phi \Rightarrow (\forall x\,\psi)$

Zadanie 423. $\exists x\,(\psi \Rightarrow \phi)$ oraz $(\exists x\,\psi) \Rightarrow \phi$

Zadanie 424. $\exists x\,(\psi \Rightarrow \phi)$ oraz $(\forall x\,\psi) \Rightarrow \phi$

Zadanie 425. $\exists x\,(\phi \Leftrightarrow \psi)$ oraz $\phi \Leftrightarrow (\exists x\,\psi)$

Zadanie 426. $\exists x\,(\phi \Leftrightarrow \psi)$ oraz $\phi \Leftrightarrow (\forall x\,\psi)$

1.9. Formalizacja wypowiedzi w języku rachunku kwantyfikatorów

Zadanie 427. Formuła ϕ jest w *postaci normalnej*, jeśli jest postaci $\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n\,\psi$, gdzie x_i są pewnymi zmiennymi, $\mathcal{Q}_i$ są kwantyfikatorami ($\mathcal{Q}_i \in \{\forall, \exists\}$ dla $i = 1, \ldots, n$), a formuła ψ nie zawiera kwantyfikatorów i symbol negacji występuje w niej jedynie przed formułami atomowymi. Przykładem formuły w postaci normalnej jest $\forall x\,\exists y\,(x \neq y \vee \neg x \leq y)$. Formuła $\forall x\,\exists y\,\exists z\,\neg(z = y \vee y = z)$ nie jest w postaci normalnej.
Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo rosnąca*, jeśli

$$\forall x\,\forall y\,(x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)).$$

Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo malejąca*, jeśli

$$\forall x\,\forall y\,(x \leq y \Rightarrow f(y) \leq f(x)).$$

Zapisz poniższe zdania jako formuły w postaci normalnej:

1. funkcja f jest słabo rosnąca i słabo malejąca,
2. funkcja f nie jest słabo rosnąca i nie jest słabo malejąca.

Zadanie 428. Przy pomocy symboli $=, \leq, +, \times$, spójników logicznych i kwantyfikatorów zapisz następujące formuły dotyczące liczb naturalnych:

1. liczba x jest najmniejszą wspólną wielokrotnością y i z,
2. każda liczba nieparzysta większa od 3 jest sumą dwóch liczb pierwszych,
3. nie istnieje największa liczba pierwsza,
4. liczby x i y mają takie same dzielniki pierwsze.

Przykład: formułę „x jest sumą dwóch kwadratów liczb naturalnych” zapiszemy jako $\exists y \exists z (x = y \times y + z \times z)$.

Zadanie 429. Niech funkcja g będzie dla $n \in \mathbb{N}$ określona następująco:

$$g(n) = \begin{cases} n/2, & \text{gdy } n \text{ jest parzyste,} \\ 3n+1, & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste.} \end{cases}$$

Używając symboli z zadania 428 oraz dodatkowo symbolu potęgowania $\uparrow$, zapisz zdanie równoważne zdaniu „dla każdej liczby naturalnej m istnieje liczba n, taka, że $g^n(m) = 1$”, gdzie g^n oznacza funkcję g złożoną ze sobą n razy, na przykład $g^2(3) = 5$. *Wskazówka:* ciąg skończony liczb naturalnych $a_1, a_2, \ldots a_m$ możemy zakodować jako jedną liczbę $2^{a_1}3^{a_2}\ldots p_m^{a_m}$, gdzie p_i jest i-tą liczbą pierwszą.

Zadanie 430. Używając tylko kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$, $\times$, $=$ i $\leq$ napisz formułę mówiącą, że wśród każdych trzech liczb naturalnych zawsze znajdą się dwie, których różnica jest nieujemna i parzysta. Czy taką formułę można zapisać używając wyłącznie kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$ i $=$?

Używając tylko kwantyfikatorów, zmiennych, nawiasów, spójników logicznych oraz symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$, $\times$, $=$, $<$ i symbolu f napisz formułę mówiącą, że jeśli funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest silnie rosnąca (dla większych argumentów ma większe wartości), to jej wartości są nieograniczone.

Zadanie 431. Niech na pewnym skończonym zbiorze X będzie określona binarna relacja R. Mówimy, że zbiór X z relacją R jest *hamiltonowski*, jeśli istnieje ciąg elementów zbioru X, taki, że każdy element zbioru X występuje w tym ciągu dokładnie raz, każde dwa kolejne elementy ciągu są ze sobą w relacji R, oraz ostatni element ciągu jest w relacji z pierwszym elementem ciągu. Używając jedynie poniższych słów i zwrotów (z odpowiednią odmianą) wyraź słownie, co to znaczy, że zbiór X wraz z relacją R nie jest hamiltonowski:

R	istnieje	pierwszy
X	każdy	raz
ciąg	kolejny	taki, że
dla	który	ten
dokładnie	lub	truskawka
dwa	moc	w
element	nie jest w relacji	występować
i	ostatni	zbiór

Zadanie 432. Po egzaminie z logiki studenci wybrali się na dyskotekę, w której bawi się pewna liczba pań i dżentelmenów. Niech

ϕ_1 oznacza, że każdy dżentelmen zna co najwyżej dwie panie,
ϕ_2 oznacza, że każda pani zna co najwyżej dwóch dżentelmenów,
ϕ_3 oznacza, że każdy dżentelmen zna co najmniej dwie panie,
ϕ_4 oznacza, że żadne dwie panie nie znają dokładnie tych samych dżentelmenów.

Zapisz zdania ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 i ϕ_4 używając symboli zbiorów P i D oraz symbolu relacji $Z \subseteq (P \cup D)^2$, takich, że

$$\begin{aligned} x \in P &\quad\Leftrightarrow\quad x \text{ jest panią,} \\ x \in D &\quad\Leftrightarrow\quad x \text{ jest dżentelmenem,} \\ Z(x, y) &\quad\Leftrightarrow\quad x \text{ zna } y, \end{aligned}$$

oraz równości $=$ i spójników logicznych oraz kwantyfikatorów.
Niech

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \phi_1 \wedge \phi_2 \\ \psi_2 &= \phi_3 \wedge \phi_4 \\ \psi_3 &= \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4 \\ \psi_4 &= \phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \phi_3 \wedge \phi_4 \end{aligned}$$

Używając symboli $+$, $\times$, $:$, $\leq$, liczb naturalnych oraz symboli logicznych, napisz formuły $\delta_i(p, d)$, $i = 1, \ldots, 4$, spełnione dokładnie dla tych liczb naturalnych p i d, dla których istnieją zbiory pań P i dżentelmenów D, oraz relacja „znajomości” $Z \subseteq (P \cup D)^2$, takie, że $p = |P|$, $d = |D|$ i spełniona jest formuła ψ_i. Na przykład formuła

$$\delta_5(p, d) \quad\Leftrightarrow\quad p = 2d$$

zachodzi dla tych liczb naturalnych p i d, dla których istnieją zbiory pań P i dżentelmenów D oraz relacja „znajomości” $Z \subseteq (P \cup D)^2$, takie, że spełniona jest formuła ψ_5, mówiąca, że każdy dżentelmen zna dokładnie dwie panie, a każda pani zna dokładnie jednego dżentelmena.

2

Zbiory

W teorii mnogości *zbiór* i *relację* $\in$ należenia do zbioru przyjmujemy za pojęcia pierwotne. Własności zbiorów i relacji $\in$ są zadane przez *aksjomaty*, tj. zdania, które przyjmujemy za prawdziwe bez dowodu.

Aksjomat 27 (zasada ekstensjonalności). Dwa zbiory są *równe*, jeżeli zawierają dokładnie te same elementy, tj.

$$\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \quad \Rightarrow \quad A = B.$$

Definicja 28. *Zbiór pusty* $\emptyset$ jest zbiorem nie zawierającym żadnego elementu:

$$\forall x\ (x \notin \emptyset).$$

Aksjomat 29 (zbioru pustego). Zbiór pusty istnieje.

Zauważmy, że na mocy zasady ekstensjonalności istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

Definicja 30. Zbiór A jest *podzbiorem* zbioru B, co będziemy zapisywać $A \subseteq B$, jeżeli B zawiera wszystkie elementy zbioru A, tj.

$$A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\, (x \in A \Rightarrow x \in B).$$

Zauważmy, że na mocy zasady ekstensjonalności dwa zbiory są równe wtedy i tylko wtedy, gdy są nawzajem swoimi podzbiorami, tj.

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Definicja 31. Napisy $\{x \mid \phi\}$ i $\{x : \phi\}$ oznaczają zbiór tych elementów x, które spełniają formułę ϕ.

Przykład 32. Napis $\{n \mid \exists m{\in}\mathbb{N}\, (n = 3m)\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3.

Definicja 33. Rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru A nazywamy *zbiorem potęgowym* zbioru A i oznaczamy $\mathcal{P}(A)$. Formalnie:

$$\mathcal{P}(A) \quad = \quad \{B \mid B \subseteq A\}.$$

2.1. Działania na zbiorach

Definicja 34. Na zbiorach wprowadzamy operacje *sumy* $\cup$, *przekroju* $\cap$ i *różnicy* $\setminus$:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B &\iff x \in A \vee x \in B \\ x \in A \cap B &\iff x \in A \wedge x \in B \\ x \in A \setminus B &\iff x \in A \wedge x \notin B \end{aligned}$$

Powyższe operacje mają wiele ciekawych własności. Dla przykładu:

Fakt 35 (prawa rozdzielności).

$$\begin{aligned} A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Dowód. Udowodnimy pierwsze z nich. Na mocy prawa ekstensjonalności wystarczy pokazać, że dla każdego x zachodzi

$$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Istotnie, z definicji różnicy zbiorów

$$x \in A \setminus (B \cup C) \iff x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C).$$

Następnie z definicji sumy zbiorów mamy

$$x \in A \wedge \neg(x \in B \cup C) \iff x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C).$$

Korzystając z prawa de Morgana $\neg(p \vee q) \iff \neg p \wedge \neg q$ otrzymujemy

$$x \in A \wedge \neg(x \in B \vee x \in C) \iff x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C).$$

Na mocy tautologii $p \iff (p \wedge p)$ możemy do formuły dopisać jeszcze jedno wystąpienie $x \in A$. Ponadto koniunkcja jest łączna i przemienna, możemy zatem dowolnie pogrupować jej czynniki:

$$\begin{aligned} x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) &\iff x \in A \wedge x \in A \wedge (x \notin B \wedge x \notin C) \\ &\iff (x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C). \end{aligned}$$

Korzystając dwukrotnie z definicji różnicy zbiorów mamy

$$(x \in A \wedge x \notin B) \wedge (x \in A \wedge x \notin C) \iff (x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C).$$

Na mocy definicji przekroju zbiorów mamy ostatecznie

$$(x \in A \setminus B) \wedge (x \in A \setminus C) \iff x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C).$$

Rozpoczęliśmy od formuły $x \in A \setminus (B \cup C)$. Przechodząc przez szereg formuł równoważnych otrzymaliśmy ostatecznie $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Twierdzenie jest zatem udowodnione. ∎

Zadanie 433. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą podane równości.

$$\begin{aligned}
A \cup B &= B \cup A \\
A \cap B &= B \cap A \\
(A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\
(A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \\
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \\
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C) \\
(A \cup B) \setminus C &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C) \\
A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \setminus C \\
(A \cap B) \setminus C &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C) \\
A \setminus (B \cap C) &= (A \setminus B) \cup (A \setminus C)
\end{aligned}$$

Zadanie 434. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzą podane równości.

$$\begin{aligned}
(A \setminus B) \cup C &= (A \cup C) \setminus (B \setminus C) \\
(A \setminus B) \cap C &= (A \cap C) \setminus B \\
A \setminus (B \setminus C) &= (A \setminus B) \cup (A \cap C) \\
A \cup (B \setminus C) &= ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C) \\
A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) &= (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D) \\
(A \setminus B) \cap (C \setminus D) &= (A \cap C) \setminus (B \cup D) \\
\emptyset \cap A &= \emptyset \\
\emptyset \cup A &= A \\
\emptyset \setminus A &= \emptyset \\
A \setminus \emptyset &= A
\end{aligned}$$

Zadanie 435. Czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą podane równości?

$$\begin{aligned}
(A \cup B) \setminus B &= A \\
A \cup (A \cap B) &= A \\
A \cap (A \cup B) &= A \\
(A \setminus B) \setminus (B \setminus A) &= A \\
A \setminus (B \cap A) &= A \\
A \setminus (B \setminus A) &= A \\
A \cup (B \setminus C) &= (A \cup B) \setminus C \\
A \cap (B \setminus C) &= (A \cap B) \setminus C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \setminus (B \setminus C) &= (A \setminus B) \setminus C \\ A \setminus (B \cup C) &= (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

Zadanie 436. Pokaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D, takich, że $A \subseteq B$ i $C \subseteq D$ zachodzą podane inkluzje.

$$\begin{aligned} A \cup C &\subseteq B \cup D \\ A \cap C &\subseteq B \cap D \\ A \setminus D &\subseteq B \setminus C \end{aligned}$$

Zadanie 437. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzi:

$$A \cap B \cap C \cap D \quad \subseteq \quad ((A \cap B) \cup C) \cap D.$$

Zadanie 438. Czy dla dowolnych zbiorów A, B i C zachodzą poniższe inkluzje?

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &\subseteq B \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \setminus C) &\subseteq B \cap (A \setminus C) \end{aligned}$$

W poniższych zadaniach przyjmij, że zbiory A, B i C spełniają podaną równość. Wymień wszystkie inkluzje między zbiorami A, B i C, które wynikają z podanej zależności (oprócz oczywistych inkluzji postaci $X \subseteq X$), i udowodnij, że wymieniłeś wszystkie takie inkluzje.

Zadanie 439. $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$

Zadanie 440. $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$

Zadanie 441. $((A \cap B) \cup C) \setminus A = (A \cap B) \setminus C$

Zadanie 442. $(A \setminus C) \cup B = A \cup B$

Zadanie 443. $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$

Zadanie 444. $(A \cup B) \cap (C \cup B) = B$

Zadanie 445. Pokaż, że jeżeli dla pewnych zbiorów A i B jest $A \setminus B = B \setminus A$, to $A = B$.

Zadanie 446. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A i B następujące formuły są równoważne

$$A \subseteq B, \quad A \cup B = B, \quad A \cap B = A, \quad A \setminus B = \emptyset.$$

Zadanie 447. Niech A, B i C będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że $A \subseteq A \cup B$ i $B \subseteq A \cup B$. Udowodnij, że jeśli $A \subseteq C$ oraz $B \subseteq C$, to $A \cup B \subseteq C$. Innymi słowy suma zbiorów A i B jest najmniejszym (w sensie inkluzji) zbiorem zawierającym zbiory A i B.

Zadanie 448. Niech A, B i C będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że $A \cap B \subseteq A$ i $A \cap B \subseteq B$. Udowodnij, że jeśli $C \subseteq A$ oraz $C \subseteq B$, to $C \subseteq A \cap B$. Innymi słowy przekrój zbiorów A i B jest największym (w sensie inkluzji) zbiorem zawartym w zbiorach A i B.

Zadanie 449. Niech A, B i C będą dowolnymi zbiorami. Udowodnij, że $A \setminus B \subseteq A$ i $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$. Udowodnij, że jeśli $C \subseteq A$ oraz $C \cap B = \emptyset$, to $C \subseteq A \setminus B$. Innymi słowy różnica zbiorów A i B jest największym (w sensie inkluzji) zbiorem zawartym w A i rozłącznym z B.

Definicja 36. *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$x \in A \dot{-} B \quad \Leftrightarrow \quad x \in A \Leftrightarrow x \notin B.$$

Zadanie 450. Pokaż, że różnica symetryczna jest operacją *łączną* i *przemienną*, tj. że

$$(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C) \quad \text{oraz} \quad A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

dla dowolnych zbiorów A, B i C. Pokaż także następujące tożsamości:

$$A \dot{-} \emptyset = A, \quad A \dot{-} A = \emptyset \quad \text{oraz} \quad A \cap (B \dot{-} C) = (A \cap B) \dot{-} (A \cap C).$$

Zadanie 451. Udowodnij, że

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Zadanie 452. Wśród poniższych zdań wskaż zdania prawdziwe i udowodnij je. Dla pozostałych zdań podaj kontrprzykłady dowodzące, że zdania te nie są prawdziwe.

1. Równość $A \cap B = A \cap C$ implikuje równość $B = C$.
2. Równości $A \cap B = A \cap C$ oraz $A \cup B = A \cup C$ implikują równość $B = C$.
3. Inkluzja $A \cup B \subseteq A \cap B$ implikuje równość $A = B$.
4. Równość $A \dot{-} B = A \dot{-} C$ implikuje równość $B = C$.
5. Równość $A \dot{-} B = \emptyset$ implikuje równość $A = B$.

Zadanie 453. Czy istnieją niepuste zbiory A i B takie, że

$$A \subseteq A \dot{-} B \subseteq A \setminus B?$$

Zadanie 454. Czy dla dowolnych zbiorów A i B zachodzą równości:

$$\begin{aligned} A \cup (B \dot{-} C) &= (A \cup B) \dot{-} (A \cup C), \\ A \cup B &= (A \dot{-} B) \dot{-} (A \cap B)? \end{aligned}$$

2.2. Operacje nieskończone na zbiorach

Definicja 37. *Rodziną zbiorów* indeksowaną elementami zbioru S nazywamy odwzorowanie, które każdemu elementowi $s \in S$ przyporządkowuje pewien zbiór A_s. Rodzinę zbiorów oznaczamy $\{A_s\}_{s\in S}$. Rodziną zbiorów $\{A_{s,t}\}_{\substack{t\in T\\ s\in S}}$ indeksowaną elementami dwóch zbiorów S i T nazywamy odwzorowanie, które każdej parze $\langle s, t\rangle$, gdzie $s \in S$ oraz $t \in T$ przyporządkowuje pewien zbiór $A_{s,t}$. Jeżeli $S = \{i\in\mathbb{N} \mid i\geq n\}$, to zamiast $\{A_i\}_{i\in S}$ piszemy też $\{A_i\}_{i=n}^{\infty}$. Jeżeli $S = \{n, \ldots, m\}$, to zamiast $\{A_i\}_{i\in S}$ piszemy też $\{A_i\}_{i=n}^{m}$.

Definicja 38. Dwuargumentowe operacje sumy i przekroju zbiorów można rozszerzyć na dowolne rodziny zbiorów. Suma wszystkich zbiorów z rodziny $\{A_s\}_{s\in S}$ jest zbiorem zawierającym elementy występujące w którymkolwiek ze zbiorów A_s. Podobnie przekrój tej rodziny jest zbiorem zawierającym elementy występujące w każdym ze zbiorów A_s. Formalnie:

$$x \in \bigcup_{s\in S} A_s \quad\Leftrightarrow\quad \exists s\in S\ (x \in A_s),$$

$$x \in \bigcap_{s\in S} A_s \quad\Leftrightarrow\quad \forall s\in S\ (x \in A_s).$$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$, $\{B_t\}_{t\in T}$, gdzie T jest niepustym zbiorem indeksów, zachodzą podane relacje. W których przypadkach zachodzi inkluzja odwrotna?

Zadanie 455. $\bigcup_{t\in T} (A_t \cup B_t) = \bigcup_{t\in T} A_t \cup \bigcup_{t\in T} B_t$

Zadanie 456. $\bigcap_{t\in T} (A_t \cap B_t) = \bigcap_{t\in T} A_t \cap \bigcap_{t\in T} B_t$

Zadanie 457. $\bigcup_{t\in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$

Zadanie 458. $\bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t \subseteq \bigcap_{t\in T} (A_t \cup B_t)$

Zadanie 459. $\bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{t\in T} B_t \subseteq \bigcup_{t\in T} (A_t \cup B_t)$

Zadanie 460. $\bigcap_{t\in T} (A_t \cup B_t) \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t \cup \bigcup_{t\in T} B_t$

Zadanie 461. $\bigcap_{t,s\in T} (A_t \cup B_s) \subseteq \bigcap_{t\in T} (A_t \cup B_t)$

Zadanie 462. $\bigcup_{t\in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t,s\in T} (A_t \cap B_s)$

Zadanie 463. $\bigcup_{t\in T}(A_t \setminus B_t) \subseteq \bigcup_{t\in T} A_t \setminus \bigcap_{t\in T} B_t$

Zadanie 464. $\bigcap_{t\in T}(A_t \setminus B_t) = \bigcap_{t\in T} A_t \setminus \bigcup_{t\in T} B_t$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnego zbioru A i dowolnej rodziny zbiorów $\{B_t\}_{t\in T}$, gdzie T jest niepustym zbiorem indeksów, zachodzą podane równości.

Zadanie 465. $\bigcup_{t\in T}(A \cup B_t) = A \cup \bigcup_{t\in T} B_t$

Zadanie 466. $\bigcap_{t\in T}(A \cup B_t) = A \cup \bigcap_{t\in T} B_t$

Zadanie 467. $\bigcup_{t\in T}(A \cap B_t) = A \cap \bigcup_{t\in T} B_t$

Zadanie 468. $\bigcap_{t\in T}(A \cap B_t) = A \cap \bigcap_{t\in T} B_t$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_{t,s}\}_{\substack{t\in T\\ s\in S}}$, gdzie T i S są niepustymi zbiorami indeksów, zachodzą podane relacje. Czy zachodzą inkluzje odwrotne?

Zadanie 469. $\bigcup_{t\in T}\bigcup_{s\in S} A_{t,s} = \bigcup_{s\in S}\bigcup_{t\in T} A_{t,s}$

Zadanie 470. $\bigcap_{t\in T}\bigcap_{s\in S} A_{t,s} = \bigcap_{s\in S}\bigcap_{t\in T} A_{t,s}$

Zadanie 471. $\bigcup_{t\in T}\bigcap_{s\in S} A_{t,s} \subseteq \bigcap_{s\in S}\bigcup_{t\in T} A_{t,s}$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_{t,s}\}_{t,s\in T}$, gdzie T jest niepustym zbiorem indeksów, zachodzą podane relacje. Czy zachodzą inkluzje odwrotne?

Zadanie 472. $\bigcup_{t\in T} A_{t,t} \subseteq \bigcup_{t\in T}\bigcup_{s\in T} A_{t,s}$

Zadanie 473. $\bigcap_{t\in T}\bigcap_{s\in T} A_{t,s} \subseteq \bigcap_{t\in T} A_{t,t}$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$, $\{B_s\}_{s\in S}$, gdzie T i S są niepustymi zbiorami indeksów, zachodzą podane równości.

Zadanie 474. $\bigcup_{t\in T} A_t \cup \bigcup_{s\in S} B_s = \bigcup_{t\in T}\bigcup_{s\in S}(A_t \cup B_s)$

Zadanie 475. $\bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{s\in S} B_s = \bigcup_{t\in T} \bigcup_{s\in S} (A_t \cap B_s)$

Zadanie 476. $\bigcap_{t\in T} A_t \cup \bigcap_{s\in S} B_s = \bigcap_{t\in T} \bigcap_{s\in S} (A_t \cup B_s)$

Zadanie 477. $\bigcap_{t\in T} A_t \cap \bigcap_{s\in S} B_s = \bigcap_{t\in T} \bigcap_{s\in S} (A_t \cap B_s)$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ zachodzą podane relacje. W których przypadkach zachodzi inkluzja odwrotna?

Zadanie 478. $\bigcap_{n=0}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$

Zadanie 479. $\bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$

Zadanie 480. $\bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$

Zadanie 481. $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n+1} \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} \setminus \bigcup_{m=1}^{n} A_m)$

Zadanie 482. $\bigcup_{n=0}^{m} A_n = \Big(\bigcup_{n=0}^{m-1} (A_n \setminus A_{n+1})\Big) \cup (A_m \setminus A_1) \cup \bigcap_{n=0}^{m} A_n$

Zadanie 483. $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})\Big) \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

Zadanie 484. $\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n = \Big(\big(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\big) \setminus A_1\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})\Big) \cup \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$

Definicja 39. Rodzina zbiorów $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest *zstępująca*, jeżeli $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i *wstępująca*, jeżeli $A_n \subseteq A_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 485. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są zstępującymi rodzinami zbiorów, to

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} (A_i \cup B_i) \quad = \quad \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \cup \Big(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big).$$

Wskaż przykład rodzin $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dla których równość powyższa nie zachodzi. Czy równość powyższa zachodzi dla rodzin wstępujących?

Zadanie 486. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ są wstępującymi rodzinami zbiorów, to

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(A_i \cap B_i) \quad = \quad \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i\Big).$$

Wskaż przykład rodzin $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ i $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dla których równość powyższa nie zachodzi. Czy równość powyższa zachodzi dla rodzin zstępujących?

Zadanie 487. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \cup \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \quad = \quad A_0 \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{2n} \setminus A_{2n+1}).$$

Zadanie 488. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=0}^{n} A_i \quad = \quad \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{n} A_i.$$

Zadanie 489. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=0}^{n} A_i \quad = \quad \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=0}^{n} A_i.$$

Zadanie 490. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Zadanie 491. Udowodnij, że jeśli $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest wstępującą rodziną zbiorów, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcap_{n=0}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Zadanie 492. Niech $\{A_{n,m}\}_{n,m=0}^{\infty}$ będzie rodziną zbiorów indeksowaną parami liczb naturalnych. Pokaż, że jeśli

$$A_{n,m} \subseteq A_{n+1,m} \cap A_{n,m+1}$$

dla wszelkich n i m, to

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{m=0}^{\infty} A_{n,m} \quad = \quad \bigcup_{n=0}^{\infty} A_{n,n}.$$

Zadanie 493. Dane są rodziny zbiorów $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ i $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Wiadomo, że dla każdego i istnieje k takie, że $A_i \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} B_j$. Udowodnij, że:

1. dla każdego i istnieje takie k, że $\bigcup_{j=0}^{i} A_j \subseteq \bigcup_{j=0}^{k} B_j$,
2. $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i$.

3

Relacje

3.1. Para uporządkowana i iloczyn (produkt) kartezjański

Parę uporządkowaną (w skrócie *parę*) elementów a i b będziemy zapisywać w postaci $\langle a, b\rangle$. Para będzie dla nas pojęciem pierwotnym. Przyjmujemy, że spełnia ona następujący aksjomat.

Aksjomat 40. $\langle a, b\rangle = \langle c, d\rangle \iff (a = c \wedge b = d)$.

Aby określić parę uporządkowaną wystarczy podać dwuelementowy zbiór jej elementów i wskazać, który z nich jest pierwszy. Specjaliści od podstaw matematyki pragną za pojęcia pierwotne uważać jedynie zbiór i relację należenia do zbioru i dlatego wolą *zdefiniować* parę następująco:

$$\langle a, b\rangle \quad = \quad \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Zadanie 494. Udowodnij, że zdefiniowana wyżej para $\langle a, b\rangle$ spełnia aksjomat 40.

Definicja 41. *Iloczynem kartezjańskim* dwóch zbiorów nazywamy zbiór wszystkich par uporządkowanych złożonych z elementów tych zbiorów:

$$A \times B \quad = \quad \{\langle a, b\rangle \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Zadanie 495. Uzupełnij i udowodnij podane wzory.

$$\begin{aligned}
(A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C) \\
(A \cup B) \times C &= ? \\
(A \cup B) \times (C \cup D) &= ?
\end{aligned}$$

Zadanie 496. Udowodnij, że

$$A \times B = B \times A \quad \iff \quad A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

dla dowolnych zbiorów A i B.

Zadanie 497. Udowodnij, że jeżeli $A \times B = C \times D$, to

$$(A = C \wedge B = D) \vee ((A = \emptyset \vee B = \emptyset) \wedge (C = \emptyset \vee D = \emptyset)).$$

3.2. Relacje

Definicja 42. Dowolny podzbiór $R \subseteq A \times B$ produktu kartezjańskiego zbiorów A i B nazywamy *relacją dwuargumentową* (*binarną*). Jeśli $\langle a, b\rangle \in R$, to mówimy, że elementy $a \in A$ i $b \in B$ *są ze sobą w relacji* R. Zamiast pisać $\langle a, b\rangle \in R$, piszemy też niekiedy aRb. Podzbiory $A \times A$ są *binarnymi relacjami na zbiorze* A.

Przykład 43. Relacjami binarnymi są:

- identyczność (równość, przekątna) na zbiorze $\mathbb{N}$: $\{\langle x, x\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \in A\}$,
- relacja mniejszości $\leq$ na zbiorze $\mathbb{N}$: $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid x \leq y\}$,
- $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, taka, że xRy gdy $y = x^2$.

Zadanie 498. Podaj intuicyjny sens poniższych relacji dwuargumentowych na zbiorze $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

a)

$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	1	0	0
2	1	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	1	0	0	1	0	0
5	1	0	0	1	0	0
6	1	0	0	1	0	0

b)

$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	1
2	0	1	0	0	1	0
3	1	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0	1
5	0	1	0	0	1	0
6	1	0	0	1	0	0

c)

$y \setminus x$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	1
2	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0

(Liczba 1 w tabelce oznacza, że dana para elementów należy do relacji, 0 zaś, że nie.)

3.3. Krotki (n-tki) uporządkowane i relacje n-argumentowe

Pojęcie pary łatwo uogólnić na ciągi uporządkowane dowolnej, skończonej długości, które będziemy nazywać *krotkami* (*n-tkami*). Zakładamy, że $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ jest pojęciem pierwotnym i przyjmujemy:

Aksjomat 44. $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n$.

Krotki można również *zdefiniować* za pomocą pojęcia pary: krotka dwuelementowa jest parą, krotka $n+1$-elementowa jest parą złożoną z pierwszego elementu i krotki n-elementowej:

$$\langle a_0, a_1, \ldots, a_n\rangle \quad = \quad \langle a_0, \langle a_1, \ldots, a_n\rangle\rangle$$

Definicja 45. W oczywisty sposób uogólniamy pojęcie *produktu* na n zbiorów:

$$A_1 \times \ldots \times A_n \quad = \quad \{\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n\}.$$

Dla $n \geq 2$ zamiast

$$\underbrace{A \times \ldots \times A}_{n \text{ razy}}$$

piszemy w skrócie A^n. Przyjmujemy dodatkowo, że $A^1 = A$.

Definicja 46. *Relacją* n-argumentową nazywamy dowolny podzbiór produktu n zbiorów.

Dla przykładu

$$\{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{N}^3 \mid a \cdot b = c\} \quad \text{oraz} \quad \{\langle a, b, c\rangle \in \mathbb{N}^3 \mid a \cdot b < c\}$$

są relacjami trójargumentowymi na zbiorze $\mathbb{N}$.

Zadanie 499. Ile jest relacji n-argumentowych na zbiorze 5-elementowym?

3.4. Złożenie relacji. Relacja odwrotna

Definicja 47. Dane są relacje $P \subseteq A \times B$ i $Q \subseteq B \times C$. Relacja

$$PQ = \{\langle a, c\rangle \mid \exists b\, (aPb \wedge bQc)\} \subseteq A \times C$$

nazywa się *złożeniem* relacji P i Q. Relacja

$$P^{-1} = \{\langle b, a\rangle \mid \langle a, b\rangle \in P\} \subseteq B \times A$$

nazywa się *relacją odwrotną* do P.

Twierdzenie 48. Dla dowolnych relacji $T \subseteq A \times B$, $R \subseteq B \times C$ i $S \subseteq C \times D$:

$$\begin{array}{rcl} T(RS) & = & (TR)S \\ (RS)^{-1} & = & S^{-1}R^{-1} \end{array}$$

Zadanie 500. Oblicz $R^2 = RR$, R^3 i R^4 dla relacji z zadania 498.

Zadanie 501. Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{array}{rcl} T(RS) & = & (TR)S \\ (RS)^{-1} & = & S^{-1}R^{-1} \\ (R \cup S)^{-1} & = & R^{-1} \cup S^{-1} \\ (R \cap S)^{-1} & = & R^{-1} \cap S^{-1} \\ (R^{-1})^{-1} & = & R \\ (R \cup S)T & = & RT \cup ST \\ (R \cap S)T & \subseteq & RT \cap ST \\ ((R \cup S)T)^{-1} & = & T^{-1}R^{-1} \cup T^{-1}S^{-1} \\ (A \times B)^{-1} & = & B \times A \\ (A \times B)(C \times D) & = & ? \end{array}$$

4

Funkcje

Definicja 49. Relację $f \subseteq A \times B$ nazywamy *funkcją o dziedzinie A i zbiorze wartości (przeciwdziedzinie) B*, jeżeli

1. $\forall a{\in}A\ \exists b{\in}B\ \langle a, b\rangle \in f$
2. $\forall a{\in}A\ \forall b_1{\in}B\ \forall b_2{\in}B\ (\langle a, b_1\rangle \in f \wedge \langle a, b_2\rangle \in f \Rightarrow b_1 = b_2)$

Zbiór wszystkich funkcji o dziedzinie A i przeciwdziedzinie B oznaczamy B^A.

Relację spełniającą jedynie warunek 2 nazywamy *funkcją częściową*. *Dziedziną* funkcji częściowej f nazywamy zbiór

$$\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A \mid \exists b{\in}B\ \langle a, b\rangle \in f\}.$$

Zamiast $f \in B^A$ piszemy zwykle $f : A \to B$. Napis $f(a)$ oznacza element b, taki, że $\langle a, b\rangle \in f$ (jeśli relacja f jest funkcją, to dla każdego a taki element b istnieje i jest dokładnie jeden, oznaczenie $f(a)$ jest więc jednoznaczne).

Pytanie 50. Ile jest funkcji $f : A \to B$? Ile jest funkcji $f : \emptyset \to B$, a ile $f : A \to \emptyset$?

Z pomocą pojęcia funkcji możemy jeszcze inaczej zdefiniować n-tki uporządkowane: $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ jest funkcją $f : \{1, \ldots, n\} \to A$. Wówczas $f(i)$ jest i-tym elementem krotki.

Definicja 51. Funkcja $f : A \to B$ jest *różnowartościowa* (jest *injekcją*), jeżeli

$$\forall a_1, a_2 \in A\ (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2).$$

Funkcja $f : A \to B$ jest *„na”* (jest *surjekcją*), jeżeli

$$\forall b{\in}B\ \exists a{\in}A\ \ f(a) = b.$$

Funkcja f jest *odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym* (*bijekcją*), jeśli jest różnowartościowa i „na”.

Zadanie 502. Które spośród relacji z zadania 498 są funkcjami?

4.1. Funkcje odwrotne i złożenie funkcji

Twierdzenie 52. Niech dane będą funkcje $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Wówczas relacja $gf \subseteq A \times C$ jest funkcją z A w C oraz $(gf)(a) = g(f(a))$ dla każdego $a \in A$. Jeżeli ponadto obie funkcje f i g są różnowartościowe, to gf też jest różnowartościowa. Jeżeli obie funkcje f i g są „na”, to gf też jest „na”.

Definicja 53. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Wtedy funkcja $g : B \to A$ jest *funkcją odwrotną* do f, jeśli $gf = I_A$ oraz $fg = I_B$ (gdzie I_A, I_B oznaczają funkcje identycznościowe odpowiednio na zbiorach A i B).

Twierdzenie 54. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. f ma funkcję odwrotną,
2. f jest bijekcją,
3. relacja odwrotna f^{-1} jest funkcją określoną na zbiorze B.

Funkcję odwrotną do f oznaczamy f^{-1}.

Niech $f : A \to B$ i $g : B \to C$. Które z poniższych implikacji są prawdziwe?

Zadanie 503. Jeżeli gf jest „na”, to f jest „na”.

Zadanie 504. Jeżeli gf jest „na”, to g jest „na”.

Zadanie 505. Jeżeli gf jest różnowartościowa, to f jest różnowartościowa.

Zadanie 506. Jeżeli gf jest różnowartościowa, to g jest różnowartościowa.

4.2. Obraz i przeciwobraz zbioru

Definicja 55. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją i niech $X \subseteq A$. *Obrazem zbioru X w odwzorowaniu f* nazywamy zbiór

$$f(X) \quad = \quad \{b \in B \mid \exists a{\in}X\ f(a) = b\}.$$

Przeciwobrazem zbioru $Y \subseteq B$ w odwzorowaniu f nazywamy zbiór

$$f^{-1}(Y) \quad = \quad \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Definicja 56. Niech $\mathcal{X}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru A. Wtedy

$$\bigcup \mathcal{X} \quad = \quad \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X$$

$$\bigcap \mathcal{X} \quad = \quad \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X$$

Twierdzenie 57. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją, $\mathcal{X}$ rodziną podzbiorów zbioru A, zaś $\mathcal{Y}$ rodziną podzbiorów zbioru B. Wtedy

$$\begin{array}{rrcll}
 & f(\bigcup \mathcal{X}) & = & \bigcup\{f(X) \mid X \in \mathcal{X}\} & (1)\\
\text{Jeśli } \mathcal{X} \neq \emptyset, \text{ to} & f(\bigcap \mathcal{X}) & \subseteq & \bigcap\{f(X) \mid X \in \mathcal{X}\} & (2)\\
 & f^{-1}(\bigcup \mathcal{Y}) & = & \bigcup\{f^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\} & (3)\\
\text{Jeśli } \mathcal{Y} \neq \emptyset, \text{ to} & f^{-1}(\bigcap \mathcal{Y}) & = & \bigcap\{f^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\} & (4)
\end{array}$$

Pytanie 58. Czy symbol „$\subseteq$” we wzorze (2) można zastąpić symbolem „$=$”?

Zadanie 507. Niech $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{array}{rcl}
f(A \cup B) & = & f(A) \cup f(B)\\
f(A \cap B) & ? & f(A) \cap f(B)\\
f^{-1}(f(A)) & ? & A
\end{array}$$

Zadanie 508. Niech $f : X \to Y$, $C, D \subseteq Y$. Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{array}{rcl}
f^{-1}(C \cap D) & = & f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)\\
f^{-1}(C \cup D) & = & ?\\
f(f^{-1}(C)) & ? & C\\
f(f^{-1}(C)) & = & ?
\end{array}$$

Zadanie 509. Niech $f : X \to Y$ będzie bijekcją, a $g : Y \to X$ funkcją odwrotną do f. Udowodnij, że $f^{-1}(C) = g(C)$ dla dowolnego $C \subseteq Y$.

5

Relacje równoważności

Definicja 59. Relacja $R \subseteq A \times A$ jest

- *zwrotna*, jeśli aRa dla każdego $a \in A$,
- *symetryczna*, jeśli $aRb \Rightarrow bRa$ dla każdych $a, b \in A$,
- *przechodnia*, jeśli $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ dla wszelkich $a, b, c \in A$.

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy *relacją równoważności*.

Definicja 60. *Klasą abstrakcji* elementu $a \in A$ względem relacji równoważności $\sim \subseteq A \times A$ nazywamy zbiór

$$[a]_\sim \quad = \quad \{b \in A \mid a \sim b\}.$$

Definicja 61. Mówimy, że rodzina zbiorów $\{X_i\}_{i \in I}$ jest *podziałem* zbioru A, jeśli

1. zbiory X_i są niepuste:

   $$X_i \neq \emptyset \text{ dla każdego } i \in I,$$

2. zbiory X_i pokrywają zbiór A:

   $$\bigcup_{i \in I} X_i = A,$$

3. zbiory X_i są parami rozłączne:

   $$X_i \cap X_j = \emptyset,$$

   dla wszelkich $i, j \in I$, takich, że $i \neq j$.

Definicja 62. Niech dane będą dwa podziały $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ zbioru A. Mówimy, że podział $\mathcal{P}_1$ jest *drobniejszy* od podziału $\mathcal{P}_2$, jeśli dla każdego $X \in \mathcal{P}_1$ istnieje $Y \in \mathcal{P}_2$, taki, że $X \subseteq Y$.

Lemat 63. Dla dowolnej relacji równoważności $\sim \subseteq A \times A$ i elementów $a, b \in A$

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad [a]_\sim = [b]_\sim .$$

Twierdzenie 64 (Zasada Abstrakcji).

1. Klasy abstrakcji dowolnej relacji równoważności tworzą podział zbioru A.
2. Dla każdego podziału zbioru A istnieje dokładnie jedna relacja równoważności, której klasy abstrakcji tworzą ten podział.

Przykład 65. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $c, d \neq 0$. Definiujemy relację $\sim \subseteq \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})^2$ wzorem

$$\langle a, b\rangle \sim \langle c, d\rangle \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c.$$

Relacja $\sim$ jest relacją równoważności na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Dowód polega na sprawdzeniu wprost z definicji, że $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Zadanie 510. Używając kwantyfikatorów, spójników logicznych $\vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, oraz wyrażeń postaci $x \in A$, $x \notin A$, $R(x, y)$ i $\neg R(x, y)$ zapisz, że relacja R nie jest relacją równoważności na zbiorze A.

Zadanie 511. Napisz bez używania znaku negacji formuły mówiące, że

1. Rodzina $\{X_i\}_{i \in I}$ nie jest podziałem zbioru A. Wolno używać symbolu $\neq$.
2. Podział $\mathcal{P}_1$ nie jest drobniejszy od podziału $\mathcal{P}_2$. Wolno używać symbolu $\not\subseteq$.

Zadanie 512. Wykaż, że jeśli podział $\mathcal{P}_1$ jest drobniejszy od podziału $\mathcal{P}_2$, to dla każdego $X \in \mathcal{P}_2$ istnieje rodzina $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}_1$, taka, że $X = \bigcup \mathcal{R}$.

Zadanie 513. Niech A będzie ustalonym niepustym zbiorem. Czy prawdą jest, że dla dowolnej relacji $R \subseteq A^2$

$$\phi(R) \Rightarrow \phi(RR),$$

gdzie RR oznacza złożenie relacji R ze sobą, a $\phi(R)$ oznacza, że relacja R jest

1. zwrotna na zbiorze A,
2. symetryczna na zbiorze A,
3. przechodnia na zbiorze A,
4. antysymetryczna na zbiorze A.

Zadanie 514. Niech R będzie relacją binarną. Które z poniższych stwierdzeń są prawdziwe:

1. $RR \subseteq R$,
2. $RR = R$,
3. $RR \supseteq R$,

jeżeli relacja R jest

1. zwrotna?
2. symetryczna?
3. przechodnia?

Zadanie 515. Wykaż, że jeśli R jest relacją zwrotną i przechodnią, to $R^n = R$ dla każdego $n \geq 1$.

Zadanie 516. Relacje R i S są relacjami równoważności na tym samym zbiorze. Czy $R \cup S$, $R \cap S$, $R \setminus S$, $R \dot{-} S$ też są relacjami równoważności?

Zadanie 517. Niech R i S będą relacjami równoważności na tym samym zbiorze. Udowodnij, że $R \cup S$ jest relacją równoważności wtedy i tylko wtedy, gdy $R \cup S = RS$.

Zadanie 518. Niech $\mathcal{R}$ będzie pewną rodziną relacji równoważności określonych na pewnym zbiorze X. Czy $\bigcup \mathcal{R}$ i $\bigcap \mathcal{R}$ są relacjami równoważności na X?

Zadanie 519. Niech $R \subseteq A^2$ będzie dowolną relacją i niech R^0 będzie relacją równości na A (to znaczy $\langle x, y \rangle \in R^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$). Wykaż, że $R \cup R^0 \cup R^{-1}$ jest relacją zwrotną i symetryczną.

Zadanie 520. Niech $R \subseteq A^2$ będzie pewną relacją binarną na zbiorze A oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{S \subseteq A^2 \mid S \text{ jest przechodnia} \wedge R \subseteq S\}, \\ R^+ &= \bigcap \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Pokaż, że

1. $R \subseteq R^+$,
2. jeśli S jest relacją przechodnią taką, że $R \subseteq S$, to $R^+ \subseteq S$,
3. R^+ jest relacją przechodnią.

Relacja R^+ jest zatem najmniejszą (w sensie zawierania zbiorów) relacją przechodnią zawierającą relację R.

Definicja 66. Relację R^+ nazywamy *przechodnim (tranzytywnym) domknięciem* R.

Zadanie 521. Niech $Q \subseteq A^2$ będzie dowolną relacją, $Q^1 = Q$ i niech $Q^{n+1} = Q^n Q$ dla $n \geq 1$. Kładziemy $\bar{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q^n$. Wykaż, że $\bar{Q}$ jest relacją przechodnią.

Zadanie 522. Wykaż, że relacja $\bar{Q}$ z poprzedniego zadania jest przechodnim domknięciem relacji Q.

Zadanie 523. Niech $R \subseteq A^2$ będzie pewną relacją binarną na zbiorze A oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \{S \subseteq A^2 \mid S \text{ jest zwrotna i przechodnia} \wedge R \subseteq S\}, \\ R^* &= \bigcap \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Pokaż, że

1. $R \subseteq R^*$,
2. jeśli S jest relacją zwrotną i przechodnią taką, że $R \subseteq S$, to $R^* \subseteq S$,
3. R^* jest relacją zwrotną i przechodnią.

Relacja R^* jest zatem najmniejszą (w sensie zawierania zbiorów) relacją zwrotną i przechodnią zawierającą relację R.

Definicja 67. Relację R^* nazywamy *zwrotnym i przechodnim domknięciem* R.

Zadanie 524. Niech $Q \subseteq A^2$ będzie dowolną relacją, $Q^0 = I$, gdzie I jest relacją równości na A i niech $Q^{n+1} = Q^n Q$ dla $n \geq 0$. Kładziemy $\hat{Q} = \bigcup_{n=0}^{\infty} Q^n$. Wykaż, że $\hat{Q}$ jest relacją zwrotną i przechodnią.

Zadanie 525. Wykaż, że relacja $\hat{Q}$ z poprzedniego zadania jest zwrotnym i przechodnim domknięciem relacji Q.

Zadanie 526. Korzystając z zadań poprzednich wykaż, że jeśli R jest dowolną relacją oraz $Q = R \cup R^{-1}$, to Q^* jest relacją równoważności.

Zadanie 527. Udowodnij, że jeśli R jest dowolną relacją oraz $Q = R \cup R^{-1}$, to Q^* jest najmniejszą (w sensie relacji inkluzji) relacją równoważności zawierającą relację R.

Zadanie 528. Udowodnij, że jeżeli R jest relacją taką, że R^* zawiera R^{-1}, to R^* jest relacją równoważności.

Zadanie 529. Dane jest przekształcenie $f : A \to B$. W zbiorze A definiujemy relację $\sim$ wzorem

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(y).$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, by $\sim$ była identycznością na A.

Zadanie 530. Dane jest przekształcenie $f : A \to B$ oraz relacja równoważności R na B. W zbiorze A definiujemy relację $\sim$ wzorem

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \langle f(x), f(y)\rangle \in R.$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Zadanie 531. Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze czteroelementowym? Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze sześcioelementowym?

Zadanie 532. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ definiujemy relacje R_1, R_2, R_3 i R_4 w następujący sposób:

$f R_1 g$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$f(57) = g(57)$,
$f R_2 g$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$f(57) - g(57)$ jest podzielne przez 57 ,
$f R_3 g$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$f(n) = g(n)$ dla nieskończenie wielu $n \in \mathbb{N}$,
$f R_4 g$	wtedy i tylko wtedy, gdy	$f(n) \neq g(n)$ dla skończenie wielu $n \in \mathbb{N}$.

Która z relacji R_1, R_2, R_3 i R_4 jest relacją równoważności?

W poniższych zadaniach sprawdź, dla jakich dodatnich liczb naturalnych k podane relacje na zbiorze $\mathbb{N}$ są relacjami równoważności. Opisz ich klasy abstrakcji. Napis $k \mid m$ oznacza, że m jest podzielne przez k.

Zadanie 533. $x R_1 y \Leftrightarrow k \mid (x + y)$

Zadanie 534. $x R_2 y \Leftrightarrow k \mid (x - y)$

Zadanie 535. $x R_3 y \Leftrightarrow x - y = k$

Zadanie 536. Czy relacja R określona na zbiorze wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach naturalnych wzorem

$$pRq \quad \Leftrightarrow \quad \text{wielomian } p - q \text{ ma wszystkie współczynniki parzyste}$$

jest relacją równoważności?

Zadanie 537. Dany jest zbiór X i jego podzbiór $C \subseteq X$. Czy relacja R określona na $\mathcal{P}(X)$ wzorem

$$ARB \quad \Leftrightarrow \quad A \dot{-} B \subseteq C$$

jest relacją równoważności? Jeśli tak, opisz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 538. W zbiorze wszystkich zbieżnych ciągów nieskończonych o wyrazach wymiernych wprowadzamy relację

$$\bar{a}R\bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

Pokaż, że R jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

W poniższych zadaniach udowodnij, że podane relacje $R \subseteq X \times X$ są relacjami równoważności. Opisz ich klasy abstrakcji.

Zadanie 539. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$ARB \quad \Leftrightarrow \quad A \dot{-} B \text{ jest zbiorem skończonym.}$$

Zadanie 540. $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\langle x_1, y_1\rangle R\langle x_2, y_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad x_1 - y_1 = x_2 - y_2.$$

Zadanie 541. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\langle x_1, y_1\rangle R\langle x_2, y_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2.$$

Zadanie 542. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\langle x_1, y_1\rangle R\langle x_2, y_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |x_1| + |y_1| = |x_2| + |y_2|.$$

Zadanie 543. Na rodzinie podzbiorów zbioru liczb naturalnych definiujemy relację $\sim$ następująco:

$$A \sim B \quad \Leftrightarrow \quad A = B \vee 0 \notin A \cup B.$$

Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim$.

6

Teoria mocy

6.1. Równoliczność zbiorów

Definicja 68. Zbiory A i B *są równoliczne*, jeżeli istnieje bijekcja $f : A \to B$. Piszemy wówczas $A \sim B$.

Przykład 69. Następujące zbiory są równoliczne:

- zbiór par liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$;
- zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych parzystych: $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$;
- dowolny niepusty przedział $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ i odcinek $(0, 1)$: $(a, b) \sim (0, 1)$.

Niech $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ oznaczają zbiory, odpowiednio, liczb naturalnych, całkowitych, wymiernych i rzeczywistych, $m \nmid n$ oznacza, że m nie dzieli n oraz

$$
\begin{array}{rll}
(a, b) & \text{oznacza zbiór} & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a, b) & \text{oznacza zbiór} & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\
(a, b] & \text{oznacza zbiór} & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\
[a, b] & \text{oznacza zbiór} & \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\
(a, \infty) & \text{oznacza zbiór} & \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
O((a, b), r) & \text{oznacza zbiór} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}, \\
\mathbb{N}^+ & \text{oznacza zbiór} & \{n \in \mathbb{N} \mid n > 0\}, \\
\mathbb{Q}^+ & \text{oznacza zbiór} & \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}.
\end{array}
$$

Konstruując odpowiednie bijekcje udowodnij, że zbiory podane w poniższych zadaniach są równoliczne.

Zadanie 544. $[0, 1)$ oraz $O((0, 0), 1)$

Zadanie 545. $(0, 1)$ oraz $\mathbb{R}$

Zadanie 546. $[0, 1)$ oraz $[0, \infty)$

Zadanie 547. $(0, 1)$ oraz $[0, 1)$

Zadanie 548. $[0, 1)$ oraz $\mathbb{R}$

Zadanie 549. $[0, 1)$ oraz $(0, \infty)$

Zadanie 550. $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Zadanie 551. $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Q} \setminus [0,1]$

Zadanie 552. $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Z}$

Zadanie 553. $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}^2$

Zadanie 554. $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N}^3$

Zadanie 555. $\mathbb{N}$ oraz $\{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid m \nmid n\}$

Zadanie 556. $\{\langle n, m\rangle \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \mid m \nmid n\}$ oraz $\mathbb{Q}^+$

Zadanie 557. $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{Q}$

Zadanie 558. $\mathbb{Z} \times ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$ oraz $\mathbb{Q}$

Zadanie 559. $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Zadanie 560. $(0, 1] \times \mathbb{Z}$ oraz $\mathbb{R}$

Zadanie 561. $(0, 1) \times (0, 1)$ oraz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Zadanie 562. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ oraz $\underline{2}^{\mathbb{N}}$

Zadanie 563. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ oraz $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Zadanie 564. $\mathbb{N}$ oraz $\{f : \mathbb{N} \to \{0, 1\} \mid f$ jest nierosnąca$\}$

Zadanie 565. $\mathbb{N}$ oraz $\{f : \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4\} \mid f$ jest niemalejąca$\}$

Zadanie 566. $\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\}$ oraz $\mathbb{Z}$

Zadanie 567. $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

Zadanie 568. $(0, 1)$ oraz $(0, 1) \times (0, 1)$

Zadanie 569. $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Zadanie 570. $\mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

6.2. Własności pojęcia równoliczności zbiorów

Twierdzenie 70. Dla dowolnych zbiorów A, B, C

1. $A \sim A$,
2. $A \sim B \Rightarrow B \sim A$,
3. $(A \sim B \wedge B \sim C) \Rightarrow A \sim C$,

Zadanie 571. Wykaż, że jeśli $A_1 \sim A_2$, to

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A_1) &\sim \mathcal{P}(A_2), & (1)\\ B^{A_1} &\sim B^{A_2}, & (2)\\ A_1^B &\sim A_2^B, & (3)\\ A_1 \times B &\sim A_2 \times B. & (4) \end{aligned}$$

Zadanie 572. Wykaż, że

$$\begin{aligned} (A^B)^C &\sim A^{(B\times C)}, & (1)\\ (A\times B)^C &\sim A^C \times B^C, & (2)\\ A\times\{a\} &\sim A, & (3)\\ A^{\{a\}} &\sim A, & (4) \end{aligned}$$

dla dowolnych zbiorów A, B, C i jednoelementowego zbioru $\{a\}$.

Zadanie 573. Wykaż, że jeśli $A_1 \cap B_1 = A_2 \cap B_2 = \emptyset$ oraz $A_1 \sim A_2$ i $B_1 \sim B_2$, to

$$\begin{aligned} A_1 \cup B_1 &\sim A_2 \cup B_2, & (1)\\ C^{A_1\cup B_1} &\sim C^{A_2} \times C^{B_2}. & (2) \end{aligned}$$

Powyższe własności uwalniają nas od konieczności żmudnego konstruowania odpowiednich bijekcji, pozwalając w łatwy sposób wyprowadzać nowe fakty na temat równoliczności zbiorów z już poznanych. Dla przykładu skoro $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ (zadanie 557), to na mocy własności (2) z zadania 571 wnioskujemy, że $\mathbb{R}^\mathbb{N} \sim \mathbb{R}^\mathbb{Q}$.

Zadanie 574. Przyjmując za wiadome, że $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oraz $\mathbb{R} \sim \{0,1\}^\mathbb{N}$ udowodnij, że $\mathbb{R}^\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$.

Zadanie 575. Dla jakich zbiorów A, B i C:

1. $A^B \sim B^A$?
2. $A^{B\cup C} \sim A^B \cup A^C$?

Zadanie 576. Czy istnieją zbiory A, B, C, D, takie, że $A \not\sim B$ oraz $C \not\sim D$, ale $A^C \sim B^D$?

6.3. Zbiory skończone

Definicja 71. Napis $\underline{n}$ oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od n, tj. zbiór $= \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Definicja 72. Zbiór A jest *zbiorem skończonym*, jeśli istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, taka, że $A \sim \underline{n}$. Zbiór, który nie jest skończony nazywamy *nieskończonym*.

Twierdzenie 73.

1. Dla żadnego $n \in \mathbb{N}$ nie istnieje funkcja różnowartościowa z $\underline{n+1}$ w $\underline{n}$.
2. Jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa z $\underline{m}$ w $\underline{n}$, to $\underline{m} \subseteq \underline{n}$.
3. Jeżeli $\underline{m} \sim \underline{n}$, to $m = n$.
4. Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ zachodzi $\underline{m} \not\sim \mathbb{N}$.

Jeśli więc zbiór A jest skończony, to istnieje dokładnie jedna liczba naturalna n, taka, że $A \sim \underline{n}$.

Definicja 74. Niech A będzie zbiorem skończonym. Liczbę n, taką, że $A \sim \underline{n}$ nazywamy *liczbą elementów* zbioru A i oznaczamy $|A|$. Liczbę elementów zbioru $|A|$ nazywamy też *mocą* zbioru A zwłaszcza gdy jednocześnie zajmujemy się zbiorami skończonymi i nieskończonymi.

Zbiór pusty ma zatem 0 elementów. Zbiór ma n elementów, jeżeli jego elementy można ponumerować bez powtórzeń liczbami $0, \ldots, n-1$.

Zadanie 577. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych $m, n \in \mathbb{N}$ jest

$$(\underline{m} \times \{0\}) \cup (\underline{n} \times \{1\}) \quad \sim \quad \underline{m+n}.$$

Wyprowadź stąd wniosek, że dla dowolnych skończonych rozłącznych zbiorów A i B zachodzi równość $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Zadanie 578. Wykaż, że jeśli zbiory A i B są skończone, to $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Zadanie 579. Wykaż, że jeśli zbiory A i B są skończone, to $|A^B| = |A|^{|B|}$.

Zadanie 580. Niech $A^1 = A$ oraz $A^{n+1} = A^n \times A$. Wykaż, że $A^{\underline{n}} \sim A^n$.

Zadanie 581. Niech $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru X. Niech (1) oznacza, że A_0 jest zbiorem skończonym, oraz (2) oznacza, że dla każdego n zachodzi $\bigcap_{i=0}^{n} A_i \neq \emptyset$. Pokaż, że: a) jeśli zachodzi (1) i (2), to $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \neq \emptyset$, b) istnieje rodzina zbiorów $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ spełniająca warunek (2), taka, że $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i = \emptyset$.

Zadanie 582. Niech $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ będzie rodziną skończonych podzbiorów zbioru X, taką, że $A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_k} \neq \emptyset$ dla dowolnych $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Pokaż, że $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \emptyset$.

Zadanie 583. Dane są dwie funkcje $f : A \to B$ i $g : B \to A$, obie typu „na".

1. Czy z powyższych założeń wynika, że f i g są bijekcjami?
2. Jeśli dodatkowo A i B są zbiorami skończonymi, to czy wówczas f i g są bijekcjami?

Zadanie 584. Dane są zbiory $A_1, \ldots, A_n$. Przypuśćmy, że $\mathcal{R}$ jest najmniejszą rodziną zbiorów o tej własności, że $A_i \in \mathcal{R}$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz jeśli $X, Y \in \mathcal{R}$, to $X \cup Y \in \mathcal{R}$. Wyznacz maksymalną moc rodziny $\mathcal{R}$.

Zadanie 585. Dane są zbiory $A_1, \ldots, A_n$. Przypuśćmy, że $\mathcal{R}$ jest najmniejszą rodziną zbiorów o tej własności, że $A_i \in \mathcal{R}$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz jeśli $X, Y \in \mathcal{R}$, to $X \cup Y \in \mathcal{R}$ i $X \cap Y \in \mathcal{R}$. Wyznacz maksymalną moc rodziny $\mathcal{R}$. Dla jakich zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ wartość $|\mathcal{R}|$ jest największa?

Zadanie 586. Dane są zbiory $A_1, \ldots, A_n$. Przypuśćmy, że $\mathcal{R}$ jest najmniejszą rodziną zbiorów o tej własności, że $A_i \in \mathcal{R}$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz jeśli $X, Y \in \mathcal{R}$, to $X \cup Y \in \mathcal{R}$ i $X \setminus Y \in \mathcal{R}$. Wyznacz maksymalną moc rodziny $\mathcal{R}$. Dla jakich zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ wartość $|\mathcal{R}|$ jest największa?

Definicja 75. Przyjmujemy następujące oznaczenia: dla dowolnego zbioru $X \subseteq A$ napis X^1 oznacza zbiór X, zaś napis X^0 oznacza dopełnienie zbioru X do zbioru A, tj. zbiór $A \setminus X$.

Zadanie 587. Dany jest zbiór A i dodatnia liczba naturalna k oraz zbiory $X_i \subseteq A$ dla $i = 1, \ldots, k$, takie, że dla każdej funkcji $f : \{1, \ldots, k\} \to \{0, 1\}$ zbiór $\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{f(i)}$ ma co najwyżej 1 element. Wyznacz maksymalną moc zbioru A.

Definicja 76. Mówimy, że funkcja dwuargumentowa $f : A \times B \to C$ *istotnie zależy od każdego z argumentów*, jeśli istnieją elementy $a \in A$ i $b_1, b_2 \in B$, takie, że $f(a, b_1) \neq f(a, b_2)$ oraz istnieją elementy $a_1, a_2 \in A$ i $b \in B$, takie, że $f(a_1, b) \neq f(a_2, b)$.

Zadanie 588. Ile jest dwuargumentowych funkcji logicznych istotnie zależnych od każdego z argumentów? Ile jest funkcji $f : A \times B \to C$ istotnie zależnych od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów A, B, C ma 3 elementy?

Zadanie 589. Ile jest funkcji $f : A \times B \to C$ istotnie zależnych od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów A, B ma 4 elementy, a C ma n elementów?

Zadanie 590. a) Na prywatce u Jurka jest co najmniej jedna osoba znająca co najmniej jeden z sześciu języków: polski, angielski, francuski, niemiecki, rosyjski i hiszpański. Ponadto nie ma dwóch osób, które znałyby dokładnie te same języki. Oczywiście każdy gość Jurka zna co najmniej dwa języki. Oszacuj z góry i z dołu liczbę osób na prywatce u Jurka.

b) Na prywatce u Agaty jest co najmniej jedna osoba znająca co najmniej jeden z n języków. Ponadto nie ma dwóch osób, które znałyby dokładnie te same języki. Oczywiście każdy gość Agaty zna co najmniej jeden język. Oszacuj z góry i z dołu liczbę osób na prywatce u Agaty.

6.3.1. Wzór włączeń i wyłączeń

Zadanie 591. Pośród członków pewnego klubu lingwistycznego każdy uczy się francuskiego, niemieckiego lub hiszpańskiego. Wiadomo, że 20 uczy się francuskiego, 12 francuskiego i hiszpańskiego, 16 niemieckiego, 16 hiszpańskiego, 4 francuskiego i niemieckiego, 7 niemieckiego i hiszpańskiego, 3 wszystkich trzech języków. Ilu członków liczy klub? Ilu z nich uczy się dokładnie dwóch języków?

Zadanie 592. Korzystając z tego, iż jeżeli zbiory skończone A i B są rozłączne, to $|A \cup B| = |A| + |B|$ udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C (niekoniecznie rozłącznych):

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A| + |B| - |A \cap B| \\ |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Zadanie 593. Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych $\{A_i\}_{i=1}^n$ jest prawdziwy tzw. *wzór włączeń i wyłączeń*:

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}} (-1)^{j+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Zadanie 594. Rodzina $\{A_i\}_{i=1}^n$ jest rodziną zbiorów *k-rozłącznych*, jeśli dla każdego rosnącego ciągu liczb naturalnych $\langle i_1, i_2, \dots, i_k\rangle$ takiego, że $i_k \leq n$, mamy

$$\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} = \emptyset.$$

Udowodnij, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych k-rozłącznych $\{A_i\}_{i=1}^n$ jest prawdziwy wzór:

$$\left|\bigcup_{i=1}^n A_i\right| = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ |I| = j}} (-1)^{j+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

6.4. Moce zbiorów nieskończonych

Symbol $|A|$ zdefiniowaliśmy jedynie dla zbiorów skończonych. W teorii mocy definiuje się obiekty oznaczające „liczbę elementów” zbiorów nieskończonych, zwane *liczbami kardynalnymi*. Pozwala to rozszerzyć odwzorowanie $|\cdot|$ na zbiory nieskończone. Robimy to w ten sposób, że dwóm zbiorom przypisujemy tę samą liczbę kardynalną wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory te są równoliczne. Wartość $|A|$ nazywamy wówczas *mocą* zbioru A. Moc zbioru liczb naturalnych (a więc i dowolnego zbioru równolicznego ze zbiorem liczb naturalnych) oznaczamy $\aleph_0$ (czytamy „alef zero”). Poniżej pokazujemy, że $\mathbb{N} \not\sim \mathbb{R}$. Moc zbioru liczb rzeczywistych nazywamy continuum i oznaczamy przez $\mathfrak{c}$. Mamy zatem $|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ oraz $\aleph_0 \neq \mathfrak{c}$.

Definicja 77. Zbiór jest *przeliczalny*, jeśli jest skończony lub jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych.

Definicja 78. Zbiór równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych nazywamy *zbiorem mocy continuum*.

Nierównolicznych zbiorów nieskończonych jest nieskończenie wiele. Jest więc nieskończenie wiele różnych nieskończonych liczb kardynalnych. Można na nich określić operacje dodawania, mnożenia i potęgowania oraz relację porządku mające podobne własności, jak odpowiadające im operacje na liczbach naturalnych. Teoria takich liczb nazywa się *arytmetyką liczb kardynalnych*. Tak subtelne teorie mają jednak niewiele zastosowań w informatyce, dlatego nam wystarczą jedynie pojęcia równoliczności, przeliczalności i mocy continuum. Tam, gdzie nie jest to niezbędne, nie należy więc używać pojęcia mocy $|A|$ zbioru A (formalnie nie zdefiniowaliśmy przecież tego obiektu!). W szczególności zamiast pisać $|A| = |B|$ lepiej napisać $A \sim B$. Oba wyrażenia oznaczają bowiem, że zbiory A i B są równoliczne, drugie jednak nie odwołuje się do (dosyć skomplikowanego) pojęcia liczby kardynalnej.

Definicja 79. Mówimy, że moc zbioru A jest nie większa niż moc zbioru B i piszemy $|A| \leq |B|$, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \to B$.

Definicja 80. Mówimy, że moc zbioru A jest mniejsza niż moc zbioru B i piszemy $|A| < |B|$, jeśli $|A| \leq |B|$ oraz $A \not\sim B$.

Uwagi na temat oznaczenia mocy $|A|$ zbioru A dotyczą też porównywania mocy zbiorów. Symbolu $\leq$ nie traktujemy jako binarnej relacji zachodzącej pomiędzy tajemniczymi obiektami $|A|$ i $|B|$, same napisy $|A|$ i $|B|$ nie oznaczają niczego, zaś napis $|A| \leq |B|$ oznacza jedynie, że zachodzi określona wyżej binarna relacja między zbiorami A i B (tj. że istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \to B$). Tak dziwny sposób zapisu tej relacji wynika z konwencji przyjętych w teorii mocy, w której napisy $|A|$ i $|B|$ faktycznie oznaczają pewne obiekty, zaś $\leq$ oznacza obiekt „podobny” do relacji binarnej. Teorii tej nie będziemy tu jednak rozwijać.

Twierdzenie 81.

1. Dla dowolnego zbioru A zachodzi $|A| \leq |A|$.
2. Jeśli $|A| \leq |B|$ i $|B| \leq |C|$, to $|A| \leq |C|$.
3. Jeśli $n < m$, to $|\underline{n}| < |\underline{m}|$.
4. Dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi $|\underline{n}| < |\mathbb{N}|$.

Twierdzenie 82 (Cantor-Bernstein). Jeśli $|A| \leq |B|$ oraz $|B| \leq |A|$, to $|A| = |B|$.

Twierdzenie 83. Zbiór liczb rzeczywistych jest równoliczny ze zbiorem $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Zatem zbiór $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ ma moc kontinuum.

Definicja 84. Jeśli $X \subseteq A$, to $f : A \to \{0, 1\}$ jest *funkcją charakterystyczną* zbioru X, jeśli

$$f(a) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } a \notin X, \\ 1, & \text{gdy } a \in X, \end{cases}$$

dla dowolnego $a \in A$.

Fakt 85. Dla dowolnego zbioru A zachodzi $\underline{2}^A \sim \mathcal{P}(A)$.

Twierdzenie 86. Niech A i B będą zbiorami, przy czym $|B| \geq 2$. Wtedy

$$|\mathcal{P}(A)| \leq |B^A|.$$

Twierdzenie 87 (Cantor). Dla żadnego zbioru A nie istnieje funkcja z A *na* zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$.

Dowód. Przypuśćmy przeciwnie, że pewna funkcja $f : A \to \mathcal{P}(A)$ przekształca A *na* $\mathcal{P}(A)$. Niech

$$A_0 = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}.$$

Ponieważ $A_0 \subseteq A$ i f odwzorowuje A *na* $\mathcal{P}(A)$, więc istnieje $a_0 \in A$, takie, że $f(a_0) = A_0$. Mamy wtedy

$$a_0 \in A_0 \iff a_0 \in f(a_0) \iff a_0 \notin A_0.$$

Założenie istnienia funkcji f doprowadziło do sprzeczności. ■

Dowód (twierdzenia Cantora dla przypadku $A = \mathbb{N}$). Przypuśćmy przeciwnie, że pewna funkcja $f : \mathbb{N} \to \underline{2}^{\mathbb{N}}$ przekształca $\mathbb{N}$ *na* $\underline{2}^{\mathbb{N}}$. Tworzymy nieskończoną tablicę

$$\begin{array}{cccccc}
\boxed{(\mathrm{f}(0))(0)} & (f(0))(1) & (f(0))(2) & (f(0))(3) & (f(0))(4) & \cdots \\
(f(1))(0) & \boxed{(\mathrm{f}(1))(1)} & (f(1))(2) & (f(1))(3) & (f(1))(4) & \cdots \\
(f(2))(0) & (f(2))(1) & \boxed{(\mathrm{f}(2))(2)} & (f(2))(3) & (f(2))(4) & \cdots \\
(f(3))(0) & (f(3))(1) & (f(3))(2) & \boxed{(\mathrm{f}(3))(3)} & (f(3))(4) & \cdots \\
(f(4))(0) & (f(4))(1) & (f(4))(2) & (f(4))(3) & \boxed{(\mathrm{f}(4))(4)} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Tworzymy nową funkcję charakterystyczną

$$g(i) \quad = \quad 1 - (f(i))(i)$$

dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Wtedy $g \neq f(i)$ dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$, gdyż $g(i) = 1 - (f(i))(i) \neq (f(i))(i)$. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że f jest *na*. ■

Twierdzenie 88. Dla każdego A jest $|\mathcal{P}(A)| > |A|$. Jeśli $|B| \geq 2$, to $|B^A| > |A|$.

Zadanie 595. Udowodnij, że $1 \leq |A| \leq |B|$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f : B \to A$, która jest „na". (Zadanie wymaga pewnika wyboru.)

Zadanie 596. Udowodnij, że jeżeli $A \subseteq B$, to $|A| \leq |B|$.

Zadanie 597. Czy $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ i $|A_1| \leq |B_1|$, implikuje, że $|A_2| \leq |B_2|$?

Zadanie 598. Udowodnij, że A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera podzbiór równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych, tj. gdy istnieje zbiór $B \subseteq A$, taki, że $B \sim \mathbb{N}$. (Uwaga: zadanie jest trudne, a dowód wymaga skorzystania z pewnika wyboru).

Zadanie 599. Udowodnij, że A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoliczny ze swoim właściwym podzbiorem, tj. gdy istnieje zbiór $B \subseteq A$, taki, że $B \neq A$ i $A \sim B$. (Uwaga: zadanie jest trudne, a dowód wymaga skorzystania z pewnika wyboru).

Zadanie 600. Udowodnij, że A jest zbiorem nieskończonym wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją zbiory B i C takie, że $B \cap C = \emptyset$, $B \cup C = A$ i $A \sim B \sim C$. (Uwaga: zadanie jest trudne, a dowód wymaga skorzystania z pewnika wyboru).

Zadanie 601. Wykaż, że istnieje nieskończona rodzina zbiorów nieskończonych o tej własności, że żadne dwa spośród jej elementów nie są równoliczne.

Twierdzenie Cantora-Bernsteina pozwala ustalać równoliczność zbiorów A i B za pomocą konstrukcji dwóch funkcji różnowartościowych $f : A \to B$ i $g : B \to A$. Zbudowanie takich funkcji jest często znacznie łatwiejsze niż skonstruowanie bijekcji przekształcającej zbiór A na B.

W poniższych zadaniach konstruując dwie funkcje różnowartościowe udowodnij równoliczność podanych zbiorów.

Zadanie 602. $(0, 1]$ oraz $(0, 1]^2$

Zadanie 603. $(0, 1]$ oraz $\underline{2}^{\mathbb{N}}$

Zadanie 604. $\mathbb{N}$ oraz $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Zadanie 605. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^+$ oraz $\mathbb{Q}$

6.5. Wyznaczanie mocy zbiorów

Zadanie 606. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zbiór $\mathbb{R}^n$, gdzie $\mathbb{R}$ jest zbiorem liczb rzeczywistych, ma moc kontinuum.

Zadanie 607. Niech $R_I(x, y)$ oznacza relację

$$\exists p{\in}I \ \ ((\phi(p, x) \wedge \neg\phi(p, y)) \vee (\phi(p, y) \wedge \neg\phi(p, x)))$$

na $\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$, gdzie $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, I jest skończonym niepustym zbiorem liczb pierwszych, a $\phi(x, y)$ jest formułą $\exists z\, (x \cdot z = y)$. Niech $Q_I = (\mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+) \setminus R_I$.

a) Czy R_I jest relacją równoważności? Jeśli tak, podaj liczbę klas równoważności relacji R_I.

b) Czy Q_I jest relacją równoważności? Jeśli tak, podaj liczbę klas równoważności relacji Q_I.

Zadanie 608. Dla danej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiujemy zbiór

$$A_f \quad = \quad \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > 1\}.$$

Niech $\mathcal{A} = \{A_f \mid f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$. Znajdź moc zbiorów $\mathcal{A}$ oraz $\bigcup_{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} A_f$.

Zadanie 609. Dla ciągu nieskończonego $a = \langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ o wyrazach naturalnych określamy relację R_a w taki sposób, że dla dwóch ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych $b = \langle b_1, b_2, b_3, \ldots \rangle$ i $c = \langle c_1, c_2, c_3, \ldots \rangle$ zachodzi bR_ac, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\ (a_n = 0 \Rightarrow b_n = c_n).$$

1. Pokaż, że niezależnie od wyboru ciągu a relacja R_a jest relacją równoważności.
2. Jaka jest moc zbioru takich ciągów a, dla których wszystkie klasy abstrakcji R_a są przeliczalne?
3. Jaka jest moc zbioru takich ciągów a, dla których relacja R_a ma przeliczalnie wiele klas abstrakcji?
4. Jaka jest moc zbioru takich ciągów a, dla których relacja R_a ma kontinuum klas abstrakcji i każda z tych klas jest mocy kontinuum?
5. Jaka jest moc zbioru takich ciągów a, dla których relacja R_a ma przeliczalnie wiele klas abstrakcji i każda z tych klas jest przeliczalna?
6. Jaka jest moc zbioru takich ciągów a, dla których relacja R_a ma zarówno przeliczalne, jak i nieprzeliczalne klasy abstrakcji?

Zadanie 610. Niech $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oznacza relację taką, że

$$P(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Q}\ (x = y + q),$$

gdzie $\mathbb{Q}$ jest zbiorem liczb wymiernych.

a) Czy P jest relacją równoważności?
b) Jakie są moce klas równoważności $[r]_P$ dla liczb $r \in \mathbb{R}$? Jaka jest moc klasy równoważności $[\pi]_P$? Jak jest moc klasy równoważności $[\frac{23}{7}]$? Czy wszystkie klasy równoważności mają tę samą moc?
c) Czy rodzina klas równoważności relacji P jest przeliczalna?

Zadanie 611. Czy istnieje nieprzeliczalna rodzina $\mathcal{R}$ podzbiorów $\mathbb{N}$ taka, że dla dowolnych różnych $X, Y \in \mathcal{R}$ przekrój $X \cap Y$ jest skończony?

Zadanie 612. Niech $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ będzie dowolną rodziną podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$.

1. Czy istnieje taki nieskończony ciąg zerojedynkowy $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$, że
$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n^{i_n} \neq \emptyset?$$
2. Jaka jest maksymalna moc zbioru wszystkich ciągów $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$ spełniających powyższy wzór?

Zadanie 613. Rozważamy relację $\sim$ określoną na funkcjach ze zbioru $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ w następujący sposób:

$$f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad \exists c{>}0\ \exists k{>}0\ \forall n{>}k\ (f(n) \leq cg(n) \wedge g(n) \leq cf(n)).$$

1. Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.
2. Jaka jest moc klasy abstrakcji funkcji f takiej, że $f(n) = 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$?
3. Jaka jest moc klasy abstrakcji funkcji g takiej, że $g(n) = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$?

Zadanie 614. Dla każdej spośród relacji opisanych w zadaniu 532, która jest relacją równoważności wyznacz moc zbioru jej klas abstrakcji oraz moc każdej z jej klas.

6.6. Zbiory przeliczalne

Twierdzenie 89. Zbiór A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$ lub istnieje funkcja z $\mathbb{N}$ *na* A.

Definicja 90. *Ciągiem elementów zbioru* A nazywamy funkcję $f : \mathbb{N} \to A$.

Fakt 91. Zbiór niepusty jest przeliczalny, gdy wszystkie jego elementy można ustawić w ciąg.

Twierdzenie 92.

1. Podzbiór zbioru przeliczalnego jest przeliczalny.
2. Jeśli $f : A \to B$ oraz $X \subseteq A$ jest zbiorem przeliczalnym, to $f(X)$ też jest zbiorem przeliczalnym.
3. Jeśli A i B są przeliczalne, to $A \times B$ jest przeliczalny.
4. Jeśli $\{A_i\}_{i \in I}$ jest przeliczalną rodziną zbiorów przeliczalnych (tzn. I jest przeliczalny i każdy ze zbiorów A_i jest przeliczalny), to $\bigcup_{i \in I} A_i$ jest zbiorem przeliczalnym.

Zadanie 615. Niech $\mathcal{A}$ będzie przeliczalną rodziną zbiorów przeliczalnych. Pokaż, że $\bigcup \mathcal{A}$ i $\bigcap \mathcal{A}$ są zbiorami przeliczalnymi.

Zadanie 616. Niech $A \subseteq \mathbb{N}$ będzie zbiorem nieskończonym. Zdefiniuj bijekcje $f : A \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N} \to A$.

Zadanie 617. Niech A będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym i niech $f : A \to B$ będzie surjekcją (odwzorowaniem "na"). Zbuduj injekcję (funkcję różnowartościową) $g : B \to A$.

Zadanie 618. Udowodnij, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.

Zadanie 619. Czy istnieje zbiór A, taki, że $\mathcal{P}(A) \sim \mathbb{N}$?

Zadanie 620. Niech $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$. Czy:

1. $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$,
2. $A_1 \cap A_2 \sim B_1 \cap B_2$,
3. $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$?

W punkcie 3. możesz założyć, że zbiory A_1, A_2, B_1 i B_2 są przeliczalne (zadanie bez tego założenia jest trudne i wymaga użycia pewnika wyboru). Czy odpowiedzi na powyższe pytania ulegną zmianie, jeśli założymy, że jeden ze zbiorów A_1 lub A_2 jest nieskończony? Czy ulegną one zmianie jeśli założymy, że oba zbiory są nieskończone?

Zadanie 621. Zbiory A i B są przeliczalne oraz zbiór $A \times B$ jest nieskończony. Co można powiedzieć o mocach zbiorów A i B?

Zadanie 622. Udowodnij, że zbiór wszystkich skończonych ciągów o elementach ze skończonego zbioru A jest przeliczalny.

Zadanie 623. Udowodnij, że zbiór wszystkich skończonych ciągów o elementach ze przeliczalnego zbioru A jest przeliczalny.

Zadanie 624. Udowodnij, że zbiór wielomianów jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych jest przeliczalny.

Zadanie 625. Wykaż, że zbiór słabo rosnących funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest nieprzeliczalny (funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo rosnąca*, jeśli $x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ dla wszelkich $x, y \in \mathbb{N}$).

Zadanie 626. Jaka jest moc zbioru nieskończonych ciągów o wyrazach wymiernych?

Zadanie 627. Jaka jest moc zbioru nieskończonych ciągów o wyrazach wymiernych, stałych od pewnego miejsca?

Zadanie 628. Ile jest ciągów liczb wymiernych zbieżnych do 1?

Zadanie 629. Ile jest rosnących ciągów liczb wymiernych zbieżnych do 1?

Zadanie 630. Czy zbiór nierosnących ciągów o wyrazach naturalnych jest przeliczalny? (Ciąg $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ jest nierosnący, jeśli $a_i \geq a_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$).

Zadanie 631. Wykaż, że zbiór słabo malejących funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest przeliczalny (funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *słabo malejąca*, jeśli $x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ dla wszelkich $x, y \in \mathbb{N}$).

Zadanie 632. Liczba a jest punktem skupienia ciągu $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ liczb rzeczywistych, jeśli istnieje podciąg (x_{j_i}) ciągu (x_i) zbieżny do a. Ile ciąg może mieć punktów skupienia?

Zadanie 633. Ile jest bijekcji $f : A \to A$, gdy zbiór A jest przeliczalny?

Zadanie 634. Liczba rzeczywista x jest *algebraiczna*, jeśli istnieje wielomian jednej zmiennej o współczynnikach wymiernych, taki, że x jest jego pierwiastkiem. Udowodnij, że zbiór liczb algebraicznych jest przeliczalny.

Zadanie 635. Jaka jest moc zbioru wszystkich nieskończonych niemalejących ciągów o wyrazach naturalnych? Jaka jest, dla danego n, moc zbioru wszystkich nieskończonych niemalejących ciągów o wyrazach ze zbioru $\{0, \ldots, n-1\}$?

Zadanie 636. Wykaż, że jeśli $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze przeliczalnym A, to zbiór klas równoważności $A/_{\sim} = \{[a]_{\sim} : a \in A\}$ jest przeliczalny.

Zadanie 637. Wiadomo, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze A, zbiór klas równoważności $A/_{\sim}$ jest przeliczalny oraz dla każdego $a \in A$, klasa równoważności $[a]_{\sim}$ elementu a jest przeliczalna. Wykaż, że zbiór A jest przeliczalny.

Zadanie 638. Czy zbiór relacji równoważności na zbiorze przeliczalnym jest zbiorem przeliczalnym?

Zadanie 639. Dany jest nieskończony przeliczalny zbiór A i liczba $n \in \mathbb{N}$. Ile jest relacji równoważności $\sim$ na zbiorze A, takich, że dla każdego $a \in A$ klasa abstrakcji $[a]_{\sim}$ ma dokładnie n elementów?

Zadanie 640. Ile jest relacji równoważności na przeliczalnym zbiorze A takich, że wszystkie ich klasy abstrakcji są skończone?

Zadanie 641. Niech zbiory $A \cup B$ i $C \cup D$ będą przeliczalne nieskończone. Która z poniższych formuł wynika z tego założenia? Uzasadnij swoje odpowiedzi.

$$A \sim C \vee B \sim D$$
$$A \sim C \vee A \sim D \vee B \sim C \vee B \sim D$$
$$(A \sim C \wedge B \sim D) \vee (A \sim D \wedge B \sim C)$$
$$A \sim C \vee A \sim D$$

Zadanie 642. Mówimy, że ciąg liczb rzeczywistych $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rośnie szybciej* niż ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0.$$

Pokaż, że dla każdego ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje ciąg rosnący od niego szybciej. Niech $\mathfrak{S}$ będzie zbiorem ciągów liczb rzeczywistych o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje w zbiorze $\mathfrak{S}$ ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$ rosnący od niego szybciej. Wykorzystując metodę przekątniową udowodnij, że $\mathfrak{S}$ nie jest zbiorem przeliczalnym.

Zadanie 643. Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych odcinków na prostej jest przeliczalny. Pokaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych odcinków na płaszczyźnie.

Zadanie 644. Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych kół na płaszczyźnie jest przeliczalny. Pokaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych okręgów na płaszczyźnie. Koło to zbiór punktów $\langle x, y\rangle$ spełniających warunek

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2$$

dla pewnego punktu $\langle x_0, y_0\rangle$ i dodatniej liczby rzeczywistej r, a okrąg to zbiór punktów $\langle x, y\rangle$ spełniających warunek

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Zadanie 645. Ósemka, to dwa zewnętrznie styczne okręgi. Udowodnij, że każdy zbiór rozłącznych ósemek na płaszczyźnie jest przeliczalny. Czy można ułożyć na płaszczyźnie więcej niż przeliczalnie wiele rozłącznych okręgów?

Zadanie 646. T-kształt, to figura na płaszczyźnie, złożona z pary prostopadłych odcinków o niezerowej długości, z których jeden końcem styka się z drugim w miejscu różnym od końca tego drugiego (dlatego ta figura przypomina literę T). Krzyż, to figura złożona z pary nierównoległych, przecinających się odcinków niezerowej długości, które nie mają wspólnych końców. Jak wiele rozłącznych T-kształtów można ułożyć na płaszczyźnie? Jak wiele krzyży można ułożyć na płaszczyźnie?

Zadanie 647. Parasol, to bryła złożona z koła o niezerowej średnicy i prostopadłego do niego odcinka o niezerowej długości, który styka się swym końcem ze środkiem koła. Pokaż, że każdy zbiór rozłącznych parasoli w przestrzeni trójwymiarowej jest co najwyżej przeliczalny.

Zadanie 648. Ile jest wszystkich funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$? A ile jest funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ których wartość możemy obliczać przy pomocy komputera (tj. takich, dla których istnieje program komputerowy, który wczytuje liczbę naturalną n i wypisuje liczbę $f(n)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$)?

7

Relacje porządku

Definicja 93. Relacja R jest *słabo antysymetryczna*, jeśli dla dowolnych a, b

$$\text{jeśli } aRb \text{ oraz } bRa \text{ to } a = b.$$

Definicja 94. *Częściowym porządkiem* w zbiorze A nazywamy relację $\leq$ (będącą podzbiorem A^2), która jest *zwrotna*, *przechodnia* i *słabo antysymetryczna*, tzn.

- $\forall a \in, A\ (a \leq a)$,
- $\forall a, b \in A\ (a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b)$,
- $\forall a, b, c \in A\ (a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c)$.

Definicja 95. Jeśli $\leq$ jest częściowym porządkiem na A, to $a < b$ oznacza

$$a \leq b \wedge a \neq b.$$

Definicja 96. *Zbiór częściowo uporządkowany*, to zbiór A z relacją częściowego porządku $\leq$. Zbiór częściowo uporządkowany oznaczamy $\langle A, \leq \rangle$.

Przykład 97. Oto przykłady zbiorów uporządkowanych:

1. $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq \rangle$ (rodzina podzbiorów zbioru A z relacją inkluzji);
2. $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ (zbiór liczb naturalnych ze zwykłym porządkiem);
3. $\langle \mathcal{B}, \subseteq \rangle$, gdzie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$;
4. $\langle \mathbb{N}, | \rangle$, gdzie $a|b \iff \exists x (ax = b)$.

Definicja 98. Porządek częściowy $\leq$ w zbiorze A jest *liniowy*, jeśli

$$\forall a, b \in A\ (a \leq b \vee b \leq a).$$

Przykład 99. Porządkiem liniowym jest relacja $\leq$ na zbiorze liczb rzeczywistych. Relacja inkluzji $\subseteq$ na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie jest porządkiem liniowym.

7.1. Przykłady porządków

Zadanie 649. Niech A będzie zbiorem niepustym oraz niech $\langle B, \leq_B \rangle$ będzie porządkiem częściowym. Na zbiorze funkcji B^A określamy relację $\leq$ przyjmując, że dla $f, g \in B^A$ jest $f \leq g$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \leq_B g(a)$ dla każdego $a \in A$. Wykaż, że $\langle B^A, \leq \rangle$ jest porządkiem częściowym.

Zadanie 650. Pokaż, że na zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nie można wprowadzić porządku $\leq$, takiego, że jednocześnie:

- zero jest porównywalne z każdą liczbą zespoloną, tj. $z = 0$ lub $z > 0$ lub $z < 0$ dla każdej liczby $z \in \mathbb{C}$;
- porządek $\leq$ jest zgodny z działaniami arytmetycznymi, dokładniej $-z < 0$ i $wz > 0$ dla dowolnych $w, z > 0$ oraz $-z > 0$ dla dowolnego $z < 0$.

Zadanie 651. Czy dla danego zbioru $X \neq \emptyset$ można tak określić relację R, by równocześnie:

1. zbiór $\langle X, R \rangle$ był zbiorem częściowo uporządkowanym,
2. R była relacją równoważności w X?

Zadanie 652. Czy dla danego zbioru X takiego, że $|X| \geq 2$ można określić relację R, taką, by równocześnie:

1. zbiór $\langle X, R \rangle$ był zbiorem liniowo uporządkowanym,
2. R była relacją równoważności w X?

Zadanie 653. Niech dla relacji R

- $Z(R)$ oznacza, że R jest zwrotna,
- $S(R)$ oznacza, że R jest symetryczna,
- $P(R)$ oznacza, że R jest przechodnia,
- $A(R)$ oznacza, że R jest słabo antysymetryczna.

Podaj przykłady relacji R_1, R_2, R_3 i R_4 takich, że

1. $Z(R_1) \wedge S(R_1) \wedge P(R_1)$,
2. $Z(R_2) \wedge P(R_2) \wedge \neg S(R_2)$,
3. $Z(R_3) \wedge S(R_3) \wedge P(R_3) \wedge A(R_3)$,
4. $\neg Z(R_4) \wedge \neg A(R_4) \wedge P(R_4)$.

Zadanie 654. Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ określamy relacje:

1. $f R_1 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}| < \infty$,
2. $f R_2 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}| < 5$,
3. $f R_3 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}| < \infty$,
4. $f R_4 g$ jeśli $|\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}| < 5$,
5. $f R_5 g$ jeśli $f(n) \leq g(n)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Które z nich są relacjami a) równoważności, b) częściowego porządku, c) liniowego porządku?

Definicja 100. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Na zbiorze A^* skończonych ciągów elementów zbioru A określamy relację $\preceq$ przyjmując, że dla dowolnych $u, w \in A^*$ zachodzi $u \preceq w$ wtedy i tylko wtedy, gdy u jest przedrostkiem w lub istnieje $i \leq \min(|u|, |w|)$ takie, że dla $j < i$ zachodzi $u(j) = w(j)$ oraz $u(i) < w(i)$. Relację $\preceq$ nazywamy *porządkiem leksykograficznym* na A^* generowanym przez porządek $\leq$.

Zadanie 655. Wykaż, że relacja $\preceq$ jest porządkiem częściowym.

Zadanie 656. Wykaż, jeśli $\langle A, \leq \rangle$ jest porządkiem liniowym, to $\langle A^*, \preceq \rangle$ też jest porządkiem liniowym (udowodnij tylko liniowość).

Zadanie 657. Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ będą porządkami liniowymi. Relację $\leq$ na $A \times B$ określamy wzorem

$$\langle a_1, b_1 \rangle \leq \langle a_2, b_2 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad a_1 \leq_A a_2 \wedge b_1 \leq_B b_2$$

Wykaż, że: a) $\leq$ jest porządkiem częściowym na $A \times B$, b) $\leq$ jest porządkiem liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A lub zbiór B jest co najwyżej jednoelementowy.

Zadanie 658. Kandydaci do objęcia pewnego stanowiska oceniani są w $k \in \mathbb{N}$ różnych kategoriach. W każdej z tych kategorii otrzymują ocenę będącą liczbą naturalną nie mniejszą niż 1 i nie większą niż 6. Kandydat k_1 uważany jest za lepszego niż k_2 (co zapisujemy jako $k_1 \, L \, k_2$) jeśli k_1 ma wyższe oceny niż k_2 we wszystkich kategoriach oprócz co najwyżej dwóch. Niech R będzie najmniejszą zwrotną relacją taką, że $RR \subseteq R$ i $L \subseteq R$. Czy R jest częściowym porządkiem, jeśli:

a) $k = 12$,

b) $k = 13$?

Zadanie 659. Niech R będzie relacją zwrotną i przechodnią. *Łańcuchem względem R* nazywamy ciąg $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ taki, że $\langle a_i, a_{i+1} \rangle \in R$ dla $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ oraz $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$. Łańcuch $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ jest *cyklem względem R*, jeśli $n > 1$ i $\langle a_n, a_1 \rangle \in R$. Udowodnij, że jeśli nie istnieje cykl względem R, to R jest porządkiem częściowym.

7.2. Izomorfizm porządkowy

Definicja 101. Zbiory uporządkowane $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ są *izomorficzne*, jeżeli istnieje bijekcja $\phi : A \to B$ zachowująca porządek, tzn. taka, że $\phi(a_1) \leq_B \phi(a_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \leq_A a_2$, dla wszelkich $a_1, a_2 \in A$.

Definicja 102. Niech $\langle P, \leq_P \rangle$ oraz $\langle Q, \leq_Q \rangle$ będą zbiorami częściowo uporządkowanymi. Funkcja $f : P \to Q$ jest *monotoniczna*, jeśli

$$\forall_{x,y \in P} \big(x \leq_P y \Rightarrow f(x) \leq_Q f(y)\big).$$

Fakt 103. Funkcja ϕ jest izomorfizmem porządkowym, jeśli jest bijekcją oraz ϕ i ϕ^{-1} są monotoniczne.

Zadanie 660. Udowodnij, że następujące zbiory: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \setminus [0, 1)$ i $\mathbb{Q} \setminus [0, 1]$ uporządkowane zwykłą relacją porządku są izomorficzne ($\mathbb{Q}$ oznacza zbiór liczb wymiernych, (a, b) — przedział otwarty o końcach a i b, $[a, b]$ zaś — przedział domknięty).

Definicja 104. Porządek $\leq$ na zbiorze A jest:

- *gęsty*, jeśli pomiędzy każdą parą elementów zbioru A znajduje się trzeci element, tj. gdy dla dowolnych $a, b \in A$, takich, że $a < b$, istnieje $c \in A$, taki, że $a < c < b$;
- *bez końców*, jeśli dla dowolnego elementu zbioru A istnieje element od niego większy i element od niego mniejszy, tj. gdy dla każdego $a \in A$ istnieją $b, c \in A$, takie, że $b < a < c$.

Dla przykładu zwykły porządek na wszystkich pięciu zbiorach z zadania 660 jest gęsty i bez końców. Zbiory te są izomorficzne nie przez przypadek, o czym przekonasz się rozwiązując kolejne zadanie. Zauważ ponadto, że zwykły porządek na zbiorze $\mathbb{Q} \setminus (0, 1)$ nie jest gęsty, a na zbiorze $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ nie jest bez końców.

Zadanie 661. Pokaż, że dowolne dwa zbiory przeliczalne uporządkowane liniowymi, gęstymi relacjami porządku bez końców są izomorficzne.

Zadanie 662. Uzasadnij, że twierdzenie z poprzedniego zadania jest fałszywe dla zbiorów nieprzeliczalnych, tj. podaj przykład dwóch nieprzeliczalnych zbiorów tej samej mocy, uporządkowanych liniowymi, gęstymi relacjami porządku bez końców, które nie są izomorficzne.

Zadanie 663. Pokaż, że zbiory: liczb naturalnych ze zwykłym porządkiem i skończonych ciągów liczb naturalnych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach naturalnych *nie są* izomorficzne.

Zadanie 664. Pokaż, że zbiory: liczb rzeczywistych ze zwykłym porządkiem i skończonych ciągów liczb rzeczywistych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach rzeczywistych *nie są* izomorficzne.

Zadanie 665. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wprowadzamy relację R_1 wzorem

$$\bar{a} R_1 \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \, (a_n \leq b_n),$$

dla $\bar{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $\bar{b} = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Udowodnij, że zbiór $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, R_1 \rangle$ jest częściowo uporządkowany. Czy R_1 jest liniowym porządkiem? Czy jest gęstym porządkiem? Czy ten porządek jest izomorficzny z $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$?

Zadanie 666. W zbiorze wszystkich ciągów nieskończonych o wyrazach naturalnych wprowadzamy relację

$$\bar{a} R_2 \bar{b} \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \, (a_k = b_k \wedge \forall n{<}k \, (a_n < b_n)) \vee \bar{a} = \bar{b},$$

dla $\bar{a} = (a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ i $\bar{b} = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Czy ta relacja jest liniowym porządkiem? Czy jest gęstym porządkiem? Czy ten porządek jest izomorficzny z $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$?

Zadanie 667. Udowodnij, że $a R_1 b \Rightarrow a R_2 b$ dla wszelkich $a, b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, gdzie R_1 jest relacją rozważaną w zadaniu 665, zaś R_2 — w zadaniu 666.

Zadanie 668. W zbiorze $\mathbb{C}$ liczb zespolonych wprowadzamy porządek

$$x R y \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Re} x < \operatorname{Re} y \vee (\operatorname{Re} x = \operatorname{Re} y \wedge \operatorname{Im} x \leq \operatorname{Im} y).$$

Udowodnij, że R jest liniowym gęstym porządkiem bez końców. Czy $\langle \mathbb{C}, R \rangle$ jest izomorficzny z $\langle \mathbb{R}, \leq \rangle$?

Definicja 105. Niech $\langle X, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. *Następnikiem* $x \in X$ nazywamy element $y \in X$, taki, że $x < y$ i dla każdego $z \in X$, takiego, że $z < y$ jest $z \leq x$. Podobnie *poprzednikiem* $x \in X$ nazywamy element $y \in X$, taki, że $y < x$ i dla każdego $z \in X$, takiego, że $y < z$ jest $x \leq z$.

Zadanie 669. Udowodnij, że każdy niepusty zbiór liniowo uporządkowany $\langle X, \preceq \rangle$, taki, że każdy element posiada poprzednik i następnik oraz taki, że jeśli $x \preceq y$, to zbiór $\{z \mid x \preceq z \wedge z \preceq y\}$ jest skończony, jest izomorficzny ze zbiorem $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ liczb całkowitych uporządkowanym standardową relacją mniejszości $\leq$.

Zadanie 670. Podaj przykład przeliczalnego liniowego porządku takiego, że każdy element posiada następnik, istnieje element najmniejszy, każdy element prócz najmniejszego posiada poprzednik, ale nie izomorficznego z $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$.

Zadanie 671. W zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ wprowadzamy relację $\sim$, taką, że $x \sim y \Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$. Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności. Opisz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 672. W zbiorze $\mathbb{R}/\!\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją z zadania 671, definiujemy relację $\preceq$, taką, że

$$[x]_\sim \preceq [y]_\sim \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y,$$

gdzie $\leq$ jest standardowym porządkiem na liczbach rzeczywistych. Uzasadnij, że definicja $\preceq$ jest poprawna. Udowodnij, że $\langle \mathbb{R}/\!\sim, \preceq \rangle$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym. Pokaż, że $\langle \mathbb{R}/\!\sim, \preceq \rangle$ i $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ są izomorficzne porządkowo, gdzie $\langle \mathbb{Z}, \leq \rangle$ jest zbiorem liczb całkowitych ze standardowym porządkiem.

Zadanie 673. W zbiorze $\mathbb{R}/\!\sim$, gdzie $\sim$ jest relacją z zadania 671, definiujemy działania arytmetyczne: $[x]_\sim + [y]_\sim = [x+y]_\sim$ oraz $[x]_\sim \cdot [y]_\sim = [x \cdot y]_\sim$. Czy powyższe definicje są poprawne?

7.3. Zawieranie zbiorów jako relacja porządku

Definicja 106. Rodzina zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ jest *łańcuchem*, jeśli

$$A_t \subseteq A_s \vee A_s \subseteq A_t,$$

dla wszelkich $s, t \in T$ (tj. gdy $\subseteq$ jest na tej rodzinie porządkiem liniowym).

Definicja 107. Rodzina zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ jest *antyłańcuchem*, jeśli

$$A_s \subseteq A_t \vee A_t \subseteq A_s \quad \Rightarrow \quad s = t,$$

dla wszelkich $s, t \in T$.

Zadanie 674. Pokaż, że w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ istnieje łańcuch mocy continuum.

Zadanie 675. Pokaż, że w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ istnieje antyłańcuch mocy continuum.

Definicja 108. Rodzina zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$ jest *prawie rozłączna*, jeśli dla wszelkich różnych $s, t \in T$ zbiór $A_t \cap A_s$ jest skończony.

Zadanie 676 (Sierpiński). Pokaż, że w $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ istnieje rodzina mocy continuum zbiorów prawie rozłącznych.

Definicja 109. Dla danego zbioru X, filtrem w zbiorze $\mathcal{P}(X)$ nazywamy taki zbiór $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$, że jeśli $A \in \mathcal{F}$ i $A \subseteq B \subseteq X$, to również $B \in \mathcal{F}$, oraz jeśli $A, B \in \mathcal{F}$, to również $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Zadanie 677. Udowodnij, że jeśli $A \subseteq X$ to $\{B \subseteq X \mid A \subseteq B\}$ jest filtrem. Nazywamy go *filtrem głównym wyznaczonym przez A*.

Zadanie 678. Pokaż, że jeśli X jest zbiorem skończonym, to każdy filtr na $\mathcal{P}(X)$ jest główny.

Zadanie 679. Pokaż, że jeśli X jest zbiorem nieskończonym, to istnieje filtr na $\mathcal{P}(X)$, który nie jest główny.

Zadanie 680. Niech $\mathcal{F}$ będzie filtrem na $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dla ciągów o wyrazach naturalnych określamy relację R jak następuje: $\bar{a} R \bar{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\{n \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$. Udowodnij, że R jest relacją równoważności.

7.4. Liczba relacji porządku

Zadanie 681. Ile jest relacji częściowego porządku w zbiorze n-elementowym?

Zadanie 682. Ile jest relacji porządku liniowego w zbiorze n elementowym?

Zadanie 683. Niech $\preceq$ oznacza porządek częściowy na liczbach naturalnych. Mówimy, że $\preceq$ jest *zgodny* ze zwykłym porządkiem, gdy

$$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} \quad (n_1 \preceq n_2 \Rightarrow n_1 \leq n_2).$$

Ile jest porządków częściowych $\preceq \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zgodnych ze zwykłym porządkiem i takich, że

1. w każdym antyłańcuchu są co najwyżej dwa elementy?
2. co najwyżej skończona liczba elementów należy do jakiegoś łańcucha o liczbie elementów większej niż 1?
3. zbiór
$$\{x \mid \exists y\, (x \neq y \wedge (y \preceq x \vee x \preceq y))\}$$
jest skończony?
4. w zbiorze $\langle \mathbb{N}, \preceq \rangle$ istnieje element największy?
5. w każdym łańcuchu są co najwyżej dwa elementy?

8

Języki formalne

Definicja 110. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Będziemy nazywać go *alfabetem*. *Słowem* nad alfabetem A nazywamy dowolny skończony ciąg elementów zbioru A. Słowo puste (ciąg długości zero) oznaczamy ϵ. Przez A^* oznaczamy zbiór wszystkich słów nad alfabetem A. Jeżeli $u = u_1u_2 \dots u_n$ i $w = w_1w_2 \dots w_m$, to uw oznacza *złożenie* (*konkatenację*) słów u i w, tj. słowo $u_1u_2 \dots u_nw_1w_2 \dots w_m$. Słowo u jest *przedrostkiem* (*prefiksem*) słowa w, jeśli istnieje słowo v, takie, że $uv = w$. Podobnie, słowo u jest *przyrostkiem* (*sufiksem*) słowa w, jeśli istnieje słowo v, takie, że $vu = w$.

Fakt 111. Niech A będzie dowolnym zbiorem i niech $u \leq w$ oznacza, że u jest przedrostkiem w. Wtedy $\langle A, \leq\rangle$ jest zbiorem częściowo uporządkowanym.

Definicja 112. Niech L będzie zbiorem słów (językiem) nad alfabetem $\{0, 1\}$. Mówimy, że słowa $u, v \in \{0, 1\}^*$ są *równoważne względem języka* L, jeżeli

$$\forall x \in \{0, 1\}^* \ (ux \in L \iff vx \in L).$$

Zapis $u \sim_L v$ oznacza, że słowa u i v są równoważne względem języka L.
Dla danego słowa w nad ustalonym alfabetem przez w^n oznaczamy słowo $\underbrace{ww \dots w}_{n \text{ razy}}$.

Formalnie

$$\begin{aligned} w^0 &= \epsilon, \\ w^{n+1} &= ww^n, \end{aligned}$$

gdzie ϵ jest słowem pustym. Przez w^* oznaczamy zbiór słów postaci w^n dla wszelkich naturalnych n, tj. $w^* = \{w^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 684. Wykaż, że $\sim_L$ jest relacją równoważności.

Zbiór klas równoważności relacji $\sim_L$ oznaczamy $\mathcal{Q}(L)$.

Zadanie 685. Pokaż, że jeśli dla pewnych słów $w \in L$ i $v \in \{0, 1\}^*$ zachodzi $wv \in [w]_\sim$, to $wv^n \in L$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 686. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim_L$ równoważności słów względem następujących języków:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{1^n \mid 1 \leq n \leq 6\} \\ L_2 &= (0011)^* \\ L_3 &= \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Zadanie 687. Dla języka L nad alfabetem $\{0, 1\}$ określamy funkcje

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{Q}(L) \times \mathcal{Q}(L) \to \mathcal{Q}(L), \\ g &: \mathcal{Q}(L) \times \{0, 1\} \to \mathcal{Q}(L), \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{Q}(L)$ jest rodziną klas abstrakcji relacji $\sim_L$ równoważności względem języka L, wzorami:

$$\begin{aligned} f([u]_{\sim_L}, [w]_{\sim_L}) &= [uw]_{\sim_L}, \\ g([u]_{\sim_L}, a) &= [ua]_{\sim_L}, \end{aligned}$$

gdzie $u, w \in \{0, 1\}^*$ oraz $a \in \{0, 1\}$. Które z powyższych definicji są poprawne?

Zadanie 688. Niech g będzie funkcją zdefiniowaną w poprzednim zadaniu. Kładziemy

$$\begin{aligned} g^*(\epsilon) &= g([\epsilon]_{\sim_L}, \epsilon), \\ g^*(wa) &= g(g^*(w), a), \end{aligned}$$

dla $w \in \{0, 1\}^*$ i $a \in \{0, 1\}$. Wykaż, że słowo $w \in \{0, 1\}^*$ należy do języka L wtedy i tylko wtedy, gdy $g^*(w) \subseteq L$.

9

Kresy zbiorów

Definicja 113. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie porządkiem częściowym i niech $X \subseteq P$. Element $x \in X$ jest *elementem największym* (odpowiednio *najmniejszym*) w X, jeśli dla każdego $y \in X$ zachodzi $y \leq x$ (odpowiednio $x \leq y$). Element najmniejszy zbioru P oznacza się $\perp$, zaś największy $\top$.

Definicja 114. Element $x \in X$ jest elementem *maksymalnym* (odpowiednio *minimalnym*) w X, jeśli dla każdego $y \in X$ z warunku $x \leq y$ (odpowiednio $y \leq x$) wynika $x = y$.

Definicja 115. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Porządek $\langle P, \leq^{-1} \rangle$ nazywamy porządkiem *dualnym* do $\langle P, \leq \rangle$. Jeśli dane jest pojęcie $\mathcal{Q}$ dotyczące porządków, to pojęcie $\mathcal{Q}^{-1}$ dualne do niego otrzymujemy przez zastąpienie w definicji $\mathcal{Q}$ symbolu $\leq$ przez symbol $\leq^{-1}$. Zauważmy, że pojęcia minimalny i maksymalny oraz najmniejszy i największy są dualne.

Twierdzenie 116. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $X \subseteq P$. Wtedy element największy w X jest elementem maksymalnym w X.

Twierdzenie 117. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie zbiorem uporządkowanym. Dla dowolnego zbioru $X \subseteq P$ istnieje co najwyżej jeden element największy tego zbioru.

Zatem każdy zbiór posiada też co najwyżej jeden element najmniejszy. Elementów maksymalnych i minimalnych może być natomiast wiele.

Przykład 118. Niech X będzie zbiorem niepustym i niech $P = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$. Wtedy w zbiorze uporządkowanym $\langle P, \subseteq \rangle$ jest $|X|$ elementów minimalnych.

Definicja 119. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $X \subseteq P$. Element $a \in P$ jest *ograniczeniem górnym* zbioru X, jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \leq a$. *Kresem górnym* zbioru X nazywamy najmniejszy element zbioru $\{a \mid a \text{ jest ograniczeniem górnym } X\}$. Kres górny zbioru X oznaczamy $\bigvee X$ lub $\sup X$. Dualnie można zdefiniować pojęcia *ograniczenia dolnego* i *kresu dolnego* (kres dolny zbioru X oznaczamy $\bigwedge X$ lub $\inf X$).

Zadanie 689. Rodzinę $\mathcal{P}(A)$ podzbiorów niepustego zbioru A porządkujemy relacją inkluzji $\subseteq$. Wykaż, że kres górny dowolnego podzbioru $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(A)$ jest równy sumie teoriomnogościowej zbiorów do niego należących, a kres dolny — przekrojowi. Formalnie: $\sup\{X_s\}_{s\in S} = \bigcup_{s\in S} X_s$ oraz $\inf\{X_s\}_{s\in S} = \bigcap_{s\in S} X_s$ dla dowolnej rodziny $\{X_s\}_{s\in S} \subseteq \mathcal{P}(A)$.

Definicja 120. Relacja podzielności liczb naturalnych $\mid\ \subset \mathbb{N}^2$ jest określona następująco:

$$x \mid y \quad \Leftrightarrow \quad \exists z{\in}\mathbb{N}\ (xz = y).$$

Zadanie 690. Pokaż, że relacja $\mid$ jest porządkiem częściowym. Udowodnij, że każdy niepusty podzbiór $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$ posiada kres dolny. Pokaż też, że $\inf\{m, n\} = \gcd(m, n)$ i $\sup\{m, n\} = \mathrm{lcm}(m, n)$, gdzie gcd jest największym wspólnym podzielnikiem dwu liczb, a lcm — najmniejszą wspólną wielokrotnością.

Zadanie 691. Czy w $\langle \mathbb{N}, \mid \rangle$ istnieje element a) najmniejszy, b) największy?

Zadanie 692. Rozważmy relację $\mid$ na zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Znajdź zbiór elementów minimalnych w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mid \rangle$.
2. Udowodnij, że w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mid \rangle$ nie ma elementów maksymalnych.

Zadanie 693.

1. Znajdź ogólną postać łańcucha w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mid \rangle$,
2. Znajdź ogólną postać antyłańcucha w zbiorze $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mid \rangle$.
3. Udowodnij, że relacja inkluzji w zbiorze łańcuchów zbioru $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, \mid \rangle$ jest częściowym porządkiem. Znajdź postać łańcuchów minimalnych i maksymalnych względem relacji inkluzji.

Zadanie 694. Znajdź przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R \rangle$ takiego, że w zbiorze $\langle X, R \rangle$ jest dokładnie jeden element maksymalny i nie ma elementu największego. Znajdź przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X, R \rangle$, takiego, że w zbiorze $\langle X, R \rangle$ jest dokładnie jeden element minimalny i nie ma elementu najmniejszego.

Zadanie 695. Znajdź elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy w zbiorze $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, R_1 \rangle$ z zadania 665.

Zadanie 696. Znajdź elementy minimalne, maksymalne, największy i najmniejszy w zbiorze $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, R_2 \rangle$ z zadania 666.

Definicja 121. Funkcje $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ są *równe prawie wszędzie*, jeśli zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$$

jest skończony. Zapis $f \approx g$ oznacza, że funkcje f i g są równe prawie wszędzie.

Zadanie 697. Pokaż, że $\approx$ jest relacją równoważności.

Zadanie 698. Ile jest klas abstrakcji relacji $\approx$? Jaka jest moc każdej z nich?

Definicja 122. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *majoryzuje* funkcję $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, jeśli zbiór

$$\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) < g(n)\}$$

jest skończony. Zapis $g \preceq f$ oznacza, że funkcja f majoryzuje funkcję g.

Na zbiorze $\mathcal{F} = \{[f]_\approx \mid f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$ klas abstrakcji relacji $\approx$ wprowadzamy relację $\preceq$ przyjmując, że

$$[f]_\approx \preceq [g]_\approx \quad \Leftrightarrow \quad f \preceq g.$$

Zadanie 699. Wykaż, że definicja relacji $\preceq$ na zbiorze $\mathcal{F}$ jest poprawna (nie zależy od wyboru reprezentantów klas abstrakcji) i że relacja $\preceq$ jest częściowym porządkiem na $\mathcal{F}$.

Zadanie 700. Niech dana będzie funkcja $e(n) = 2^n$ i rodzina funkcji $f_k(n) = n^k$ dla $k \in \mathbb{N}$. Wykaż, że dla żadnego k funkcja f_k nie majoryzuje funkcji e.

Zadanie 701. Czy istnieje ciąg funkcji $\langle f_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ taki, że $f_i \prec f_{i+1}$ dla $i \in \mathbb{N}$, oraz dla każdej funkcji $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje i takie, że $g \prec f_i$?

Zadanie 702. Wykaż, że każdy przeliczalny podzbiór $X \subseteq \mathcal{F}$ posiada w zbiorze $\mathcal{F}$ ograniczenie górne.

Zadanie 703. Niech $\{A_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będzie podziałem zbioru $\mathbb{N}$ na zbiory nieskończone. Definiujemy ciąg funkcji $\langle f_j : j \in \mathbb{N}\rangle$ kładąc

$$f_j(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } n \in \bigcup_{i=1}^{j} A_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Wykaż, że zbiór $\{[f_j]_\approx \mid j \in \mathbb{N}\}$ nie ma kresu górnego w $\langle \mathcal{F}, \preceq \rangle$.

Definicja 123. *Nieskończonym łańcuchem wstępującym* w zbiorze uporządkowanym $\langle A, \leq \rangle$ nazywamy ciąg $\langle a_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ taki, że $a_i < a_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, gdzie $a < b$ oznacza, że $a \leq b$ i $a \neq b$. Podobnie ciąg $\langle a_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ jest *łańcuchem zstępującym*, jeśli $a_{i+1} < a_i$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$.

Zadanie 704. Wykaż, że żaden przeliczalny nieskończony ściśle wstępujący łańcuch nie posiada w zbiorze $\mathcal{F}$ kresu górnego.

Zadanie 705. Jak jest największa moc ściśle a) wstępującego, b) zstępującego łańcucha w zbiorze $\mathcal{F}$?

Zadanie 706. Na zbiorze $\{0, 1\}$ wprowadzamy porządek $\leq$ kładąc $0 \leq 1$. Niech $\preceq$ będzie porządkiem leksykograficznym na zbiorze $\{0, 1\}^*$ wyznaczonym przez porządek $\leq$. Wykaż, że w zbiorze $\langle\{0, 1\}^*, \preceq\rangle$ istnieje nieskończony łańcuch wstępujący i nieskończony łańcuch zstępujący. Czy zbiór $\langle\{0, 1\}^*, \preceq\rangle$ posiada element najmniejszy lub największy?

9.1. Kraty

Definicja 124. Porządek $\langle P, \leq\rangle$ jest *kratą zupełną*, jeśli każdy podzbiór zbioru P ma kres górny i kres dolny. Porządek $\langle P, \leq\rangle$ jest *kratą*, jeśli posiada elementy najmniejszy i największy oraz gdy każdy *skończony* podzbiór zbioru P ma kres górny i kres dolny.

Twierdzenie 125. Niech $\langle P, \leq\rangle$ będzie porządkiem. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. $\langle P, \leq\rangle$ jest kratą zupełną.
2. Każdy podzbiór P ma kres górny w $\langle P, \leq\rangle$.
3. Każdy podzbiór P ma kres dolny w $\langle P, \leq\rangle$.

Zadanie 707. Niech A będzie dowolnym zbiorem niepustym. Czy $\langle\mathcal{K}, \subseteq\rangle$ jest kratą zupełną, jeżeli $\mathcal{K}$ jest rodziną wszystkich

1. relacji binarnych,
2. relacji równoważności,
3. relacji częściowego porządku

na zbiorze A?

Definicja 126. Niech Z oznacza zbiór wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych. W zbiorze Z wprowadzamy relację $\sim$ następująco:

$$X \sim Y \quad \text{wtw} \quad |X \doteq Y| < \aleph_0.$$

Zadanie 708. Pokaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Definicja 127. W zbiorze klas abstrakcji $Z/\sim$ wprowadzamy relację $\leq$, taką że:

$$[X]_\sim \leq [Y]_\sim \quad \text{wtw} \quad |X \setminus Y| < \aleph_0.$$

Zadanie 709. Sprawdź, czy definicja $\leq$ jest poprawna.

Zadanie 710. Sprawdź, czy $\leq$ jest porządkiem częściowym.

Zadanie 711. Znajdź w $\langle Z/\sim, \leq\rangle$ nieskończony podzbiór liniowo uporządkowany.

Zadanie 712. Znajdź w $\langle Z/\sim, \leq\rangle$ nieskończony antyłańcuch.

Zadanie 713. Wykaż, że $\langle Z/\sim, \leq\rangle$ nie jest zupełny.

Zadanie 714. Wykaż, że każdy ściśle malejący ciąg $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots$ elementów $\langle Z/\sim, \leq\rangle$ (gdzie $x > y$ gdy $y \leq x$ i $y \neq x$) ma w $Z/\sim$ ograniczenie dolne, tj. istnieje $y \in Z/\sim$, taki że $y \leq x_i$ dla każdego i.

Zadanie 715. Czy $\langle Z/\sim, \leq\rangle$ jest kratą?

Zadanie 716. Niech $\mathcal{X}$ będzie przeliczalną rodziną podzbiorów $\mathbb{N}$. Udowodnij, że istnieje przeliczalna rodzina $\mathcal{K}$, taka, że $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{K}$ i $\langle \mathcal{K}, \subseteq\rangle$ jest kratą.

9.2. Porządki zupełne

Definicja 128. Niech $\langle P, \leq_P\rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy zbiór $\emptyset \neq X \subseteq P$ jest zbiorem *skierowanym*, jeśli każda para $x, y \in X$ elementów zbioru X ma w X ograniczenie górne, tj.

$$\forall x, y{\in}X\ \exists z{\in}X\ (x \leq z \wedge y \leq z).$$

Zbiór $\langle P, \leq_P\rangle$ jest *porządkiem zupełnym*, jeśli P ma element najmniejszy oraz każdy skierowany podzbiór X zbioru P ma kres górny.

Definicja 129. Niech $\langle P, \leq_P\rangle$ oraz $\langle Q, \leq_Q\rangle$ będą porządkami zupełnymi. Funkcja $f : P \to Q$ jest *ciągła*, jeśli zachowuje kresy górne, to znaczy, gdy dla dowolnego zbioru skierowanego $X \subseteq P$ zbiór $f(X)$ ma kres górny oraz $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$.

Twierdzenie 130.

1. Każda funkcja ciągła jest monotoniczna.
2. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Zadanie 717. Pokaż, że relacja inkluzji na rodzinie skończonych podzbiorów zbioru liczb naturalnych nie jest porządkiem zupełnym.

Zadanie 718. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami zupełnymi. W produkcie $A \times B$ definiujemy relację $\leq$ w następujący sposób: $\langle a_1, b_1\rangle \leq \langle a_2, b_2\rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 \leq_A a_2$ oraz $b_1 \leq_B b_2$. Udowodnij, że $\langle A \times B, \leq\rangle$ jest porządkiem zupełnym.

Zadanie 719. Niech A będzie zbiorem niepustym oraz niech $\langle B, \leq_B\rangle$ będzie porządkiem częściowym zupełnym. Wykaż, że $\langle B^A, \leq\rangle$ jest porządkiem zupełnym, gdzie $f \leq g$ dla $f, g \in B^A$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \leq_B g(a)$ dla każdego $a \in A$.

Zadanie 720. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ oraz $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami częściowymi zupełnymi. Wykaż, że $\langle [A, B], \leq\rangle$ jest porządkiem zupełnym, gdzie $[A, B]$ oznacza zbiór funkcji ciągłych z A w B oraz $f \leq g$, dla $f, g \in B^A$, wtedy i tylko wtedy, gdy $f(a) \leq_B g(a)$ dla każdego $a \in A$.

Zadanie 721. Niech $\langle A, \leq_A\rangle$ i $\langle B, \leq_B\rangle$ będą porządkami zupełnymi. Pokaż, że funkcja $\phi : [A, B] \times A \to B$, gdzie $[A, B]$ jest zbiorem funkcji ciągłych z A w B, zdefiniowana wzorem $\phi(f, a) = f(a)$ jest ciągła.

Zadanie 722. Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A i B relacja inkluzji na zbiorze $B^{\subseteq A}$ funkcji częściowych z A w B jest porządkiem zupełnym. Czy $\langle B^{\subseteq A}, \subseteq\rangle$ jest kratą zupełną?

Zadanie 723. Zbiór W na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek, tj. gdy $\overline{ab} \subseteq W$ dla dowolnych punktów $a, b \in W$. Pokaż, że relacja inkluzji na rodzinie wypukłych podzbiorów płaszczyzny jest porządkiem zupełnym.

9.3. Twierdzenia o punkcie stałym

Twierdzenie 131 (Knaster, Tarski). Niech $\langle P, \leq\rangle$ będzie kratą zupełną i niech funkcja $f : P \to P$ będzie monotoniczna. Wtedy istnieje $a \in P$ taki, że

1. $f(a) = a$
2. dla każdego $b \in P$, jeśli $f(b) = b$, to $a \leq b$.

Element a z twierdzenia Knastera-Tarskiego nazywamy *najmniejszym punktem stałym* funkcji f. Element spełniający tylko warunek 1 nazywamy *punktem stałym.*

Twierdzenie 132. Niech $\langle P, \leq_P\rangle$ będzie porządkiem zupełnym oraz niech funkcja $f : P \to P$ będzie ciągła. Wtedy element $a = \bigvee\{f^n(\bot) \mid n \in N\}$ jest najmniejszym punktem stałym funkcji f.

Zadanie 724. Niech $A \neq \emptyset$ i niech $f : A \to A$. Udowodnij, że dla dowolnego $a \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $X \subseteq A$ taki, że $a \in X$ oraz $f^{-1}(X) \subseteq X$.

Zadanie 725. Niech $\mathcal{K} = \mathcal{P}(A^2)$ będzie zbiorem uporządkowanym relacją inkluzji $\subseteq$, $R \in \mathcal{K}$ i niech funkcja $\phi_R : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ będzie zdefiniowana wzorem

$$\phi_R(X) \quad = \quad X \cup X^{-1} \cup XX \cup E_A \cup R,$$

gdzie $E_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$. Wykaż, że dla każdej relacji $R \subseteq A^2$ istnieje najmniejszy punkt stały funkcji ϕ_R.

Zadanie 726. Niech, że R^+ będzie najmniejszym punktem stałym funkcji ϕ_R. Wykaż, że R^+ jest najmniejszą (względem relacji inkluzji $\subseteq$) relacją równoważności zawierającą relację R.

Zadanie 727. Na rodzinie $\mathcal{L} = \mathcal{P}(\{0, 1\}^*)$ wszystkich języków nad alfabetem $\{0, 1\}$ określamy funkcję

$$f(X) \quad = \quad X \cup \{w01 \mid w \in X\} \cup \{\epsilon\}.$$

Znajdź najmniejszy punkt stały funkcji f w zbiorze $\mathcal{L}$ uporządkowanym relacją inkluzji. Czy istnieje największy punkt stały tej funkcji? Ile punktów stałych ma funkcja $g(X) = \{w01 \mid x \in X\} \cup \{\epsilon\}$?

9.4. Relacje w zbiorze formuł zdaniowych

Definicja 133. Niech V będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. W zbiorze $\mathcal{F}(V)$ formuł zdaniowych, zbudowanych ze zmiennych ze zbioru V, spójnika negacji $\neg$ i spójników koniunkcji $\wedge$, alternatywy $\vee$, implikacji $\Rightarrow$ i równoważności $\Leftrightarrow$ wprowadzamy binarną relację $\sim$ przyjmując, że:

$\alpha \sim \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest tautologią.

Zadanie 728. Wykaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Zadanie 729. Ile jest klas abstrakcji relacji $\sim$, gdy zbiór zmiennych V

1. ma trzy elementy,
2. ma n elementów,
3. ma moc $\aleph_0$?

Zadanie 730. W zbiorze $\mathcal{F}(V)$ wprowadzamy relacje $\sim_1$, $\sim_2$ i $\sim_3$ przyjmując, że

- $\alpha \sim_1 \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest spełnialna;
- $\alpha \sim_2 \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest sprzeczna;
- $\alpha \sim_3 \beta$ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jest prawdziwa dla dokładnie połowy wartościowań zmiennych występujących w formułach α i β.

Które z tych relacji są relacjami równoważności?

Definicja 134. Niech $\phi_a \in \mathcal{F}(V)$ będzie ustaloną formułą. W zbiorze formuł zdaniowych $\mathcal{F}(V)$ wprowadzamy binarną relację $\sim_{\phi_a}$, przyjmując, że

$$\phi_1 \sim_{\phi_a} \phi_2 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy formuła } (\phi_a \Rightarrow (\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2)) \text{ jest tautologią.}$$

Zadanie 731. Udowodnij, że $\sim_{\phi_a}$ jest relacją równoważności. Opisz klasy równoważności formuł $p \vee \neg p$ i $p \wedge \neg p$.

Definicja 135. W zbiorze klas abstrakcji $\mathcal{F}(V)/_\sim$ wyżej opisanej relacji $\sim$ wprowadzamy relację $\leq$ taką, że $[\phi_1]_\sim \leq [\phi_2]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$ jest tautologią.

Zadanie 732. Sprawdź, że powyższa definicja relacji $\leq$ jest poprawna (nie zależy od wyboru reprezentanta klasy abstrakcji) i że definiuje porządek częściowy.

Zadanie 733. Czy $\langle \mathcal{F}(V)/_\sim, \leq \rangle$ jest kratą?

Zadanie 734. Czy $\langle \mathcal{F}(V)/_\sim, \leq \rangle$ jest kratą zupełną?

Zadanie 735. Przyjmijmy, że zbiór zmiennych V jest przeliczalny nieskończony. Znajdź w zbiorze $\langle \mathcal{F}(V)/_\sim, \leq \rangle$ nieskończony podzbiór liniowo uporządkowany (łańcuch).

Zadanie 736. Przyjmijmy, że zbiór zmiennych V jest przeliczalny nieskończony. Czy można w zbiorze $\langle \mathcal{F}(V)/_\sim, \leq \rangle$ znaleźć nieskończony *antyłańcuch*, to znaczy zbiór X taki, że jeśli $x \neq y$, to $\neg(x \leq y)$ dla wszelkich $x, y \in X$?

Zadanie 737. Ile jest klas abstrakcji relacji $\sim$ gdy a) $|V| = 2$, b) $|V| = 3$, c) $|V| = 5$, d) $|V| = n \in \mathbb{N}$, e) $|V| = \aleph_0$?

Zadanie 738. Wypisz najkrótszych reprezentantów wszystkich klas abstrakcji relacji $\sim$ gdy zbiór V ma dwa elementy. Narysuj diagram porządku $\leq$ dla tego przypadku.

Zadanie 739. Wyznacz zbiór elementów minimalnych i kres dolny zbioru $F_1 = \mathcal{F}(V)/_\sim \setminus \{[\bot]_\sim\}$, gdy zbiór zmiennych V jest (a) skończony i (b) nieskończony.

Zadanie 740. Niech $V = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie zbiorem zmiennych. Wyznacz kresy (dolny i górny) zbiorów $F_2 = \{[\alpha_n]_\sim\}_{n=1}^{\infty}$ i $F_3 = \{[\beta_n]_\sim\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $\alpha_n = \bigwedge_{i=1}^{n} p_i = p_1 \wedge \ldots \wedge p_n$ i $\beta_n = \bigvee_{i=1}^{n} p_i = p_1 \vee \ldots \vee p_n$.

Zadanie 741. Niech $V = \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie zbiorem zmiennych. Wyznacz kresy (dolny i górny) zbioru $F_4 = \{[\gamma_n]_\sim\}_{n=1}^{\infty}$, gdzie $\gamma_n = \bigvee_{i=0}^{n}(p_{2i} \vee \neg p_{2i+1})$.

Zadanie 742. W zbiorze $\mathcal{F}(V)$, gdzie $V = \{p_1, \ldots, p_5\}$, definiujemy relacje R_1, R_2 oraz R_3 w następujący sposób:

$$\begin{array}{lcl} \phi R_1 \psi & \Leftrightarrow & \phi \text{ i } \psi \text{ mają tyle samo wystąpień spójników logicznych} \\ \phi R_2 \psi & \Leftrightarrow & (\phi \Leftrightarrow \psi) \text{ jest tautologią} \\ \phi R_3 \psi & \Leftrightarrow & (\phi \Leftrightarrow \psi) \text{ jest formułą spełnialną} \end{array}$$

Która z relacji R_1, R_2 oraz R_3 jest relacją równoważności? W każdym przypadku w razie pozytywnej odpowiedzi wyznacz moc zbioru klas abstrakcji danej relacji.

Zadanie 743. Niech $\mathcal{F}$ będzie zbiorem formuł zadaniowych zbudowanych ze zmiennych ze zbioru $V = \{p, q, r, \ldots\}$ i spójników implikacji $\Rightarrow$ i fałszu $\bot$. Binarna relacja R na zbiorze $\mathcal{F}$ jest *monotoniczna*, jeśli

1. $\bot \, R \, \phi$,
2. jeśli $\phi_1 \, R \, \phi_2$ i $\psi_1 \, R \, \psi_2$, to $(\phi_2 \Rightarrow \psi_1) \, R \, (\phi_1 \Rightarrow \psi_2)$,

dla wszelkich formuł $\phi, \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}$.

1. Pokaż, że w zbiorze relacji monotonicznych na $\mathcal{F}$ uporządkowanym relacją inkluzji istnieje element najmniejszy. Relację tę będziemy oznaczać $\sqsubseteq$.
2. Pokaż, że relacja $\sqsubseteq$ jest częściowym porządkiem na $\mathcal{F}$. Pokaż, że nie jest to porządek liniowy.
3. Pokaż, że jeśli $\phi \sqsubseteq \psi$, to $\phi \Rightarrow \psi$ jest tautologią. Pokaż, że implikacja odwrotna nie zachodzi.

10

Dobre porządki i indukcja

10.1. Porządki regularne

Definicja 136. Porządek częściowy $\langle P, \leq \rangle$ jest *regularny* (*dobrze ufundowany*), jeśli nie istnieje nieskończony ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ taki, że $\forall i \in \mathbb{N}\ a_{i+1} < a_i$. Mówimy, że porządek jest *dobry*, jeśli jest liniowy i regularny.

Twierdzenie 137. Porządek częściowy $\langle P, \leq \rangle$ jest regularny, jeśli w każdym niepustym zbiorze $X \subseteq P$ istnieje element minimalny.

Zadanie 744. Niech $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$ będą zbiorami uporządkowanymi, w których porządki $\leq_A$ i $\leq_B$ są regularne. Na zbiorze $A \times B$ definiujemy relację $\leq$ przyjmując, że $\langle x_1, y_1 \rangle \leq \langle x_2, y_2 \rangle$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 \leq_A x_2$ i $y_1 \leq_B y_2$, dla wszelkich $x_1, x_2 \in A$ i $y_1, y_2 \in B$. Wykaż, że relacja $\leq$ jest porządkiem regularnym na zbiorze $A \times B$.

Zadanie 745. Załóżmy, że zbiór $\langle X, R \rangle$ jest dobrze uporządkowany. Znajdź warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór $\langle X, R^{-1} \rangle$ był także dobrze uporządkowany.

Zadanie 746. Udowodnij, że jeśli $f : A \to B$ jest monotoniczną bijekcją między dobrymi porządkami $\langle A, \leq_A \rangle$ i $\langle B, \leq_B \rangle$, to funkcja odwrotna f^{-1} też jest monotoniczna. Czy założenie, że porządki $\leq_A$ i $\leq_B$ są dobre jest istotne?

Zadanie 747. W zbiorze $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ wprowadzamy relację R wzorem

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad (2|x \wedge 2|y \wedge y \leq x) \vee (2|x \wedge \neg(2|y)) \vee (\neg(2|x) \wedge \neg(2|y) \wedge x \leq y).$$

Udowodnij, że zbiór $\langle \mathbb{N} \setminus \{0\}, R \rangle$ jest liniowo uporządkowany. Czy jest to dobry porządek?

Zadanie 748. Udowodnij, że w zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element (poza co najwyżej elementem największym) posiada następnik. Czy każdy element poza elementem pierwszym musi posiadać poprzednik?

Zadanie 749. Dany jest zbiór

$$A = \left\{ n + \frac{m}{m+1} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

1. Czy $\langle A, \leq \rangle$ jest dobrym porządkiem ($\leq$ jest zwykłą relacją porządku w zbiorze liczb rzeczywistych)?
2. Ile jest nierosnących funkcji z $\mathbb{N}$ w A?

Zadanie 750. W zbiorze $\mathcal{F} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ funkcji z $\mathbb{N}$ w $\mathbb{N}$ wprowadzamy relację $\leq_F$ kładąc

$$f \leq_F g \Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N})(f(n) \leq g(n)).$$

Czy porządek częściowy $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$ jest

1. kratą,
2. kratą zupełną,
3. porządkiem zupełnym,
4. porządkiem regularnym?

Zadanie 751. Niech $\mathcal{F} = \{f \in 2^{\mathbb{N}} \mid \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 1\}$ jest skończony$\}$. W zbiorze $\mathcal{F}$ wprowadzamy relacje $\leq_F$ i $\leq_L$ kładąc

$$\begin{aligned} f \leq_F g \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n{\in}\mathbb{N}\,(f(n) \leq g(n)) \quad \text{oraz} \\ f \leq_L g \quad &\Leftrightarrow \quad f = g \vee \exists m{\in}\mathbb{N}\,(f(m) < g(m) \wedge \forall n{\in}\mathbb{N}\,(n < m \Rightarrow f(n) = g(n))). \end{aligned}$$

1. Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$ jest porządkiem liniowym?
2. Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_L \rangle$ jest porządkiem liniowym?
3. Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_F \rangle$ jest porządkiem regularnym?
4. Czy $\langle \mathcal{F}, \leq_L \rangle$ jest porządkiem regularnym?
5. Czy $\langle \mathcal{F}, (\leq_F)^{-1} \rangle$ jest porządkiem regularnym?
6. Czy $\langle \mathcal{F}, (\leq_L)^{-1} \rangle$ jest porządkiem regularnym?

Zadanie 752. Czy porządek zadany definicją 127 jest regularny?

Zadanie 753. Czy na zbiorze A o mocy większej niż 1 można zdefiniować porządek jednocześnie dobry i gęsty?

Definicja 138. Relacja R jest *słabo konfluentna*, jeśli dla każdych $x_1, x_2, x_3 \in X$ istnieje taki $x_4 \in X$, że jeśli $x_1 R x_2$ i $x_1 R x_3$, to $x_2 \bar{R} x_4$ i $x_3 \bar{R} x_4$, gdzie $\bar{R}$ jest przechodnim domknięciem relacji R. Relacja R jest *konfluentna*, jeśli dla każdych $x_1, x_2, x_3 \in X$ istnieje taki $x_4 \in X$, że jeśli $x_1 \bar{R} x_2$ i $x_1 \bar{R} x_3$, to również $x_2 \bar{R} x_4$ i $x_3 \bar{R} x_4$, gdzie $\bar{R}$ jest przechodnim domknięciem relacji R.

Zadanie 754. Pokaż, że istnieje relacja R słabo konfluentna, która nie jest konfluentna.

Zadanie 755. Pokaż, że istnieje relacja R słabo konfluentna, której graf jest acykliczny i która nie jest konfluentna.

Zadanie 756. Pokaż, że jeśli relacja R jest ufundowana i słabo konfluentna, to jest konfluentna.

Zadanie 757. Niech $\mathcal{K}$ będzie rodziną podzbiorów zbioru liczb naturalnych taką, że relacja zawierania na tej rodzinie jest porządkiem regularnym. Pokaż,że każdy łańcuch w tym porządku jest przeliczalny.

Zadanie 758. Dane są dwa niemalejące ciągi liczb naturalnych $\langle a_0, a_1, a_2, \ldots\rangle$ oraz $\langle b_0, b_1, ab_2, \ldots\rangle$. Przypuśćmy, że te ciągi „podobnie rosną”, tzn. dla dowolnej liczby naturalnej n spełnione są warunki:

1. jeżeli $a_n < b_n$, to $a_n < a_{n+1}$ oraz $b_n = b_{n+1}$,
2. jeżeli $b_n < a_n$, to $b_n < b_{n+1}$ oraz $a_n = a_{n+1}$.

Udowodnij, że jeżeli liczba c jest wyrazem obu tych ciągów, to c jest wyrazem tych ciągów o tym samym numerze (tj. istnieje liczba $i \in N$, taka, że $a_i = c = b_i$).

10.2. Indukcja

Twierdzenie 139. Niech $\langle P, \leq\rangle$ będzie regularnym porządkiem częściowym. Jeśli $X \subseteq P$ spełnia warunek $\forall x\, ((\forall y{<}x\ y \in X) \Rightarrow x \in X)$, to $X = P$.

Twierdzenie 140 (o definiowaniu przez indukcję). Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Niech $g : A \to B$ oraz $h : B \times A \times \mathbb{N} \to B$ będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times \mathbb{N} \to B$ spełniająca warunki:

1. $\forall a{\in}A\ f(a, 0) = g(a)$,
2. $\forall a{\in}A\ \forall n{\in}\mathbb{N}\ f(a, n+1) = h(f(a, n), a, n)$.

Twierdzenie 141 (drugie twierdzenie o definiowaniu przez indukcję). Niech A i B będą dowolnymi zbiorami. Niech $g : A \to B$ oraz $h : B^* \times A \times \mathbb{N} \to B$ będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times \mathbb{N} \to B$ spełniająca warunki:

1. $\forall a{\in}A\ f(a, 0) = g(a)$,
2. $\forall a{\in}A\ \forall n{\in}\mathbb{N}\ f(a, n+1) = h((f(a, 0), \ldots, f(a, n)), a, n)$.

Twierdzenie 142 (O definiowaniu funkcji przez indukcję noetherowską). Niech $\langle C, \leq \rangle$ będzie zbiorem regularnym i niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Niech $B^{\subseteq A \times C}$ oznacza zbiór funkcji częściowych z $A \times C$ w B. Dla dowolnej funkcji $h : B^{\subseteq A \times C} \times A \times C \to B$ istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunek:

$$f(x, c) = h(f \cap (\{y \in A \mid y < x\} \times C \times B), x, c).$$

Zadanie 759. W klasie jest $2n$ dzieci i n dwuosobowych ławek. Wykaż przez indukcję, że dzieci można podzielić w pary na $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ sposobów i rozsadzić w ławkach na $\frac{(2n)!}{2^n}$ sposobów.

Zadanie 760. Skończony zbiór liniowo uporządkowany $\langle A, \leq_A \rangle$ ma n elementów, a zbiór uporządkowany $\langle B, \leq_B \rangle$ ma 2 elementy. Na ile sposobów można porządek liniowy na A rozszerzyć o elementy zbioru B (to znaczy znaleźć porządek liniowy $\langle A \cup B, \leq \rangle$, taki, że $(a_1 \leq_A a_2) \Leftrightarrow (a_1 \leq a_2)$, dla $a_1, a_2 \in A$ oraz $(b_1 \leq_B b_2) \Leftrightarrow (b_1 \leq b_2)$, dla $b_1, b_2 \in B$)? Odpowiedź uzasadnij przy pomocy dowodu przez indukcję.

Zadanie 761. Udowodnij, że jeśli wyrazy ciągu spełniają warunki $a_0 = 2$, $a_1 = 3$ i $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, to $a_n = 2^n + 1$.

Zadanie 762. Dany jest ciąg a_n taki, że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że jeśli $n > 0$, to $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

Zadanie 763. Dany jest ciąg a_n taki, że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że jeśli $n > 0$, to $a_n^2 = (-1)^{n+1} + a_{n-1}a_{n+1}$.

Zadanie 764. Dany jest ciąg a_n, taki, że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnij, że jeśli $n > 0$, to $a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2$.

Zadanie 765. Udowodnij, że obszary wyznaczone przez dowolną skończoną liczbę prostych na płaszczyźnie można pokolorować dwoma kolorami tak, by żadne dwa obszary o tym samym kolorze nie miały wspólnego boku.

Zadanie 766. Wykaż indukcyjnie, że $2^n \geq n^2$ dla każdego $n \geq 5$.

Zadanie 767. Zbiór W na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek, tj. gdy $\overline{ab} \subseteq W$ dla dowolnych punktów $a, b \in W$. Niech $\langle W_i : i \in \mathbb{N} \rangle$ będzie ciągiem zbiorów wypukłych, takich, że $W_i \subseteq W_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Pokaż, że zbiór $W = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} W_n$ jest wypukły.

Zadanie 768. Niech $X \subseteq \mathbb{N}$ będzie zbiorem, takim, że spełniona jest koniunkcja warunków

1. $0, 1 \in X$
2. $\forall n\ (n \in X \Rightarrow 2n \in X)$
3. $\forall n\ (n + 1 \in X \Rightarrow n \in X)$

Udowodnij, że $X = \mathbb{N}$.

Zadanie 769. Dany jest zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający warunki:

1. $0, 1 \in X$,
2. jeśli $x \in X$ oraz $x + 1 \in X$ to $x + 2 \in X$, dla każdej liczby naturalnej x.

Wykaż, że $X = \mathbb{N}$. Czy to twierdzenie pozostanie słuszne, jeśli warunek 1. zastąpimy przez słabszy warunek $0 \in X$?

Zadanie 770. Rozważmy grę, w której ruchy wykonują na zmianę gracz A i gracz B. Gracz A dostaje n cukierków i rozpoczyna grę. W każdym kroku gracz, który ma cukierki, zjada jeden lub dwa cukierki i przekazuje resztę cukierków przeciwnikowi. Wygrywa ten gracz, który zje ostatniego cukierka. Wykaż, że jeśli n dzieli się przez 3, to gracz B potrafi wygrać niezależnie od ruchów gracza A, natomiast jeśli n nie dzieli się przez 3, to gracz A potrafi wygrać niezależnie od ruchów gracza B.

Zadanie 771. Wykaż, że n prostych przecina się na płaszczyźnie w co najwyżej $\frac{n(n-1)}{2}$ punktach.

Zadanie 772. Pokaż przez indukcję, że dla każdej formuły zbudowanej ze zmiennych zdaniowych oraz spójników $\vee, \wedge \Rightarrow, \neg$, liczba wystąpień zmiennych jest o 1 większa od liczby wystąpień binarnych spójników zdaniowych.

Zadanie 773. Pokaż przez indukcję, że dla każdego zbioru A mocy $n \in \mathbb{N}$ istnieje $n!$ bijekcji $f : A \to A$.

Zadanie 774. Udowodnij przez indukcję, że każdą liczbę naturalną większą od 1 można przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. *Wskazówka:* wybierz odpowiednią zasadę indukcji.

11

Elementy algebry uniwersalnej

Definicja 143. *Sygnaturą* nazywamy rodzinę $\{\Sigma_n \mid n \in N\}$ zbiorów parami rozłącznych. Elementy zbioru Σ_n nazywamy *symbolami n-argumentowymi*. Elementy Σ_0 nazywamy *symbolami stałych* (lub po prostu *stałymi*). Kładziemy też $\Sigma = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$.

Definicja 144. *Algebrą nad* Σ (lub Σ*-algebrą*) nazywamy niepusty zbiór A wraz z interpretacją $\cdot^{\mathcal{A}}$, czyli przyporządkowaniem, które każdemu symbolowi $f \in \Sigma_n$ przyporządkowuje funkcję $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$. Tak opisaną algebrę oznaczamy przez $\mathcal{A}$ lub $\langle A, f^{\mathcal{A}} \mid f \in \Sigma\rangle$. Zbiór A nazywamy *nośnikiem* algebry $\mathcal{A}$.

11.1. Algebra termów

Definicja 145. Niech Σ będzie sygnaturą i niech $V = \{v_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ będzie zbiorem zmiennych (zakładamy, że $\Sigma \cap V = \emptyset$). Przez $T(\Sigma, V)$ będziemy oznaczać zbiór termów nad Σ, czyli najmniejszy zbiór zawierający zmienne i symbole stałych (to znaczy $V \subseteq T(\Sigma, V)$ i $\Sigma_0 \subseteq T(\Sigma, V)$) i zamknięty względem Σ (to znaczy jeśli $f \in \Sigma_n, t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, V)$, to $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, V)$).

Przez $T(\Sigma)$ będziemy oznaczać zbiór *termów stałych* nad Σ, czyli najmniejszy zbiór zawierający symbole stałych (to znaczy $\Sigma_0 \subseteq T(\Sigma)$) i zamknięty względem Σ (to znaczy jeśli $f \in \Sigma_n, t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma)$, to $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma)$).

Zbiór termów stałych można też zdefiniować jako zbiór tych termów, w których nie występują zmienne.

W zbiorze termów $T(\Sigma, V)$ łatwo określić interpretację $\cdot^{\mathcal{F}}$ sygnatury Σ, czyli algebrę

$$\langle T(\Sigma, V), f^{\mathcal{F}} : f \in \Sigma\rangle,$$

kładąc $f^{\mathcal{F}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ dla $f \in \Sigma_n, t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, V)$. Podobnie jeśli $\Sigma_0 \neq \emptyset$, można określić interpretację $\mathcal{H}$ sygnatury Σ w $T(\Sigma)$.

Algebry $\mathcal{F}$ i $\mathcal{H}$ są przykładami algebr wolnych nad Σ. Algebra $\mathcal{H}$ jest nazywana *algebrą Herbranda* nad Σ.

Definicja 146. Niech $t, t' \in T(\Sigma, V)$. Mówimy, że t' jest *podtermem* t, jeśli $t = t'$ lub $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ i t' jest podtermem t_i dla pewnego $i \leq n$. Jeśli t' jest podtermem t to piszemy $t' \sqsubseteq t$.

11.1.1. Inna definicja zbioru termów. Drzewa

Definicja 147. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Zbiór $T \subseteq A^*$ jest *drzewem* jeśli jest zamknięty na przedrostki (to znaczy, jeśli $u \prec w$ (u jest przedrostkiem w) oraz $w \in T$, to $u \in T$).

Elementy drzewa nazywamy *wierzchołkami*. Każde drzewo zawiera słowo puste ϵ. Słowo puste nazywamy *korzeniem drzewa*. Jeśli $w \in T$ oraz $wa \in T$ dla $w \in A^*$, $a \in A$, to mówimy, że wa jest *następnikiem* (*synem*) w w T, w nazywamy *poprzednikiem* (*ojcem*) wa. Wierzchołek T, który nie ma następników nazywamy *liściem*. *Ścieżką* w drzewie T nazywamy dowolny podzbiór T liniowo uporządkowany relacją $\prec$. Ścieżka w drzewie T jest *gałęzią*, jeśli jest maksymalnym podzbiorem T liniowo uporządkowanym relacją $\prec$. Każda gałąź zawiera korzeń drzewa. Jeśli gałąź jest skończona, to zawiera dokładnie jeden liść. *Stopniem* wierzchołka w w drzewie T nazywamy ilość następników w. *Długością ścieżki* π nazywamy moc zbioru π. *Wysokością drzewa* T nazywamy kres górny długości ścieżek w T. Jeśli drzewo T jest skończone, to jego wysokość jest równa długości najdłuższej gałęzi w T.

Definicja 148. Niech T będzie drzewem i niech $w \in T$. Kładziemy

$$T_w = \{u \in A^* \mid wu \in T\}.$$

Łatwo sprawdzić, że T_w jest drzewem. T_w nazywamy *poddrzewem drzewa T ukorzenionym w w*. Drzewo U jest poddrzewem T, jeśli $U = T_w$ dla pewnego $w \in T$.

Definicja 149. *Drzewem adresów* nazywamy drzewo T nad $\mathbb{N}$ o tej własności, że dla każdego $w \in T$ zbiór następników w jest odcinkiem początkowym $\mathbb{N}$, to znaczy jeśli $wn \in T$ dla pewnego $n \in N$, oraz $m < n$, to $wm \in T$.

Definicja 150. Niech Σ będzie sygnaturą. *Termem* nad Σ nazywamy dowolną parę $t = \langle T, e \rangle$, gdzie T jest drzewem adresów, $e : T \to \Sigma$ zaś funkcją, taką, że jeśli $w \in T$, $e(w) \in \Sigma_n$, to w ma stopień n.

Definicja 151. Niech $t = \langle T, e \rangle$ będzie termem i niech $w \in T$. *Podtermem* t w w nazywamy term $t_w = \langle T_w, e_w \rangle$, gdzie $e_w(u) = e(wu)$. t' jest podtermem t, jeśli $t' = t_w$ dla pewnego $w \in T$.

11.1.2. Wartość termu

Definicja 152. Niech $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} : f \in \Sigma \rangle$ będzie algebrą nad sygnaturą Σ. Niech $T(\Sigma, X)$ będzie zbiorem termów sygnatury Σ ze zmiennymi ze zbioru X. *Wartościowaniem* X w algebrze $\mathcal{A}$ nazywamy funkcję $\sigma : X \to A$. *Wartością termu* $t \in T(\Sigma, X)$ przy wartościowaniu σ nazywamy element $\mathcal{A}$ otrzymany z termu t po zastąpieniu każdej zmiennej x przez $\sigma(x)$, zastąpieniu symboli funkcji z Σ przez ich interpretacje w $\mathcal{A}$ oraz obliczenie tak otrzymanego wyrażenia w $\mathcal{A}$.

Formalnie, wartościowanie σ rozszerza się do funkcji $\sigma^* : T(\Sigma, X) \to A$ zdefiniowanej w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
\sigma^*(x) &= \sigma(x), \text{ dla } x \in X \text{ oraz} \\
\sigma^*(f(t_1, \ldots, t_n)) &= f^{\mathcal{A}}(\sigma(t_1), \ldots, \sigma(t_n)), \text{ dla } f \in \Sigma_n, t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, X)
\end{aligned}
$$

Jeśli nie będzie prowadzić to do nieporozumień, będziemy pisali σ zamiast σ^*. Funkcję σ nazywamy *wartościowaniem zmiennych*, a funkcję σ^* *wartościowaniem termów*. Element $\sigma^*(t)$ algebry $\mathcal{A}$ nazywamy wartością termu t w algebrze $\mathcal{A}$. Zauważmy, że jeśli term t nie zawiera zmiennych, to $\sigma^*(t)$ nie zależy od σ. Ogólniej, jeśli zmienna x nie występuje w t to $\sigma^*(t)$ nie zależy od $\sigma(x)$.

11.2. Homomorfizmy

Definicja 153. Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą algebrami nad sygnaturą Σ. Funkcja $h : A \to B$ jest homomorfizmem algebry $\mathcal{A}$ w algebrę $\mathcal{B}$, jeśli dla każdego $f \in \Sigma_n$ i dowolnych $a_1, \ldots, a_n \in A$ zachodzi równość

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n)).$$

Przykład 154. Wartościowanie termów w algebrze $\mathcal{A}$ jest homomorfizmem algebry termów w algebrę $\mathcal{A}$.

Przykład 155. Podstawienie jest homomorfizmem algebry termów w siebie.

Definicja 156. Niech Σ będzie sygnaturą. Podstawienie σ w algebrze termów $\mathcal{F} = \langle T(\Sigma, X), f : f \in \Sigma \rangle$ jest funkcją przyporządkowującą zmiennym ze zbioru $X \subseteq V$ elementy $T(\Sigma, V)$. Jest to więc wartościowanie w algebrze termów. Jak poprzednio wartościowanie σ rozszerzamy do $\sigma^* : T(\Sigma, V) \to T(\Sigma, V)$ kładąc $\sigma(y) = y$ dla $y \in V \setminus X$. Oczywiście, tak jak poprzednio $\sigma^*(x) = \sigma(x)$ dla $x \in X$ oraz $\sigma^*(f(t_1, \ldots, t_n) = f(\sigma^*(t_1), \ldots, \sigma^*(t_n))$. Term $\sigma^*(t)$ nazywamy wartością termu t przy podstawieniu σ. Podobnie jak poprzednio, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, piszemy σ zamiast σ^*. Wartość termu t przy podstawieniu σ jest termem uzyskanym z termu t przez zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej x w termie t przez term $\sigma(x)$.

Zadanie 775. Niech Σ będzie dowolną sygnaturą i niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą dowolnymi algebrami sygnatury Σ. Wykaż, że istnieje algebra $\mathcal{C}$ o sygnaturze Σ, dla której istnieją homomorfizmy: g algebry $\mathcal{C}$ na $\mathcal{A}$ i h algebry $\mathcal{C}$ na $\mathcal{B}$.

Zadanie 776. Udowodnij, że pierścień $\mathbb{Z}_p = (\{0, \ldots, p-1\}, +, \cdot, 0, 1)$ dla dowolnej liczby pierwszej p spełnia formułę $\forall x (x \neq 0 \Rightarrow \exists y (x \cdot y = 1))$.

Zadanie 777. Znajdź wszystkie homomorfizmy algebry $\langle \{a\}^*, \cdot, \epsilon \rangle$ w algebrę $\langle \{a, b\}^*, \cdot, \epsilon \rangle$, gdzie $\cdot$ oznacza konkatenację (złączenie) słów, a ϵ oznacza słowo puste.

Zadanie 778. Niech $\langle \{a, b\}^*, \cdot \rangle$ będzie algebrą słów nad alfabetem $\{a, b\}$ z konkatenacją „$\cdot$”. Jaka jest moc zbioru wszystkich homomorfizmów $h : \{a, b\}^* \to \{a, b\}^*$ algebry $\langle \{a, b\}^*, \cdot \rangle$ w siebie?

Zadanie 779. Niech $\mathbb{Z}_n$ oznacza algebrę $\langle \{0, 1, \ldots, n-1\}, + \rangle$, gdzie $+$ oznacza dodawanie modulo n. Ile jest homomorfizmów

1. $h : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_3$,
2. $h : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$?

Zadanie 780. Ile jest homomorfizmów $h : \mathbb{Z}_{2^n} \to \mathbb{Z}_k$, dla $k \leq 2^n$.

Zadanie 781. Niech $\mathfrak{B}_n$ oznacza algebrę $\langle \mathcal{P}(\{0, \ldots, n-1\}), \cup, \cap, \setminus \rangle$. Ile jest homomorfizmów:

1. $h : \mathfrak{B}_5 \to \mathfrak{B}_3$?
2. $h : \mathfrak{B}_3 \to \mathfrak{B}_5$?

Zadanie 782. Niech $\mathfrak{B}_n$ oznacza algebrę $\langle \mathcal{P}(\{0, \ldots, n-1\}), \cup, \cap, {}^C \rangle$, gdzie ^{C} oznacza dopełnienie zbioru. Ile jest homomorfizmów:

1. $h : \mathfrak{B}_5 \to \mathfrak{B}_3$?
2. $h : \mathfrak{B}_3 \to \mathfrak{B}_5$?

Zadanie 783. Niech $\mathfrak{B}_n$ oznacza algebrę $\langle \mathcal{P}(\{0, \ldots, n-1\}), \cup, \cap \rangle$. Ile jest homomorfizmów:

1. $h : \mathfrak{B}_5 \to \mathfrak{B}_3$?
2. $h : \mathfrak{B}_3 \to \mathfrak{B}_5$?

Zadanie 784. Niech $\mathfrak{B}_n$ oznacza algebrę $\langle \mathcal{P}(\{0, \ldots, n-1\}), \cup \rangle$. Ile jest homomorfizmów:

1. $h : \mathfrak{B}_5 \to \mathfrak{B}_3$?

2. $h : \mathfrak{B}_3 \to \mathfrak{B}_5$?

Zadanie 785. Przyjmijmy, że $[0,1) = \{r \in \mathbb{R} : 0 \leq r < 1\}$, funkcja $f : \mathbb{R} \to [0,1)$ przyporządkowuje liczbie x część ułamkową x (tj. $f(x) \in [0,1)$ i $x - f(x)$ jest liczbą całkowitą dla każdego $x \in \mathbb{R}$), a funkcja $g : [0,1) \to \mathbb{R}$ jest identycznością na $[0,1)$ (to znaczy $g(x) = x$ dla $x \in [0,1)$). W zbiorze $[0,1)$ definiujemy działanie $\oplus$ kładąc $x \oplus y = f(x+y)$. Rozważamy algebry

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1 &= \langle \mathbb{R}, + \rangle \\
\mathcal{R}_2 &= \langle \mathbb{R}, +, \times \rangle \\
\mathcal{R}_3 &= \langle [0,1), \oplus \rangle \\
\mathcal{R}_4 &= \langle [0,1), \oplus, \times \rangle
\end{aligned}$$

a) Czy f jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_1$ w $\mathcal{R}_3$?
b) Czy f jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_2$ w $\mathcal{R}_4$?
c) Czy g jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_3$ w $\mathcal{R}_1$?
d) Czy g jest homomorfizmem algebry $\mathcal{R}_4$ w $\mathcal{R}_2$?

Zadanie 786. Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ określamy relację równoważności $\sim$ wzorem

$$X \sim Y \quad \text{wtw} \quad |X \dot{-} Y| < \aleph_0$$

(patrz zadanie 539). W zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$ definiujemy działania

$$\begin{aligned}
[X]_\sim \cup [Y]_\sim &= [X \cup Y]_\sim \\
[X]_\sim \cap [Y]_\sim &= [X \cap Y]_\sim \\
[X]_\sim \setminus [Y]_\sim &= [X \setminus Y]_\sim
\end{aligned}$$

Czy powyższe definicje są poprawne? Czy funkcja $h : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$ określona wzorem $h(X) = [X]_\sim$ jest homomorfizmem algebry $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}), \cup, \cap, \setminus \rangle$ w algebrę $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \cup, \cap, \setminus \rangle$.

Definicja 157. W zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$ definiujemy porządek $\preceq$ kładąc $[X]_\sim \preceq [Y]_\sim$, jeśli $X \cup Y \in [Y]_\sim$.

Zadanie 787. Sprawdź, czy powyższa definicja jest poprawna. Czy $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \preceq \rangle$ jest kratą?

Zadanie 788. Czy zbiór $\{[X_n]_\sim \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdzie $X_n = \{2^n k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ma kres dolny?

Zadanie 789. Czy w $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim, \preceq \rangle$ istnieje nieskończony antyłańcuch?

Zadanie 790. Niech Σ będzie sygnaturą, zawierającą co najmniej jeden binarny symbol funkcyjny i niech V oznacza przeliczalny nieskończony zbiór zmiennych. Niech $\mathcal{T}(\Sigma, V)$ oznacza algebrę termów nad sygnaturą Σ ze zmiennymi z V. Rozważamy homomorfizmy

$$h : \mathcal{T}(\Sigma, V) \to \mathcal{T}(\Sigma, V).$$

Czy jest taki homomorfizm h i term t, dla których zbiór $h^{-1}(\{t\})$ jest nieskończony? Podaj wszystkie liczby naturalne n, takie, że istnieją h i t, dla których zbiór $h^{-1}(\{t\})$ ma n elementów.

11.3. Problem unifikacji

Definicja 158. Niech Σ będzie sygnaturą. *Problemem unifikacji* nazywamy następujące zadanie: „mając dany zbiór $\{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$, znaleźć takie podstawienie σ, żeby dla każdego $i \leq n$ zachodziło $\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$." To znaczy, należy znaleźć takie przyporządkowanie termów zmiennym występującym w termach $t_1, u_1, \ldots, t_n, u_n$, żeby po podstawieniu tych termów za odpowiednie zmienne uzyskać termy równe. Podstawienie σ nazywamy *unifikatorem* zbioru $\{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$. Często ten zbiór (nazywany czasem *instancją problemu unifikacji*) zapisujemy jako

$$\{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, t_n \stackrel{?}{=} u_n\}.$$

Definicja 159. Jeśli σ i τ są unifikatorami zbioru $\{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$, to mówimy, że σ jest *ogólniejsze* od τ, (co oznaczamy $\tau \leq \sigma$) jeśli istnieje podstawienie ϱ, takie, że $\tau = \varrho(\sigma)$, gdzie $(\varrho(\sigma))(x) = \varrho(\sigma(x))$. Podstawienie σ nazywamy *najogólniejszym unifikatorem* zbioru

$$PU \quad = \quad \{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, t_n \stackrel{?}{=} u_n\},$$

jeśli σ jest unifikatorem PU oraz σ jest ogólniejsze od każdego innego unifikatora PU.

Twierdzenie 160. Istnieje algorytm, który dla zadanej instancji

$$\{t_1 \stackrel{?}{=} u_1, \ldots, t_n \stackrel{?}{=} u_n\}$$

problemu unifikacji znajduje jego najogólniejszy unifikator lub odpowiada „nie ma unifikatora".

Zadanie 791. W tym zadaniu będziemy rozważać zadania unifikacji składające się z nieskończonej liczby par termów. Udowodnij następujące twierdzenie o zwartości dla problemu unifikacji: zadanie unifikacji $\{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}_{i \in I}$, w którym występuje jedynie skończenie wiele różnych zmiennych, ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy każde jego skończone podzadanie $\{t_i \stackrel{?}{=} s_i\}_{i \in I_0}$, dla $I_0 \subseteq I$, $|I_0| < \infty$, ma rozwiązanie. Pokaż, że twierdzenie jest fałszywe, jeśli zadanie zawiera nieskończenie wiele zmiennych.

W poniższych zadaniach znajdź najogólniejszy unifikator dla podanych instancji problemu unifikacji (lub uzasadnij, że takowy nie istnieje) w algebrze termów o sygnaturze $\Sigma = \{c, d, g, f\}$ i zbiorze zmiennych $\mathcal{X} = \{x, y, z, u, v, \ldots\}$.

Zadanie 792. $\{f(x, f(x, c, g(z)), f(g(g(z)), x, g(c))) \stackrel{?}{=} f(f(u, v, v), y, y)\}$

Zadanie 793. $\{f(f(d, y), f(z, x)) \stackrel{?}{=} f(f(y, z), f(x, c))\}$

Zadanie 794.
$$\begin{aligned}\{f(f(x, y), f(z, u)) &\stackrel{?}{=} \\ f(f(f(f(u, u), f(u, u)), &f(f(x, x), f(x, x))), \\ f(f(f(y, y), f(y, y)), &f(f(u, u), f(u, u))))\}\end{aligned}$$

Zadanie 795. $\{f(x_1, x_1) \stackrel{?}{=} x_2, f(x_2, x_2) \stackrel{?}{=} x_3, \ldots, f(x_{n-1}, x_{n-1}) \stackrel{?}{=} x_n\}$

12

Elementy logiki formalnej

12.1. System Hilberta dla rachunku zdań ze spójnikami implikacji i fałszu

Definicja 161. Litera Δ oznacza dowolny zbiór formuł zdaniowych, zaś litery α, β, γ oznaczają dowolne formuły. Dla dowolnej formuły α zapis $\neg\alpha$ jest skrótem zapisu $\alpha \to \bot$.

Wyrażenie postaci $\Delta \vdash \alpha$ nazywamy *sekwentem*. Wyrażenie $\vdash \alpha$ oznacza $\emptyset \vdash \alpha$. Wyrażenie Δ, α oznacza $\Delta \cup \{\alpha\}$.

Aksjomaty systemu Hilberta

$$\begin{aligned}
\Delta, \alpha &\vdash \alpha \\
\Delta &\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha) \\
\Delta &\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma)) \\
\Delta &\vdash \neg\neg\alpha \to \alpha
\end{aligned}$$

Reguła dowodzenia (reguła odrywania)

$$\frac{\Delta \vdash \alpha \quad \Delta \vdash \alpha \to \beta}{\Delta \vdash \beta}$$

Sekwenty nad poziomą kreską nazywamy *przesłankami*, a sekwent pod kreską nazywamy *konkluzją*. Dowodem (sekwentu $\Delta \vdash \alpha$) nazywamy skończone drzewo etykietowane sekwentami, którego korzeń ma etykietę $\Delta \vdash \alpha$, liście są etykietowane aksjomatami oraz dla każdego wierzchołka jego etykieta jest konkluzją reguły wnioskowania, której przesłankami są etykiety następników tego wierzchołka. Jeśli istnieje dowód, którego korzeń jest etykietowany sekwentem $\Delta \vdash \alpha$, to mówimy, że sekwent $\Delta \vdash \alpha$ jest *wyprowadzalny* w systemie Hilbertowskim. Piszemy, że $\Delta \vdash \alpha$, jeśli sekwent $\Delta \vdash \alpha$ jest wyprowadzalny w systemie Hilbertowskim.

Twierdzenie 162 (O dedukcji). Dla dowolnego zbioru formuł Δ oraz dowolnych formuł α i β, jeśli $\Delta, \alpha \vdash \beta$, to $\Delta \vdash \alpha \to \beta$.

Twierdzenie 163 (O adekwatności). Jeśli $\Delta \vdash \alpha$, to dla każdego wartościowania zmiennych zdaniowych, jeśli spełnia ono wszystkie formuły z Δ, to spełnia także formułę α. W szczególności, jeśli $\vdash \alpha$, to α jest tautologią.

Twierdzenie 164. Dla dowolnych formuł α i β zbudowanych ze zmiennych zdaniowych przy użyciu spójników $\perp$ i $\to$, następujące sekwenty są wyprowadzalne w systemie Hilbertowskim:

$$\begin{array}{ll} \vdash & \alpha \to (\neg\beta \to \neg(\alpha \to \beta)) \\ \vdash & \perp \to \alpha \\ \vdash & (\alpha \to \beta) \to ((\neg\alpha \to \beta) \to \beta) \end{array}$$

Twierdzenie 165 (Kalmar). Niech α będzie formułą zbudowaną ze zmiennych q_1, $q_2, \ldots, q_n$ przy użyciu spójników $\perp$ i $\to$, i niech $v : V \to \{0, 1\}$ będzie dowolnym wartościowaniem. Dla $i = 1, \ldots, n$ definiujemy formuły:

$$q_i' = \begin{cases} q_i & \text{jeśli } v(q_i) = 1, \\ \neg q_i & \text{jeśli } v(q_i) = 0. \end{cases}$$

Niech α' będzie formuła identyczną z α, jeśli wartościowanie v spełnia formułę α. Jeśli natomiast wartościowanie v nie spełnia formuły α, to jako α' bierzemy $\neg\alpha$. Wówczas $\{q_1', \ldots, q_n'\} \vdash \alpha'$.

Twierdzenie 166. Dla dowolnego zbioru formuł Δ i dowolnych formuł α i β, jeśli $\Delta, \alpha \vdash \beta$ i $\Delta, \neg\alpha \vdash \beta$, to $\Delta \vdash \beta$.

Twierdzenie 167 (O pełności). Jeśli α jest tautologią zbudowaną ze zmiennych zdaniowych przy użyciu spójników $\to$ i $\perp$, to $\vdash \alpha$.

12.2. System Hilberta dla rachunku zdań ze spójnikami alternatywy i koniunkcji

Pozwalamy, by formuły zawierały spójniki $\vee$ i $\wedge$ i rozszerzamy system Hilberta o następujące aksjomaty:

$$\begin{array}{lll} \Delta & \vdash & (\alpha \wedge \beta) \to \neg(\alpha \to \neg\beta) \\ \Delta & \vdash & \neg(\alpha \to \neg\beta) \to (\alpha \wedge \beta) \\ \Delta & \vdash & (\alpha \vee \beta) \to (\neg\alpha \to \beta) \\ \Delta & \vdash & (\neg\alpha \to \beta) \to (\alpha \vee \beta) \end{array}$$

Aby odróżnić ten system od poprzedniego, jego sekwenty będziemy oznaczać $\Delta \vdash_{H^+} \alpha$.

Twierdzenie 168. Dla dowolnej formuły zdaniowej α istnieje formuła $\tilde{\alpha}$ zbudowana ze zmiennych zdaniowych jedynie przy użyciu spójników $\perp$ i $\rightarrow$, taka, że

$$\vdash_{H^+} \alpha \rightarrow \tilde{\alpha} \text{ oraz } \vdash_{H^+} \tilde{\alpha} \rightarrow \alpha.$$

Dla rozszerzonego systemu również są prawdziwe twierdzenia o adekwatności i pełności.

Podaj formalne wyprowadzenia w systemie hilbertowskim sekwentów wymienionych w poniższych zadaniach.

Zadanie 796. $\vdash p \wedge q \Rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$

Zadanie 797. $\{p, \neg p\} \vdash q$

Zadanie 798. $\{p \Rightarrow q, p, q \Rightarrow r\} \vdash r$

Zadanie 799. Niech $\hat{\alpha}$ oznacza *dualizację formuły* α, tzn. formułę powstałą przez zastąpienie każdego wystąpienia symbolu $\vee$ przez $\wedge$, i każdego wystąpienia $\wedge$ przez $\vee$. Udowodnij, że

- α jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest $\neg\hat{\alpha}$;
- $\alpha \Leftrightarrow \beta$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy tautologią jest $\hat{\alpha} \Leftrightarrow \hat{\beta}$.

Zadanie 800. Niech $\vdash_{H_1}$ oznacza hilbertowski system dowodzenia $\vdash_H$, w którym aksjomat $\Delta \vdash \neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha$ jest zastąpiony przez

$$\Delta \vdash (\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha).$$

Udowodnij, że obydwa systemy są równoważne, tzn., że dla dowolnego sekwentu $\Delta \vdash \alpha$ zachodzi $\Delta \vdash_H \alpha$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta \vdash_{H_1} \alpha$.

Zadanie 801. Udowodnij, że aksjomatu $\Delta \vdash (\neg\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow ((\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow \alpha)$ hilbertowskiego systemu dowodzenia nie można wyprowadzić z pozostałych aksjomatów za pomocą reguły odrywania.

Zadanie 802. Udowodnij $\vdash_H \neg p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$ używając twierdzenia o dedukcji oraz bez użycia tego twierdzenia.

Zadanie 803. Pokaż, że w systemie $\vdash_H$ wyprowadzalna jest reguła

$$\frac{\Delta \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \Delta \vdash \neg\beta}{\Delta \vdash \neg\alpha}$$

12.3. Składnia języka pierwszego rzędu

Definicja 169. *Sygnaturą* języka pierwszego rzędu nazywamy zbiór $\Sigma = \Sigma^F \cup \Sigma^R$, gdzie Σ^F jest zbiorem *symboli funkcyjnych* a Σ^R zbiorem *symboli relacyjnych*, przy czym $\Sigma^F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i^F$ i $\Sigma^R = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i^R$, gdzie Σ_i^F i Σ_i^R są odpowiednio zbiorami i-argumentowych ($i \geq 0$) symboli funkcyjnych i relacyjnych.

Definicja 170. Zbiór termów $\mathcal{T}(\Sigma, V) = \mathcal{T}(\Sigma^F, V)$ definiujemy jako najmniejszy zbiór zawierający zmienne ze zbioru V i zamknięty ze względu na tworzenie termów złożonych zawierających symbole funkcji z Σ^F, tj. jeśli $t_1, \ldots, t_n$ są termami, zaś $f \in \Sigma_n^F$, to $f(t_1, \ldots, t_n)$ też jest termem.

Definicja 171. Zbiór formuł atomowych jest zbiorem napisów postaci $R(t_1, \ldots, t_n)$, gdzie $R \in \Sigma_n^R$, zaś $t_1, \ldots, t_n$ są termami.

Definicja 172. Zbiór *formuł języka pierwszego rzędu* jest najmniejszym zbiorem napisów zawierającym formuły atomowe, zamkniętym ze względu na spójniki zdaniowe $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\bot$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, oraz kwantyfikatory $\forall$ i $\exists$, tzn. jeśli α i β są formułami, zaś x jest zmienną (z V), to formułami są także $\bot$, $\neg\alpha$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, $\alpha \Leftrightarrow \beta$, $\forall x\, \alpha$, $\exists x\, \alpha$.

Definicja 173. Zbiór zmiennych *wolnych* $\mathrm{FV}(\alpha)$ formuły α definiujemy indukcyjnie:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(\bot) &= \emptyset \\
\mathrm{FV}(R(t_1, \ldots, t_n)) &= \mathrm{FV}(t_1) \cup \ldots \cup \mathrm{FV}(t_n) \\
\mathrm{FV}(\alpha \vee \beta) = \mathrm{FV}(\alpha \wedge \beta) = \mathrm{FV}(\alpha \Rightarrow \beta) = \mathrm{FV}(\alpha \Leftrightarrow \beta) &= \mathrm{FV}(\alpha) \cup \mathrm{FV}(\beta) \\
\mathrm{FV}(\forall x\, \alpha) = \mathrm{FV}(\exists x\, \alpha) &= \mathrm{FV}(\alpha) \setminus \{x\}
\end{aligned}$$

gdzie dla termów $\mathrm{FV}(t_i)$ oznacza zbiór wszystkich zmiennych występujących w t_i.

Definicja 174. Wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w formule α stają się *związanie* w formule $\forall x\, \alpha$ i $\exists x\, \alpha$. Mówimy że kwantyfikator *wiąże* te wystąpienia.

Definicja 175. Formuła bez zmiennych wolnych nazywa się *zdaniem*.

12.4. Semantyka języka pierwszego rzędu

Definicja 176. *Struktura* $\mathfrak{A}$ *sygnatury* Σ to niepusty zbiór A zwany jej *uniwersum* i *interpretacja*, czyli funkcja $\cdot^{\mathfrak{A}}$, która każdemu symbolowi funkcji $f \in \Sigma_n^F$, gdzie $n \geq 0$, przyporządkowuje funkcję $f^{\mathfrak{A}} : A^n \to A$, każdemu symbolowi relacji $R \in \Sigma_n^R$, gdzie $n > 0$, przyporządkowuje relację $R^{\mathfrak{A}} \subseteq A^n$ i każdemu symbolowi $R \in \Sigma_0^R$ przyporządkowuje wartość logiczną ze zbioru $\{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$.

Definicja 177. *Wartościowaniem* w strukturze $\mathfrak{A}$ nazywamy dowolną funkcję $v : V \to A$. Ponadto niech

$$(v_x^a)(y) = \begin{cases} v(y), & \text{gdy } x \neq y, \\ a, & \text{gdy } x = y, \end{cases}$$

dla dowolnego wartościowania $v : V \to A$, zmiennej $x \in V$ i elementu $a \in A$.

Definicja 178. Dla dowolnego termu z $\mathcal{T}(\Sigma^F, V)$ definiujemy indukcyjnie jego *interpretację* $t^{\mathfrak{A}}[v]$ przy zadanym wartościowaniu zmiennych $v : V \to A$:

$$\begin{aligned} x^{\mathfrak{A}}[v] &= v(x) \\ (f(t_1, \ldots, t_n))^{\mathfrak{A}}[v] &= f^{\mathfrak{A}}(t_1^{\mathfrak{A}}[v], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[v]) \end{aligned}$$

Definicja 179. Poniżej definiujemy indukcyjnie relację $\models$. Gdy ona zachodzi, co oznaczamy $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$, to mówimy że *struktura* $\mathfrak{A}$ *spełnia formułę* α *przy wartościowaniu* v.

1. Nigdy nie zachodzi $\mathfrak{A} \models \bot[v]$.
2. $\mathfrak{A} \models R(t_1, \ldots, t_n)[v]$ wtw $(t_1^{\mathfrak{A}}[v], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}[v]) \in R^{\mathfrak{A}}$.
3. $\mathfrak{A} \models (t_1 = t_2)[v]$ wtw $t_1^{\mathfrak{A}}[v] = t_2^{\mathfrak{A}}[v]$.
4. $\mathfrak{A} \models (\alpha \wedge \beta)[v]$ wtw gdy zachodzą jednocześnie $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ i $\mathfrak{A} \models \beta[v]$.
5. $\mathfrak{A} \models (\alpha \vee \beta)[v]$ wtw gdy $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ lub $\mathfrak{A} \models \beta[v]$.
6. $\mathfrak{A} \models (\alpha \Rightarrow \beta)[v]$ wtw gdy nie zachodzi $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ lub zachodzi $\mathfrak{A} \models \beta[v]$.
7. $\mathfrak{A} \models (\alpha \Leftrightarrow \beta)[v]$ wtw jednocześnie nie zachodzą $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ i $\mathfrak{A} \models \beta[v]$, lub jednocześnie zachodzą $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$ i $\mathfrak{A} \models \beta[v]$.
8. $\mathfrak{A} \models (\forall x.\alpha)[v]$ wtw dla każdego elementu $a \in A$ zachodzi $\mathfrak{A} \models \alpha[v_x^a]$.
9. $\mathfrak{A} \models (\exists x.\alpha)[v]$ wtw istnieje element $a \in A$ dla którego zachodzi $\mathfrak{A} \models \alpha[v_x^a]$.

Definicja 180. Formuła α jest *spełnialna w* $\mathfrak{A}$, jeśli istnieje wartościowanie $v : V \to A$ dla którego zachodzi $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$. Formuła α jest *spełnialna*, jeśli istnieje struktura $\mathfrak{A}$, w której α jest spełnialna. Formuła α jest *prawdziwa w* $\mathfrak{A}$ (struktura $\mathfrak{A}$ jest *modelem dla* α), jeśli dla każdego wartościowania $v : V \to A$ zachodzi $\mathfrak{A} \models \alpha[v]$. Formuła α jest *prawdziwa* (jest *tautologią*), jeśli dla każdej struktury $\mathfrak{A}$, formuła α jest prawdziwa w $\mathfrak{A}$.

12.5. Podstawienia

Definicja 181. Dla dowolnej formuły α napis $\alpha[x/t]$ oznacza wynik podstawienia termu t w każde wolne wystąpienie x w α. Podstawienie $[x/t]$ jest *dopuszczalne* w α, jeśli w wyniku tego podstawienia żadna zmienna z t nie staje się związana, tj. każde wystąpienie x w α nie znajduje się w zasięgu żadnego kwantyfikatora wiążącego zmienną występującą w t.

Twierdzenie 182 (o podstawianiu). Dla dowolnych termów s i t i zmiennej x zachodzi

$$(t[x/s])^{\mathfrak{A}}[v] \quad = \quad t^{\mathfrak{A}}[v_x^{s^{\mathfrak{A}}[v]}].$$

Dla dowolnej formuły α, jeśli podstawienie $[x/s]$ jest dopuszczalne w α, to

$$\mathfrak{A} \models (\alpha[x/s])[v] \quad \text{wtw} \quad \mathfrak{A} \models \alpha[v_x^{s^{\mathfrak{A}}[v]}].$$

Fakt 183. Dla dowolnej formuły α, zmiennej x i termu s, jeśli podstawienie $[x/s]$ jest dopuszczalne w α, to formuła $(\forall x.\alpha) \Rightarrow (\alpha[x/s])$ jest tautologią.

12.6. Hilbertowski system dowodzenia dla rachunku I rzędu

Aksjomaty

$$
\begin{array}{rcl}
\Delta, \alpha & \vdash & \alpha \\
\Delta & \vdash & \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha) \\
\Delta & \vdash & (\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma)) \\
\Delta & \vdash & \neg\neg\alpha \Rightarrow \alpha \\
\Delta & \vdash & (\alpha \wedge \beta) \Rightarrow \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \\
\Delta & \vdash & \neg(\alpha \Rightarrow \neg\beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta) \\
\Delta & \vdash & (\alpha \vee \beta) \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta) \\
\Delta & \vdash & (\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \vee \beta) \\
\Delta & \vdash & (\alpha \Leftrightarrow \beta) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \\
\Delta & \vdash & ((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)) \Rightarrow (\alpha \Leftrightarrow \beta) \\
\Delta & \vdash & (\forall x.(\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow ((\forall x.\alpha) \Rightarrow (\forall x.\beta)) \\
\Delta & \vdash & \alpha \Rightarrow (\forall x.\alpha), \quad \text{jeśli } x \notin \mathrm{FV}(\alpha) \\
\Delta & \vdash & (\forall x.\alpha) \Rightarrow \alpha[x/t], \quad \text{jeśli } [x/t] \text{ jest dopuszczalne w } \alpha \\
\Delta & \vdash & x = x \\
\Delta & \vdash & x_1 = y_1 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (x_n = y_n \Rightarrow (f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)))), \\
 & & \quad \text{gdzie } f \in \Sigma_n^F \\
\Delta & \vdash & x_1 = y_1 \Rightarrow (\ldots \Rightarrow (x_n = y_n \Rightarrow (R(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow R(y_1, \ldots, y_n)))), \\
 & & \quad \text{gdzie } R \in \Sigma_n^R
\end{array}
$$

Reguła dowodzenia

$$\frac{\Delta \vdash \alpha \Rightarrow \beta \quad \Delta \vdash \alpha}{\Delta \vdash \beta}$$

Zbiór formuł Δ jest *sprzeczny*, jeśli $\Delta \vdash \bot$. Zbiór, który nie jest sprzeczny, jest *niesprzeczny*.

Twierdzenie 184 (O dedukcji). Dla dowolnego zbioru formuł Δ oraz dowolnych formuł α i β, jeśli $\Delta, \alpha \vdash \beta$, to $\Delta \vdash \alpha \to \beta$.

Definicja 185. Napis $\Delta \models \alpha$ oznacza, że dla każdej struktury $\mathfrak{A}$ i każdego wartościowania v, jeśli dla każdej formuły $\beta \in \Delta$ zachodzi $\mathfrak{A} \models \beta[v]$, to również $\mathfrak{A} \models \alpha$.

Twierdzenie 186 (O adekwatności). Jeśli $\Delta \vdash \alpha$, to $\Delta \models \alpha$. W szczególności, jeśli $\vdash \alpha$, to α jest tautologią.

Twierdzenie 187 (O istnieniu modelu). Dla dowolnej sygnatury Σ, każdy niesprzeczny zbiór zdań nad Σ ma model.

Twierdzenie 188 (Silne twierdzenie o pełności). Dla dowolnego zbioru formuł Δ oraz dowolnej formuły α, jeśli $\Delta \models \alpha$, to $\Delta \vdash \alpha$. W szczególności, jeśli α jest tautologią, to $\vdash \alpha$.

Twierdzenie 189 (O α-konwersji). Jeśli $\Delta \vdash \forall x.\beta$ oraz podstawienie $[x/y]$ jest dopuszczalne w β, oraz $y \notin \mathrm{FV}(\forall x.\beta)$, to $\Delta \vdash \forall y.(\beta[x/y])$.

Twierdzenie 190 (O generalizacji). Jeśli $\Delta \vdash \alpha$, to dla dowolnej zmiennej x, jeśli $x \notin \mathrm{FV}(\Delta)$, to $\Delta \vdash \forall x.\alpha$.

13

Zadania egzaminacyjne z rozwiązaniami*

Zadanie 804. Niech ϕ będzie formułą zdaniową zbudowaną ze zmiennych zdaniowych i spójników alternatywy, koniunkcji i negacji (do jej zapisania można oczywiście używać nawiasów). Przez *wartościowanie* rozumiemy w tym zadaniu funkcję, która zmiennym *występującym* w formule ϕ przyporządkowuje wartości ze zbioru $\{0, 1\}$. Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną.

a) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $k \leq 2^n$ istnieje formuła zdaniowa ϕ zawierająca n zmiennych i spełniona przez dokładnie k wartościowań.

b) Dla jakich liczb k istnieje formuła ϕ zawierająca n zmiennych, w której każda ze zmiennych występuje dokładnie jeden raz i która jest spełniona przez dokładnie k wartościowań?

Rozwiązanie. Część a) jest oczywistą konsekwencją zupełności zbioru spójników złożonego z alternatywy, koniunkcji i negacji. Bierzemy dowolną funkcję boolowską n zmiennych przyjmującą wartość 1 dla k argumentów i korzystając z zupełności stwierdzamy, że jest to funkcja przyporządkowująca układowi zer i jedynej wartość logiczną pewnej formuły przy wartościowaniu wyznaczonym przez ten układ. Dokładniej, bierzemy n zmiennych zdaniowych $p_1, \ldots, p_n$ i tworzymy formuły będące koniunkcją tych zmiennych bądź ich negacji (np. $\neg p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$). Formuły tej postaci są spełnione przez dokładnie jedno wartościowanie. Alternatywa k różnych formuł takiej postaci (dowolnie wybranych) jest formułą spełnioną przez dokładnie k wartościowań.

Bardziej szczegółowo przedstawimy inne rozwiązanie tego zadania. Przyjmijmy, że $W(\phi)$ oznacza zbiór wartościowań spełniających formułę ϕ. Symbolem $|X|$ oznaczamy liczbę elementów zbioru X.

Fakt 191. Jeżeli w formule ϕ występuje n zmiennych, to $|W(\neg\phi)| = 2^n - |W(\phi)|$.

*Rozdział przygotował A. Kościelski.

Dowód. Jest to oczywisty fakt. Dla formuły ϕ z n zmiennymi jest 2^n wartościowań. Każde z nich spełnia albo ϕ, albo $\neg\phi$, żadne nie może jednocześnie spełniać obu tych formuł.

Fakt 192. Jeżeli żadna zmienna nie występuje jednocześnie w formulach ϕ i ψ, to

$$|W(\phi \wedge \psi)| = |W(\phi)| \cdot |W(\psi)|.$$

Dowód. Rozważmy funkcję, która wartościowaniu h formuły $\phi \wedge \psi$ przyporządkowuje parę dwóch wartościowań: wartościowania będącego obcięciem h do zmiennych formuły ϕ i wartościowania będącego obcięciem h do zmiennych formuły ψ. Różnowartościowość tej funkcji jest oczywista.

Wystarczy teraz zauważyć, że funkcja ta przekształca zbiór $W(\phi \wedge \psi)$ na iloczyn kartezjański $W(\phi) \times W(\psi)$. (Gdzie w tym dowodzie korzysta się z założenia o zmiennych formuł ϕ i ψ?)

Wniosek. Jeżeli zmienna p nie występuje w formule ϕ, to $|W(\phi \wedge p)| = |W(\phi)|$.

Wniosek. Jeżeli w formule ϕ występuje n zmiennych i nie ma wśród nich zmiennej p, to $|W(\phi \vee p)| = 2^n + |W(\phi)|$.

Dowód. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
|W(\phi \vee p)| &= |W(\neg(\neg\phi \wedge \neg p))| \\
&= 2^{n+1} - |W(\neg\phi \wedge \neg p)| \\
&= 2^{n+1} - |W(\neg\phi)| \cdot |W(\neg p)| \\
&= 2^{n+1} - (2^n - |W(\phi)|) \cdot (2 - |W(p)|) \\
&= 2^{n+1} - 2^n + |W(\phi)| \\
&= 2^n + |W(\phi)|.
\end{aligned}$$

Fakt 193. Dla każdej liczby naturalnej $k \leq 2^n$ istnieje formuła zdaniowa z n zmiennymi spełniona przez dokładnie k wartościowań.

Dowód. Fakt ten dowodzimy przez indukcję ze względu na n.

Zauważmy, że $|W(p \wedge \neg p)| = 0$, $|W(p)| = 1$ i $|W(p \vee \neg p)| = 2$. Tym samym twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

Załóżmy, że twierdzenie to zachodzi dla liczby n i weźmy $k \leq 2^{n+1}$. Zachodzi jeden z dwóch przypadków: albo $k \leq 2^n$, albo $2^n < k \leq 2^{n+1}$.

Jeżeli $k \leq 2^n$, to znajdujemy formułę ϕ z n zmiennymi, która jest spełniona przez k wartościowań, i zmienną p, która nie występuje w ϕ. Formuła $\phi \wedge p$ jest spełniona przez k wartościowań i występuje w niej $n + 1$ zmiennych.

Jeżeli $2^n < k \leq 2^{n+1}$, to bierzemy formułę ϕ z n zmiennymi, spełnioną przez $k - 2^n$ wartościowań. Wtedy dla dowolnej zmiennej p nie występującej w ϕ formuła $\phi \vee p$ jest spełniona przez k wartościowań i występuje w niej $n + 1$ zmiennych.

Podobnie dowodzimy następujący fakt:

Fakt 194. Dla każdej nieparzystej liczby naturalnej $k \leq 2^n$ istnieje formuła zdaniowa z n zmiennymi, w której każda zmienna występuje dokładnie jeden raz i która jest spełniona przez dokładnie k wartościowań.

Dowód. Twierdzenie to także dowodzimy przez indukcję ze względu na n. Formułę, w której każda zmienna występuje najwyżej jeden raz, będziemy nazywać *formułą prostą*.

Zauważmy, że $|W(p)| = 1$. Wobec tego dowodzone twierdzenie jest prawdziwe dla $n = 1$.

Załóżmy, że twierdzenie to zachodzi dla liczby n i weźmy nieparzystą liczbę $k \leq 2^{n+1}$. Liczba k jest albo $\leq 2^n$, albo też spełnia nierówności $2^n < k \leq 2^{n+1}$.

Jeżeli $k \leq 2^n$, to znajdujemy prostą formułę ϕ z n zmiennymi, która jest spełniona przez k wartościowań, i zmienną p, która nie występuje w ϕ. Formuła $\phi \wedge p$ jest prosta i spełniona przez k wartościowań, oraz występuje w niej $n + 1$ zmiennych.

Jeżeli $2^n < k \leq 2^{n+1}$, to bierzemy prostą formułę ϕ z n zmiennymi, spełnioną przez $k - 2^n$ wartościowań. Wtedy dla dowolnej zmiennej p nie występującej w ϕ, formuła $\phi \vee p$ jest prosta, spełniona przez k wartościowań i występuje w niej $n + 1$ zmiennych.

Fakt 195. Jeżeli ϕ jest formułą, w której każda zmienna występuje najwyżej jeden raz, to ϕ jest spełniona przez nieparzystą liczbę wartościowań.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na liczbę znaków występujących w formule. Formuła, która daje się zapisać za pomocą jednego znaku, jest zmienną i jest spełniona przez jedno wartościowanie.

Przypuśćmy, że $\phi = \neg\psi$ i występuje w niej n zmiennych. Oczywiście, każda zmienna występuje tyle samo razy w ϕ, co w ψ. Z założenia indukcyjnego wynika więc, że ψ jest spełniona przez nieparzystą liczbę wartościowań równą $|W(\psi)|$. Liczba $2^n - |W(\psi)|$ jest nieparzysta i jest równa liczbie wartościowań spełniających ϕ.

Jeżeli w koniunkcji $\phi \wedge \psi$ każda zmienna występuje najwyżej jeden raz (jeżeli koniunkcja ta jest prosta), to ϕ i ψ są proste, i żadna zmienna nie występuje jednocześnie w obu tych formułach. Wobec tego, formuła $\phi \wedge \psi$ jest spełniona przez $|W(\phi)| \cdot |W(\psi)|$ wartościowań. Na mocy założenia indukcyjnego, oba czynniki tego iloczynu są liczbami nieparzystymi. Iloczyn liczb nieparzystych też jest nieparzysty.

Jeszcze trzeba pokazać (można to zrobić w podobny sposób), że alternatywa będąca formułą prostą jest spełniona przez nieparzystą liczbę wartościowań. ∎

Zadanie 805. Wykaż przez indukcję, że dla każdej formuły zdaniowej ϕ zbudowanej ze zmiennych oraz spójników $\wedge$ i $\vee$ (oczywiście do jej zapisania można też używać nawiasów) istnieje formuła ψ postaci $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$, taka, że dla każdego $i \leq n$ formuła ψ_i jest koniunkcją zmiennych oraz $(\phi \Leftrightarrow \psi)$ jest tautologią.

Rozwiązanie (szkic). Formuły ϕ i ψ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią. Zauważmy, że

Fakt 196. Formuła $(\phi_1 \vee \phi_2) \wedge \psi$ jest równoważna $(\phi_1 \wedge \psi) \vee (\phi_2 \wedge \psi)$, czyli formuła

$$(\phi_1 \vee \phi_2) \wedge \psi \Leftrightarrow (\phi_1 \wedge \psi) \vee (\phi_2 \wedge \psi)$$

jest tautologią.

Fakt 197. Formuła

$$(\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n) \wedge \psi \Leftrightarrow (\phi_1 \wedge \psi) \vee \ldots \vee (\phi_n \wedge \psi)$$

jest tautologią. Tautologią jest także formuła

$$\psi \wedge (\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n) \Leftrightarrow (\psi \wedge \phi_1) \vee \ldots \vee (\psi \wedge \phi_n).$$

Fakt 198. Formuła

$$\begin{gathered}(\phi_1 \vee \ldots \vee \phi_n) \wedge (\phi'_1 \vee \ldots \vee \phi'_m) \Leftrightarrow \\ (\phi_1 \wedge \phi'_1) \vee \ldots \vee (\phi_n \wedge \phi'_1) \vee \ldots \vee (\phi_1 \wedge \phi'_m) \vee \ldots \vee (\phi_n \wedge \phi'_m)\end{gathered}$$

jest tautologią.

Korzystając z ostatniego faktu można dowieść własność podaną w zadaniu przez indukcję ze względu na liczbę spójników występujących w formule ϕ.

Jeżeli w formule ϕ nie występują spójniki, to jest ona zmienną. Każda zmienna jest jednoczłonową alternatywą, której jedynym członem jest jednoczłonowa koniunkcja. Tak więc w tym przypadku formuła ϕ ma odpowiednią postać i możemy przyjąć, że $\psi = \phi$.

Jeżeli w formule ϕ występuje przynajmniej jeden spójnik, to jest ona koniunkcją lub alternatywą formuł z mniejszą liczbą spójników. W przypadku alternatywy dalszy dowód jest prosty i zostaje pominięty. Jeżeli $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, to na podstawie założenia indukcyjnego znajdujemy alternatywy ψ_1 i ψ_2 wymaganej postaci równoważne odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2. Wprowadzając odpowiednie oznaczenia możemy przyjąć, że lewa strona równoważności z ostatniego faktu jest równa $\psi_1 \wedge \psi_2$. Formułę ψ definiujemy jako prawą stronę równoważności z tego faktu.

Rozwiązanie (inny sposób). Najpierw sformalizujemy treść zadania.

Symbolem $\mathcal{K}$ będziemy oznaczać najmniejszy w sensie inkluzji spośród zbiorów X spełniających warunki:

1. wszystkie zmienne zdaniowe należą do X,
2. jeżeli ϕ i ψ należą do X, to także formuła $\phi \wedge \psi$ należy do X.

Tak więc $\mathcal{K}$ jest zbiorem koniunkcji zmiennych zdaniowych. Symbolem $\mathcal{A}$ będziemy zaś oznaczać najmniejszy w sensie inkluzji spośród zbiorów X spełniających warunki:

1. $\mathcal{K} \subseteq X$,
2. jeżeli ϕ i ψ należą do X, to także formuła $\phi \vee \psi$ należy do X.

Tak więc $\mathcal{A}$ jest zbiorem alternatyw koniunkcji zmiennych zdaniowych. Posługując się wprowadzonymi oznaczeniami rozwiązywane zadanie można sformułować następująco: dowieść, że dla każdej formuły ϕ, w której występują tylko spójniki $\wedge$ i $\vee$, istnieje formuła $\psi \in \mathcal{A}$ taka, że formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią.

Dowód zostanie przeprowadzony przez indukcję ze względu na liczbę spójników występujących w formule ϕ.

Niech n będzie liczbą naturalną, a ϕ formułą, w której występuje n spójników i są to jedynie spójniki $\wedge$ i $\vee$. Będziemy zakładać, że jeżeli w pewnej formule występuje mniej niż n spójników, to jest ona równoważna formule należącej do $\mathcal{A}$. Przy tym założeniu wykażemy, że ψ też jest równoważna formule należącej do $\mathcal{A}$.

W dowodzie będziemy rozważać kilka przypadków. Najpierw przyjmijmy dodatkowo, że $n = 0$. Wtedy w formule ϕ nie ma spójników, a więc ϕ jest zmienną i — w konsekwencji — należy do $\mathcal{K}$ oraz do $\mathcal{A}$. W tym przypadku przyjmujemy, że $\psi = \phi$. Oczywiście, $\psi \in \mathcal{A}$, a ponadto, formuły ϕ i ψ są w oczywisty sposób równoważne.

Jeżeli $n > 0$, to w ϕ jest przynajmniej jeden spójnik. Wtedy ϕ jest albo koniunkcją, albo alternatywą formuł zawierających mniejszą liczbę spójników niż ϕ. Najpierw załóżmy, że $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$. Dla formuł ϕ_1 i ϕ_2 możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Istnieją więc w $\mathcal{A}$ formuły ψ_1 i ψ_2 równoważne odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2. Oczywiście, $\psi_1 \vee \psi_2 \in \mathcal{A}$ oraz $\psi_1 \vee \psi_2$ jest równoważne z $\phi_1 \vee \phi_2$.

Jeżeli $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$, to także znajdujemy w $\mathcal{A}$ formuły ψ_1 i ψ_2 równoważne odpowiednio ϕ_1 i ϕ_2. Formuły z $\mathcal{A}$ albo należą do $\mathcal{K}$, albo są alternatywami.

Jeżeli ψ_1 i ψ_2 należą do $\mathcal{K}$, to przyjmujemy, że $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$. Także w tym przypadku jest oczywiste, że $\psi \in \mathcal{K} \subseteq \mathcal{A}$ oraz, że ϕ jest równoważne ψ.

Pozostał do rozważania przypadek, w którym przynajmniej jedna z formuł ψ_1 i ψ_2 jest alternatywą. Załóżmy, że $\psi_1 = \psi_{11} \vee \psi_{12}$. Jeżeli okaże się, że alternatywą jest tylko ψ_2 będziemy postępować dokładnie tak samo. Na mocy prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy (prawo $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$) otrzymujemy, że formuła

$$\phi = (\phi_{11} \vee \psi_{12}) \wedge \phi_2$$

jest równoważna formule

$$(\phi_{11} \wedge \phi_2) \vee (\psi_{12} \wedge \phi_2).$$

Nietrudno zauważyć, że w obu członach tej alternatywy jest mniej spójników, niż w formule ϕ. Do tych członów możemy więc zastosować założenie indukcyjne. W ten sposób znajdujemy formuły ψ_1 i ψ_2 takie, że

$$\psi_1 \Leftrightarrow (\phi_{11} \wedge \phi_2) \text{ oraz } \psi_2 \Leftrightarrow (\phi_{12} \wedge \phi_2)$$

są tautologiami. Bez trudu dowodzimy, że formuła

$$\phi \Leftrightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$$

jest tautologią. Ponieważ $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{A}$, więc także $\psi_1 \vee \psi_2 \in \mathcal{A}$. W rozważanym przypadku możemy przyjąć, że $\psi = \psi_1 \vee \psi_2$.

Przedstawiony dowód można rozbić na dwie części dowodząc najpierw, że koniunkcja formuł należących do $\mathcal{A}$ jest równoważna formule należącej do $\mathcal{A}$. ■

Zadanie 806. Używając jedynie zmiennych, kwantyfikatorów, spójników logicznych, nawiasów i symboli $\in$, $\mathbb{N}$, $+$, $\times$, $=$ napisz formuły mówiące, że:

a) nie ma największej liczby pierwszej,

b) istnieje taka liczba naturalna, że każda liczba naturalna większa od niej jest sumą nie więcej niż czterech kwadratów liczb pierwszych,

c) istnieje nieskończenie wiele par liczb bliźniaczych.

Para liczb bliźniaczych, to dwie liczby pierwsze różniące się o 2.

Rozwiązanie. Najpierw napiszemy pomocniczą formułę $P(x)$ równą

$$\neg\, \exists a{\in}\mathbb{N}\ \exists b{\in}\mathbb{N}\ \exists r{\in}\mathbb{N}\ \exists s{\in}\mathbb{N}\ (\neg x = a \wedge \neg x = b \wedge x = a + r \wedge x = b + s \wedge x = a \times b).$$

Zauważmy, że formuła $\exists r{\in}\mathbb{N}\,(x = a + r)$ jest równoważna nierówności $x \geq a$. Wobec tego formuła $P(x)$ stwierdza, że liczba x nie jest iloczynem dwóch liczb mniejszych od x, a więc stwierdza, że x jest liczbą pierwszą.
Własność „nie ma największej liczby pierwszej” można wyrazić pisząc

$$\neg\, \exists x{\in}\mathbb{N}\ (P(x) \wedge \forall y{\in}\mathbb{N}\,(P(y) \Rightarrow \exists r{\in}\mathbb{N}\,(x = y + r))).$$

Formuła

$$\begin{aligned}&\exists x{\in}\mathbb{N}\ \forall y{\in}\mathbb{N}\ \exists a{\in}\mathbb{N}\ \exists b{\in}\mathbb{N}\ \exists c{\in}\mathbb{N}\ \exists d{\in}\mathbb{N}\\ &\qquad((P(a) \vee a + a = a) \wedge (P(b) \vee b + b = b) \wedge (P(c) \vee c + c = c)\\ &\qquad\ \wedge(P(d) \vee d + d = d) \wedge x + y = a \times a + b \times b + c \times c + d \times d)\end{aligned}$$

stwierdza, że „istnieje taka liczba naturalna, że każda liczba naturalna większa od niej jest sumą nie więcej niż czterech kwadratów liczb pierwszych”. Zauważmy, że własność $a + a = a$ jest równoważna stwierdzeniu $a = 0$.

Ostatnią z wymienionych w zadaniu własności („istnieje nieskończenie wiele par liczb bliźniaczych”) można wyrazić pisząc

$$\forall x{\in}\mathbb{N}\ \exists y{\in}\mathbb{N}\ \exists d{\in}\mathbb{N}\ \exists r{\in}\mathbb{N}\\ ((\neg(d+d=d)\wedge d\times d=d+d)\wedge y=x+r\wedge P(y)\wedge P(y+d)).$$

Aby się o tym przekonać wystarczy zauważyć, że własności $\neg(d+d=d)\wedge d\times d = d+d$ oraz $d=2$ są równoważne a także, że zbiór $\{y\in\mathbb{N}\mid\phi(y)\}$ jest nieskończony wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x\in\mathbb{N}\ \exists y\in\mathbb{N}\ (x\leq y\wedge\phi(y))$. ■

Zadanie 807. Pokaż, że

$$(A_1\cup A_2)\dot{-}(B_1\cup B_2)\subseteq(A_1\dot{-}B_1)\cup(A_2\dot{-}B_2). \tag{1}$$

Czy zawieranie

$$(A_1\cap A_2)\dot{-}(B_1\cap B_2)\subseteq(A_1\dot{-}B_1)\cup(A_2\dot{-}B_2) \tag{2}$$

jest prawdziwe dla dowolnych zbiorów A_1, A_2, B_1 i B_2?

Rozwiązanie. Zaczynamy od pierwszej inkluzji. Zgodnie z definicją, aby dowieść zawieranie $X\subseteq Y$ powinniśmy wziąć dowolny element $x\in X$ i o tym elemencie dowieść, że należy do zbioru Y. Weźmy więc $x\in(A_1\cup A_2)\dot{-}(B_1\cup B_2)$. Z definicji różnicy symetrycznej wiemy, że element ten spełnia równoważność

$$x\in(A_1\cup A_2)\Leftrightarrow x\notin(B_1\cup B_2). \tag{3}$$

Na podstawie tej równoważności niewiele potrafimy rozstrzygnąć. Załóżmy więc dodatkowo, że zachodzi

Przypadek 1: $x\in(A_1\cup A_2)$. Z równoważności (3) otrzymujemy, że $x\notin(B_1\cup B_2)$. Wobec tego, zarówno $x\notin B_1$, jak i $x\notin B_2$. Dalsze rozumowanie też będzie polegać na rozważeniu kolejnych przypadków.

Przypadek 1.1: $x\in A_1$. Wiemy już, że $x\notin B_1$. Zachodzi więc także równoważność

$$x\in A_1\Leftrightarrow x\notin B_1, \tag{4}$$

np. dlatego, że w rozważanym przypadku obie strony tej równoważności są prawdziwe, albo dlatego, że dowodzenie tej równoważności polega na wykazaniu dwóch implikacji stwierdzających, że przy pewnych założeniach zachodzą fakty, których prawdziwość udało nam się wcześniej ustalić. Równoważność (4) oznacza, że $x\in(A_1\dot{-}B_1)$, i tym bardziej, x należy do prawej strony wzoru (1).

Przypadek 1.2: $x\in A_2$. W tym przypadku, tak jak w poprzednim, dowodzimy, że $x\in A_2\Leftrightarrow x\notin B_2$, i w konsekwencji, x należy do drugiego składnika prawej strony wzoru (1).

Przypadek 2: $x \notin (A_1 \cup A_2)$. Z równoważności (3) otrzymujemy teraz, że $x \in (B_1 \cup B_2)$. Mamy więc sytuację analogiczną do opisanej w przypadku 1. Dalszy dowód prowadzimy tak, jak w przypadku 1 zastępując A_1 i A_2 zbiorami B_1 oraz B_2, i odwrotnie.

Zawieranie (2) jest też prawdziwe dla wszystkich zbiorów i można się o tym przekonać w bardzo podobny sposób. Proponuję, aby zainteresowane osoby same przekształciły podany dowód zawierania (1) w dowód inkluzji (2). W przypadku 1 w przekształconym dowodzie powinna być rozważana sytuacja, w której $x \notin B_1 \cap B_2$.

Rozwiązanie (inny sposób). Będziemy korzystać z następujących praw rachunku zbiorów:

$$\begin{aligned} X \dot{-} Y &= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X), \\ (X \cup Y) \setminus Z &= (X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z), \\ X \setminus (Y \cup Z) &\subseteq X \setminus Y. \end{aligned}$$

Posługując się tymi prawami oraz monotonicznością sumy mnogościowej można wykazać, że

$$\begin{aligned} &(A_1 \cup A_2) \dot{-} (B_1 \cup B_2) = ((A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)) \cup ((B_1 \cup B_2) \setminus (A_1 \cup A_2)) \\ &= (A_1 \setminus (B_1 \cup B_2)) \cup (A_2 \setminus (B_1 \cup B_2)) \cup (B_1 \setminus (A_1 \cup A_2)) \cup (B_2 \setminus (A_1 \cup A_2) \\ &\subseteq (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2) \cup (B_1 \setminus A_1) \cup (B_2 \setminus A_2) = (A_1 \dot{-} B_1) \cup (A_2 \dot{-} B_2). \end{aligned}$$

Jeżeli wprowadzimy pojęcie dopełnienia zbioru, to w dowodzie zawierania (2) możemy wykorzystać wzór

$$X \dot{-} Y = X^c \dot{-} Y^c.$$

Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &(A_1 \cap A_2) \dot{-} (B_1 \cap B_2) = (A_1 \cap A_2)^c \dot{-} (B_1 \cap B_2)^c = (A_1^c \cup A_2^c) \dot{-} (B_1^c \cup B_2^c) \\ &\subseteq (A_1^c \dot{-} B_1^c) \cup (A_2^c \dot{-} B_2^c) = (A_1 \dot{-} B_1) \cup (A_2 \dot{-} B_2). \end{aligned}$$

Zadanie 808. Pokaż, że

1. $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$ zawiera te i tylko te elementy, które należą do nieparzystej liczby zbiorów A_i, gdzie $i = 1, \ldots, n$;

2. jeśli zbiory $A_1, \ldots, A_n$ są skończone, to

$$|A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-2)^{i-1} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=i}} \left| \bigcap_{j \in I} A_j \right|.$$

Rozwiązanie. *Część 1.* Tak naprawdę rozwiążemy ogólniejsze zadanie, a mianowicie pokażemy, że dla dowolnych zbiorów $A_1, \ldots, A_n$, dla dowolnego wyrażenia $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$ (z dowolnym rozmieszczeniem nawiasów) i dla dowolnego x zachodzi następująca równoważność:

$$x \in A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n \Leftrightarrow x \text{ należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród } A_1, \ldots, A_n.$$

Najpierw musimy nieco uściślić sformułowanie zadania, które nie jest precyzyjne np. w przypadku, gdy $A_1 = \cdots = A_n$. Przypuśćmy, że rozważamy rodzinę zbiorów $(A_i)_{i \in I}$ indeksowanych zbiorem I. Tak więc, jeżeli rozważamy rodzinę $A_1, \ldots, A_n$, to $I = \{1, \ldots, n\}$. Dla takiej rodziny i dla dowolnego elementu x definiujemy zbiór

$$I(x) = \{i \in I \mid x \in A_i\}.$$

Posługując się wprowadzonym oznaczeniem równoważność z treści zadania możemy zapisać w postaci

$$x \in A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n \quad \Leftrightarrow \quad |I(x)| \text{ jest nieparzysta.}$$

Zauważmy od razu, że dla $n = 1$ ta równoważność jest oczywista.

Dowód będziemy prowadzić przez indukcję. Musimy więc przeformułować zadanie tak, aby było możliwe zastosowanie zasady indukcji. Będziemy dowodzić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, dla dowolnej rodziny zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ indeksowanej zbiorem $\{1, \ldots, n\}$ zachodzi teza zadania. Fakt, że dla dowolnej rodziny zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ zachodzi teza zadania, oznaczmy symbolem $\phi(n)$. W dowodzie skorzystamy z zasady indukcji, która stwierdza, że aby dowieść zdanie postaci $\forall n{\geq}1\ \phi(n)$ wystarczy pokazać, że dla dowolnego $n \geq 1$, z tego, że $\phi(k)$ zachodzi dla $k < n$ wynika, że także zachodzi $\phi(n)$. Osoby, które nie są przekonane do tego schematu indukcji, mogą spróbować przerobić podany dowód na dowód korzystający ze zwykłego schematu indukcji, ale wtedy trzeba dowodzić tezę w postaci $\forall n{\geq}1 \forall k{\leq}n\ \phi(k)$.

Przypuśćmy, że $n \geq 2$ oraz

$$A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n = (A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k) \dot{-} (A_{k+1} \dot{-} \ldots \dot{-} A_n).$$

Weźmy dowolny element x. Będziemy rozważać dwa przypadki: $x \in A_{k+1} \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$ oraz $x \notin A_{k+1} \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$.

W pierwszym przypadku, z założenia indukcyjnego wynika, że x należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród $A_{k+1}, \ldots, A_n$. Zauważmy także, że następujące warunki są równoważne:

1. $x \in A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$,

2. $x \notin A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_k$,

3. x należy do parzystej liczby zbiorów spośród $A_1, \ldots, A_k$,

4. x należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród $A_1, \ldots, A_n$.

W drugim przypadku przeprowadzamy analogiczne rozumowanie. Zauważmy też, że z rozwiązanego, ogólniejszego zadania wynika, że różnica symetryczna jest łączna.

Część 1, rozwiązanie wymagające łączności różnicy symetrycznej. Oczywiście, $A \dot{-} B \subseteq A \cup B$. Stąd przez łatwą indukcję otrzymujemy, że $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Z tego wzoru wynika, że elementy nie należące do żadnego ze zbiorów $A_1, \ldots, A_n$ nie należą także do różnicy $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$.

Przypuśćmy, że element x należy do parzystej liczby zbiorów spośród $A_1, \ldots, A_n$. Przestawmy zbiory $A_1, \ldots, A_n$ tak, aby te zbiory, do których należy x, znalazły się na pierwszych miejscach. Jeżeli po takim przestawieniu zbiory znalazły się w porządku $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ i x należy do $2 \cdot k$ tych zbiorów, to z łączności i przemienności różnicy symetrycznej otrzymujemy, że

$$A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n = (A_{i_1} \dot{-} A_{i_2}) \dot{-} \ldots \dot{-} (A_{i_{2k-1}} \dot{-} A_{i_{2k}}) \dot{-} A_{i_{2k+1}} \dot{-} \ldots \dot{-} A_{i_n}.$$

Zauważmy, że x nie należy do zbiorów

$$(A_{i_1} \dot{-} A_{i_2}), \ldots, (A_{i_{2k-1}} \dot{-} A_{i_{2k}}), A_{i_{2k+1}}, \ldots, A_{i_n}.$$

Stąd wynika, że x nie należy także do różnicy $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$.

Udowodniliśmy więc, że elementy należące do parzystej liczby zbiorów spośród $A_1, \ldots, A_n$ nie należą do różnicy $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$. Oznacza to, że elementy należące do różnicy $A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$ należą do nieparzystej liczby zbiorów spośród $A_1, \ldots, A_n$.

Udowodnimy jeszcze implikację odwrotną. Załóżmy więc, że element x należy do nieparzystej liczby zbiorów spośród $A_1, \ldots, A_n$, w tym do zbioru A_1. Element ten należy do parzystej liczby zbiorów spośród $A_2, \ldots, A_n$. Wobec tego nie należy do różnicy $A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n$. Tym samym należy do różnicy

$$A_1 \dot{-} (A_2 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n) = A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n.$$

Część 2. Jeśli zbiory $A_1, \ldots, A_n$ są skończone, to

$$|A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-2)^{i-1} \sum_{|I|=i} \left| \bigcap_{j \in I} A_j \right|.$$

Weźmy skończony zbiór X zawierający zbiory $A_1, \ldots, A_n$. Niech Ch_A oznacza funkcję określoną w zbiorze X, przyjmującą wartości 0 i 1, przyjmującą wartość 1 dokładnie dla tych argumentów, które należą do A. Zauważmy, że

$$\sum_{x \in X} \mathrm{Ch}_A(x) = |A|.$$

Będziemy przekształcać prawą stronę dowodzonego wzoru. Mamy więc

$$\sum_{i=1}^{n}(-2)^{i-1}\sum_{|I|=i}\left|\bigcap_{j\in I}A_j\right| = \sum_{i=1}^{n}(-2)^{i-1}\sum_{|I|=i}\sum_{x\in X}\mathrm{Ch}_{\bigcap_{j\in I}A_j}(x)$$
$$= \sum_{x\in X}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{i-1}\sum_{|I|=i}\mathrm{Ch}_{\bigcap_{j\in I}A_j}(x).$$

Przyjmijmy, że $I(x) = \{i \leq n \mid x \in A_i\}$. Nietrudno zauważyć, że warunek

$$\mathrm{Ch}_{\bigcap_{j\in I}A_j}(x) = 1$$

jest równoważny ze stwierdzeniem $I \subseteq I(x)$. Wobec tego (po rozbiciu sumy na składniki równe 0 i równe 1) otrzymujemy, że dla $i \leq |I(x)|$

$$\sum_{|I|=i}\mathrm{Ch}_{\bigcap_{j\in I}A_j}(x) = \sum_{\substack{|I|=i\\ \mathrm{Ch}_{\bigcap_{j\in I}A_j}(x)=1}} 1 = \sum_{\substack{|I|=i\\ I\subseteq I(x)}} 1 = \binom{|I(x)|}{i}.$$

Ponadto, dla $i > |I(x)|$ suma ta jest równa 0. Wróćmy do przerwanych przekształceń:

$$\sum_{x\in X}\sum_{i=1}^{n}(-2)^{i-1}\sum_{|I|=i}\mathrm{Ch}_{\bigcap_{j\in I}A_j}(x) = \sum_{x\in X}\sum_{i=1}^{|I(x)|}(-2)^{i-1}\sum_{|I|=i}\mathrm{Ch}_{\bigcap_{j\in I}A_j}(x)$$
$$= \sum_{x\in X}\sum_{i=1}^{|I(x)|}(-2)^{i-1}\binom{|I(x)|}{i} = \sum_{x\in X}(-2)^{-1}\Big(\sum_{i=0}^{|I(x)|}(-2)^{i}\binom{|I(x)|}{i} - 1\Big)$$
$$= \sum_{x\in X}(-2)^{-1}((1-2)^{|I(x)|}-1) = \sum_{x\in X}2^{-1}(1-(-1)^{|I(x)|}).$$

Teraz zauważmy, że liczba $2^{-1}(1-(-1)^m)$ jest równa 0 lub 1, i jest równa 1 wtedy i tylko wtedy, gdy m jest liczbą nieparzystą. Stąd otrzymujemy, że

$$\sum_{x\in X}2^{-1}(1-(-1)^{|I(x)|}) = |\{x \in X : |I(x)| \text{ jest nieparzysta}\}| = |A_1 \dot{-} \ldots \dot{-} A_n|,$$

i to kończy dowód. ■

Zadanie 809. Dla jakich zbiorów C prawdziwe jest zdanie stwierdzające, że dla dowolnych zbiorów A i B zachodzi

$$A \times C \subseteq B \times C \Rightarrow A \subseteq B\,? \tag{1}$$

Rozwiązanie. Najpierw spróbujemy dowieść implikację (1). Mamy więc zbiory A, B i C, zakładamy, że zbiory te spełniają założenie $A \times C \subseteq B \times C$. W tej sytuacji staramy się dowieść, że $A \subseteq B$. Aby dowieść to zawieranie, bierzemy $x \in A$ i próbujemy wykazać, że $x \in B$. Oczywiście, powinniśmy skorzystać z założenia. Łatwo zauważyć, że w tym celu przydałaby się para o pierwszej współrzędnej x i drugiej należącej do C. Aby taką parę utworzyć, musimy mieć element zbioru C. Jest to proste pod warunkiem, że C jest zbiorem niepustym. Wtedy zbiór C ma przynajmniej jeden element. Jeden z elementów zbioru C oznaczamy symbolem c i tworzymy parę $\langle x, c\rangle$. Ta para należy do iloczynu kartezjańskiego $A \times C$. Na podstawie założenia stwierdzamy, że należy także do iloczynu $B \times C$. Jeżeli $\langle x, c\rangle \in B \times C$, to także $x \in B$.

Przedstawione rozumowanie pozwala dowieść implikację (1), ale wymaga dodatkowego założenia, że zbiór C jest niepusty. Nietrudno zauważyć, że w przypadku, gdy C jest zbiorem pustym, to puste są także zbiory $A \times C$ i $B \times C$, i w konsekwencji, poprzednik implikacji (1) jest prawdziwy dla dowolnych zbiorów A i B. Jeżeli przyjmiemy, że A jest dowolnym zbiorem niepustym (np. zbiorem liczb naturalnych), a B jest zbiorem pustym, to następnik implikacji (1) będzie fałszywy, i to samo będzie można powiedzieć o całej implikacji.

Ostatecznie otrzymujemy, że implikacja $A \times C \subseteq B \times C \Rightarrow A \subseteq B$ zachodzi dla wszystkich zbiorów A i B wtedy i tylko wtedy, gdy C nie jest zbiorem pustym. ■

Zadanie 810. Inwolucją nazywamy odwzorowanie $f : A \to A$ takie, że ff jest identycznością na A. Czy inwolucja jest bijekcją na A? Pokaż, że każdą bijekcję można przedstawić jako złożenie dwóch inwolucji.

Rozwiązanie. *Część 1: każda inwolucja jest bijekcją.* Przypuśćmy, że $f : A \to A$ jest inwolucją. Spełnia więc dla dowolnego $x \in A$ równość $f(f(x)) = x$. Taka funkcja f jest typu „na”: wartość $x \in A$ przyjmuje dla argumentu $f(x)$. Jest to też funkcja różnowartościowa. Aby się o tym przekonać, weźmy dwa argumenty $x, y \in A$ takie, że $f(x) = f(y)$. Dla takich argumentów zachodzi też równość $f(f(x) = f(f(y))$. Jeżeli f jest inwolucją, to stąd wynika, że $x = y$.

Część 2. Ta część zadania jest znacznie trudniejsza. Rozwiązując to zadanie zauważyłem, że jest właściwie tylko jedna bijekcja, którą trzeba przedstawić jako złożenie inwolucji. Tą bijekcją jest funkcja S przekształcająca zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ w $\mathbb{Z}$ zdefiniowana wzorem $S(n) = n + 1$.

Krok 1. Aby przedstawić S jako złożenie inwolucji, weźmy funkcje $f, g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zdefiniowane wzorami $f(n) = -n$ oraz $g(n) = -(n+1)$. Funkcje te są inwolucjami. Sprawdzenie tego faktu wymaga jedynie elementarnych rachunków. Mamy też

$$f(g(n)) = f(-(n + 1)) = n + 1 = S(n).$$

Tak więc $S = fg$.

Krok 2. Załóżmy, że $m > 0$. Symbolem $k \bmod m$ będziemy oznaczać resztę z dzielenia liczby k przez m, a więc najmniejszą nieujemną liczbę x taką, że $k - x$ dzieli się przez m. Korzystając z przedstawienia z kroku 1 można bez trudu przedstawić w postaci złożenia inwolucji funkcję $S_m : \{i \in \mathbb{N} : i < m\} \to \{i \in \mathbb{N} : i < m\}$ zdefiniowaną wzorem

$$S_m(n) = S(n) \bmod m = (n+1) \bmod m = \begin{cases} n+1 & \text{jeżeli } n < m-1 \\ 0 & \text{jeżeli } n = m-1. \end{cases}$$

Weźmy funkcję $f_m : \{i \in \mathbb{N} \mid i < m\} \to \{i \in \mathbb{N} \mid i < m\}$ taką, że

$$f_m(n) = f(n) \bmod m = (-n) \bmod m = \begin{cases} m-n & \text{jeżeli } n > 0 \\ 0 & \text{jeżeli } n = 0 \end{cases}$$

oraz funkcję $g_m : \{i \in \mathbb{N} \mid i < m\} \to \{i \in \mathbb{N} \mid i < m\}$ taką, że

$$g_m(n) = g(n) \bmod m = (-(n+1)) \bmod m = m - n - 1.$$

Ponieważ dodawanie i dodawanie modulo m mają własności przysługujące dodawaniu w pierścieniu, i tylko takie własności były wykorzystywane w kroku 1, więc funkcje f_m i g_m są inwolucjami i zachodzi równość $S_m = f_m g_m$. Osoby, dla których przytoczony argument nie jest jasny, mogą sprawdzić bezpośrednio wymagane równości.

Krok 3. Weźmy teraz bijekcję $s : A \to A$ i załóżmy, że zbiór A jest rozłączną sumą dwóch zbiorów A_1 i A_2 przekształcanych przez funkcję s w siebie (zakładamy więc, że $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, $A = A_1 \cup A_2$, $s(x) \in A_1$ dla dowolnego $x \in A_1$ oraz analogiczną własność dla zbioru A_2).

Niech $s^{(1)}$ oznacza obcięcie funkcji s do zbioru A_1 (tak więc $s^{(1)} : A_1 \to A_1$ i $s^{(1)}(x) = s(x)$ dla wszystkich $x \in A_1$). Podobnie, niech $s^{(2)}$ oznacza obcięcie funkcji s do A_2. Funkcje $s^{(1)}$ i $s^{(2)}$ są bijekcjami. Zauważmy, że jeżeli $s^{(1)}$ i $s^{(2)}$ są złożeniami inwolucji, to złożeniem inwolucji jest również funkcja s.

Jeżeli $s^{(1)} = f^{(1)}g^{(1)}$ i $s^{(2)} = f^{(2)}g^{(2)}$ dla inwolucji $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $f^{(2)}$ i $g^{(2)}$, to $s = fg$ dla inwolucji $f, g : A \to A$ zdefiniowanych wzorami

$$f(x) = \begin{cases} f^{(1)}(x) & \text{jeżeli } x \in A_1 \\ f^{(2)}(x) & \text{jeżeli } x \in A_2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad g(x) = \begin{cases} g^{(1)}(x) & \text{jeżeli } x \in A_1 \\ g^{(2)}(x) & \text{jeżeli } x \in A_2. \end{cases}$$

Sprawdzenie podanych wyżej własności pozostawiam zainteresowanym.

Przedstawioną konstrukcję bez trudu można uogólnić na przypadek, w którym zbiór A jest sumą trzech zbiorów, lub jest sumą dowolnej skończonej liczby zbiorów. Można też ją uogólnić na przypadek dowolnego podziału zbioru A, także nieskończonego.

Krok 4. Mając bijekcję $s : A \to A$ podzielę zbiór A na takie fragmenty, dla których s będzie można łatwo przedstawić w postaci złożenia inwolucji.

Przyjmijmy, że jeżeli n jest dodatnią liczbą naturalną, to s^n oznacza n-krotne złożenie funkcji s. Tak więc $s^1 = s$, $s^2 = ss$, $s^{n+1} = ss^n$. Umówmy się także, że s^0 jest funkcją identycznościową w zbiorze A. Jeżeli natomiast n jest liczbą ujemną, to s^n oznacza $(-n)$-krotne złożenie $(s^{-1})^{-n}$ funkcji odwrotnej do s. Dowodzi się, że dla dowolnych liczb całkowitych n i m zachodzi wzór $s^{n+m} = s^n s^m$ lub nieco inaczej, dla dowolnego $x \in A$ zachodzi wzór $s^{n+m}(x) = s^n(s^m(x))$.

Zdefiniujemy teraz relację R w zbiorze A przyjmując, że

$$xRy \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\ y = s^n(x)$$

dla dowolnych $x, y \in A$. Relacja R jest relacją równoważności. Rozbija więc zbiór A na klasy abstrakcji, czyli na zbiory postaci $\{y \in A \mid xRy\}$. Różne klasy abstrakcji są rozłączne. Jest też oczywiste, że jeżeli $z \in \{y \in A \mid xRy\}$, to także $s(z) \in \{y \in A \mid xRy\}$. W dalszym ciągu będziemy przedstawiać funkcję s (a właściwie jej obcięcie) w postaci złożenia inwolucji na każdej klasie abstrakcji relacji R.

Krok 5. Przypuśćmy, że prócz bijekcji $s : X \to X$ mamy bijekcje $t : Y \to Y$ i $\phi : Y \to X$ takie, że $s\phi = \phi t$. Jeżeli wtedy funkcja t jest złożeniem dwóch inwolucji, to funkcja s też ma tę własność.

Jeżeli $t = fg$ dla inwolucji $f, g : Y \to Y$, to

$$s(\phi(y)) = (s\phi)(y) = (\phi t)(y) = (\phi fg)(y) = ((\phi f \phi^{-1})(\phi g \phi^{-1}))(\phi(y)).$$

Ponieważ funkcja ϕ jest typu „na”, z udowodnionej równości wynika, że

$$s = (\phi f \phi^{-1})(\phi g \phi^{-1}).$$

Wystarczy jeszcze zauważyć, że złożenia $(\phi f \phi^{-1})$ i $(\phi g \phi^{-1})$ są inwolucjami.

Krok 6. W dalszym ciągu będziemy zajmować się klasą abstrakcji ustalonego elementu $a_0 \in A$, a więc zbiorem $A_0 = \{y \in A \mid a_0 R y\}$. Zdefiniujmy pomocniczą funkcję $\phi : \mathbb{Z} \to A_0$ przyjmując, że

$$\phi(n) = s^n(a_0).$$

Funkcji ϕ przekształca zbiór liczb całkowitych na klasę A_0. Dalej będziemy badać funkcję ϕ. Są możliwe dwa przypadki: albo dla pewnej liczby $m > 0$ zachodzi równość $\phi(m) = a_0$, albo też dla wszystkich $m > 0$ mamy $\phi(m) \neq a_0$. Najpierw zajmiemy się drugim przypadkiem.

Krok 7. Jeżeli $\phi(m) \neq a_0$ dla wszystkich liczb naturalnych m, to funkcja ϕ jest różnowartościowa. Aby się o tym przekonać załóżmy, że jest przeciwnie, a więc, że $\phi(m_1) = \phi(m_2)$ dla pewnych m_1 i $m_2 > m_1$. Jeżeli $m_1 < 0$, to

$$a_0 = s^{-m_1}(\phi(m_1)) = s^{-m_1}(\phi(m_2)) = s^{-m_1}(s^{m_2}(a_0)) = \phi(m_2 - m_1),$$

a to nie jest możliwe w rozważanym przypadku. Jeżeli natomiast $m_1 \geq 0$, to

$$s^{m_1}(a_0) = \phi(m_1) = \phi(m_2) = s^{m_1}(\phi(m_2 - m_1))$$

i z różnowartościowości s^{m_1} otrzymujemy, że $a_0 = \phi(m_2 - m_1)$. To też w rozważanym przypadku nie może zachodzić.

Zauważmy jeszcze, że

$$(s\phi)(n) = s(\phi(n)) = s(s^n(a_0)) = s^{n+1}(a_0) = \phi(n+1) = \phi(S(n)) = (\phi S)(n).$$

Tak więc $s\phi = \phi S$. W kroku 1 jest pokazane, że S jest złożeniem inwolucji. Wobec tego, z własności podanej w kroku 5 otrzymujemy, że s jest złożeniem inwolucji na zbiorze A_0.

Krok 8. Jeżeli $\phi(m) = a_0$ dla pewnej liczby naturalnej $m > 1$, to bierzemy najmniejszą liczbę m_0 o tej własności. Następnie pokazujemy, że funkcja ϕ przekształca różnowartościowo zbiór $\{x \in \mathbb{N} \mid x < m_0\}$ na klasę abstrakcji A_0. Fakt ten pozwala powtórzyć rozumowanie z kroku 7. Tym razem korzystamy z rozkładu na inwolucje funkcji S_{m_0}, opisanego w kroku 2. ■

Zadanie 811. Przypuśćmy, że $f : X \to Y$, $A \subseteq X$ oraz $B \subseteq Y$. Udowodnij, że

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \quad = \quad f(A) \cap B$$

Rozwiązanie. Pokażemy, że

$$y \in f(A \cap f^{-1}(B)) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap B$$

dla dowolnego y. Stąd i z zasady ekstensjonalności wynika dowodzona równość. Aby dowieść podaną równoważność zauważmy, że następujące formuły są równoważne:

1. $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$,
2. $\exists x(x \in A \cap f^{-1}(B) \wedge f(x) = y)$,
3. $\exists x(x \in A \wedge x \in f^{-1}(B) \wedge f(x) = y)$,
4. $\exists x(x \in A \wedge f(x) \in B \wedge f(x) = y)$,
5. $\exists x(x \in A \wedge f(x) = y \wedge y \in B)$,
6. $(\exists x(x \in A \wedge f(x) = y)) \wedge y \in B$,
7. $y \in f(A) \wedge y \in B$,
8. $y \in f(A) \cap B$.

Rozwiązanie (inny sposób). Najpierw udowodnimy zawieranie $f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B$. Przypuśćmy, że $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$. Istnieje więc $x \in A \cap f^{-1}(B)$ taki, że $f(x) = y$. Ten istniejący x oznaczmy symbolem x_0. Mamy więc $x_0 \in A \cap f^{-1}(B)$ oraz $f(x_0) = y$. Oczywiście, element x_0 ma dwie własności: $x_0 \in A$ oraz $f(x_0) = y$. Istnieje więc taki x, że $x \in A$ oraz $f(x) = y$. Stąd wynika, że $y \in f(A)$.

Element x_0 należy także do $f^{-1}(B)$. Jeżeli skorzystamy z definicji przeciwobrazu, to otrzymamy, że $y = f(x_0) \in B$. Rozważany y należy więc do $f(A)$ i do B, czyli $y \in f(A) \cap B$. To kończy dowód interesującego nas zawierania.

Udowodnimy jeszcze zawieranie przeciwne, czyli $f(A) \cap B \subseteq f(A \cap f^{-1}(B))$. W tym celu weźmy $y \in f(A) \cap B$. Taki y należy do $f(A)$, a więc istnieje $x \in A$ takie, że $f(x) = y$. Jeden z tych elementów oznaczmy symbolem x_0. Mamy więc, że $x_0 \in A$ oraz $f(x_0) = y$. Ponieważ $y \in B$, więc także $f(x_0) \in B$. Ta ostatnia własność implikuje, że $x_0 \in f^{-1}(B)$. Element x_0 jest jednym z takich x, dla których $x \in A$, $x \in f^{-1}(B)$ oraz $f(x) = y$. Istnieje więc x takie, że $x \in A \cap f^{-1}(B)$ oraz $f(x) = y$. Stąd i z definicji pojęcia obrazu wynika, że $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$ i tym samym zostało wykazane dowodzone zawieranie.

Interesująca nas równość wynika z udowodnionych zawierań i zasady ekstensjonalności.

Rozwiązanie (inny dowód jednego z zawierań). Skorzystamy teraz z dwóch własności pojęcia obrazu: monotoniczności

$$C \subseteq D \Rightarrow f(C) \subseteq f(D)$$

oraz zawierania

$$f(f^{-1}(B)) \subseteq B,$$

a także z dwóch znanych własności przekroju:

$$E \subseteq C \wedge E \subseteq D \Rightarrow E \subseteq C \cap D$$

i

$$C \cap D \subseteq C \text{ oraz } C \cap D \subseteq D.$$

Z podanych własności wynika, że

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A),$$

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(f^{-1}(B)) \subseteq B,$$

i — w konsekwencji —

$$f(A \cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B.$$

Zadanie 812. Udowodnij, że na to, by relacja R była:

1. zwrotna, potrzeba i wystarcza, by $I \subseteq R$, gdzie I jest relacją identyczności;
2. symetryczna, potrzeba i wystarcza, by $R^{-1} = R$;
3. przechodnia, potrzeba i wystarcza, by $RR \subseteq R$;
4. relacją równoważności, potrzeba i wystarcza, by $I \subseteq R \wedge R^{-1} = R \wedge RR \subseteq R$.

Rozwiązanie. Jest to bardzo proste zadanie, tak proste, że chciałoby się napisać tylko, że jest oczywiste. Warunki $I \subseteq R$ i $RR \subseteq R$ są niemal identyczne odpowiednio z warunkami z definicji zwrotności i symetryczności relacji R. Z tego powodu przedstawiony dowód może będzie zbyt szczegółowy. Weźmy zbiór X i relację $R \subseteq X \times X$.

Część 1. Pokażemy, że R jest relacją zwrotną w zbiorze X wtedy i tylko wtedy, gdy $I \subseteq R$. Dowód równoważności składa się oczywiście z dowodu dwóch implikacji.

Najpierw załóżmy, że R jest relacją zwrotną w zbiorze X. Aby dowieść, że $I \subseteq R$, weźmy dowolny element $p \in I$. Oczywiście, p jest parą uporządkowaną (ponieważ I jest relacją), obie współrzędne p należą do X (gdyż I jest relacją w zbiorze X) i są sobie równe (dlatego, że I jest relacją identyczności). Tak więc $p = \langle x, x\rangle$ dla pewnego $x \in X$. Ponieważ R jest zwrotna, więc $p = \langle x, x\rangle \in R$. W ten sposób dowód zawierania $I \subseteq R$ został zakończony.

Aby dowieść zwrotność relacji R, wystarczy dla dowolnego elementu $x \in X$ pokazać, że para $\langle x, x\rangle$ należy do R. Oczywiście, $\langle x, x\rangle \in I$ na podstawie definicji relacji identycznościowej. Stąd i z zawierania $I \subseteq R$ otrzymujemy, że $\langle x, x\rangle \in R$.

Część 2. Teraz pokażemy, że relacja R jest symetryczna wtedy i tylko wtedy, gdy $R^{-1} = R$. Podobnie jak w części 1 udowodnimy dwie implikacje.

Jeżeli relacja R jest symetryczna, to dowolna para $\langle x, y\rangle$ z relacji R (a właściwie dowolny element relacji R) należy także do relacji R^{-1}. Tak jest, ponieważ z warunku $\langle x, y\rangle \in R$ wynika, że $\langle y, x\rangle \in R$, a to z kolei oznacza, że $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$. Przedstawione rozumowanie świadczy o tym, że symetryczna relacja R spełnia warunek $R \subseteq R^{-1}$. Podobnie dowodzimy zawieranie odwrotne: jeżeli $\langle x, y\rangle \in R^{-1}$, to korzystając z definicji relacji odwrotnej otrzymujemy, że $\langle y, x\rangle \in R$, a jeżeli skorzystamy jeszcze z symetryczności R, to otrzymamy, że $\langle x, y\rangle \in R$. Dla relacji symetrycznej prawdziwe są więc dwa zawierania: $R \subseteq R^{-1}$ i $R^{-1} \subseteq R$. Wobec tego, prawdziwa jest też równość $R = R^{-1}$.

W drugą stronę, relacja spełniająca warunek $R = R^{-1}$ spełnia także zawieranie $R \subseteq R^{-1}$. To zawieranie oznacza, że R jest relacją symetryczną. Jeżeli bowiem $\langle x, y\rangle \in R$, to na podstawie tego zawierania mamy, że $\langle y, x\rangle \in R^{-1}$. Jeżeli teraz skorzystamy z definicji relacji odwrotnej, to otrzymamy, że $\langle y, x\rangle \in R$.

Część 3. Pokażemy jeszcze, że przechodniość relacji R jest równoważna zawieraniu $RR \subseteq R$.

Załóżmy, że R jest relacją przechodnią i $\langle x, y\rangle \in RR$. Z definicji złożenia relacji wynika, że istnieje z taki, że $\langle x, z\rangle \in R$ i $\langle z, y\rangle \in R$. Jeden z takich z oznaczmy symbolem z_0. Element z_0 ma więc dwie własności: $\langle x, z_0\rangle \in R$ oraz $\langle z_0, y\rangle \in R$. Z przechodniości relacji R otrzymujemy, że $\langle x, y\rangle \in R$. Kończy to dowód zawierania $RR \subseteq R$.

Jeżeli $RR \subseteq R$, to relacja R jest przechodnia. Aby się o tym przekonać weźmy x, y i z takie, że $\langle x, y\rangle \in R$ i $\langle y, z\rangle \in R$. Z definicji złożenia relacji wynika, że $\langle x, z\rangle \in RR$. Założone zawieranie implikuje więc, że $\langle x, z\rangle \in R$, i to kończy dowód przechodniości relacji R.

Część 4. Z części 1, 2 i 3 wynika równoważność z części 4. Aby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że jeżeli zdania φ_i są równoważne zdaniom ψ_i dla $i = 1, 2, 3$, to koniunkcja $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$ jest równoważna koniunkcji $\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \psi_3$. ■

Zadanie 813. Niech f będzie bijekcją przekształcającą zbiór A w A. Zdefiniujmy relację $R \subseteq A^2$ przyjmując, że

$$xRy \iff f(x) = y.$$

Symbolem R_∞ oznaczamy przechodnie domknięcie relacji R, czyli relację $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, gdzie $R^1 = R$ oraz $R^{n+1} = R^n R$. Czy

1. R_∞ jest relacją równoważności?
2. R_∞ jest relacją równoważności, jeśli A jest zbiorem skończonym?

Rozwiązanie. *Część 1.* Najpierw zauważmy, że jeżeli funkcję f będziemy traktować jak relację, to warunek $f(x) = y$ będzie równoważny z $\langle x, y\rangle \in f$. Tak więc

$$\langle x, y\rangle \in R \iff xRy \iff f(x) = y \iff \langle x, y\rangle \in f,$$

czyli relacja R jest tożsama z funkcją f. Wobec tego, relacja R^n jest niczym innym, jak n-krotnym złożeniem funkcji f.

Na ogół przechodnie domknięcie relacji R zdefiniowanej w zadaniu nie jest relacją równoważności. Tak jest np. dla zbioru liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ i funkcji $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ zdefiniowanej wzorem $f(k) = k + 1$. Funkcja f jest oczywiście bijekcją. Dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ relacja R^n spełnia dla wszystkich $x, y \in \mathbb{Z}$ równoważność

$$xR^n y \iff y = x + n.$$

Jeżeli przedstawione argumenty nie implikują tej równoważności w sposób oczywisty, to proponuję sprawdzenie jej przez indukcję ze względu na n.

Dla tej funkcji f relacja R_∞ nie jest zwrotna, a nawet jest antyzwrotna. Dla wszystkich $x \in \mathbb{Z}$, założenie $x R_\infty x$ można sprowadzić do sprzeczności w następujący sposób: warunek $x R_\infty x$ oznacza, że $\langle x, x\rangle \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$. Tak więc dla pewnej liczby $m > 0$ mamy $\langle x, x\rangle \in R^m$, czyli $x R^m x$. Z podanej charakteryzacji relacji R^m wynika, że $x = x + m$. Jest to możliwe tylko, gdy $m = 0$. Przeczy to jednak warunkowi $m > 0$.

Jeżeli R_∞ nie jest zwrotna, to nie jest relacją równoważności. Można też dowieść w podobny sposób, że R_∞ nie jest też symetryczna.

Część 2. Założenie o skończoności zbioru A implikuje, że R_∞ jest relacją równoważności. Dla dowolnego $x \in A$, rozważamy funkcję $I : \mathbb{N} \to A$ taką, że $I(n) = f^n(x)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$ ($I(n)$ to wartość n-krotnego złożenia funkcji f dla argumentu x, $f^0(x) = x$). Gdyby funkcja f była różnowartościowa, to zbiór A byłby nieskończony. Dla skończonego zbioru A funkcja f nie jest różnowartościowa. Tak więc możemy znaleźć dwie liczby naturalne p i q, takie, że $p < q$ oraz $f^p(x) = I(p) = I(q) = f^q(x)$. Składanie funkcji jest operacją łączną i zachowuje różnowartościowość. Wobec tego, $f^p(x) = f^q(x) = f^p(f^{q-p}(x))$. Różnowartościowości funkcji f^p implikuje także równość $f^{p-q}(x) = x$. Udowodniliśmy więc, że jeżeli A jest zbiorem skończonym, to dla dowolnego $x \in A$ istnieje liczba dodatnia r taka, że

$$f^r(x) = x. \tag{1}$$

Udowodniona własność oznacza, że relacja R_∞ jest zwrotna. Aby się o tym przekonać, bierzemy $x \in A$ i liczbę $r > 0$ spełniającą (1). Z równości (1) wynika, że $\langle x, x\rangle \in f^r = R^r$. Zawieranie $R^r \subseteq R_\infty$ implikuje zaś, że $\langle x, x\rangle \in R_\infty$.

Równość (1) implikuje także, że jeżeli iterujemy obliczanie wartości funkcji f zaczynając od argumentu x, to otrzymujemy w kółko te same wartości

$$f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^r(x) = x,\ f(x),\ f^2(x),\ \ldots,\ f^r(x) = x,\ f(x),\ \ldots$$

Spostrzeżenie to pozwala dowieść symetryczność relacji R_∞. Najpierw jednak zauważmy, że równość (1) zachodzi także dla wszystkich wielokrotności r. Świadczą o tym następujące obliczenia będące fragmentem dowodu indukcyjnego:

$$f^{(k+1)r}(x) = f^{kr}(f^r(x)) = f^{kr}(x) = x.$$

Teraz możemy przystąpić do dowodu, że relacja R_∞ jest symetryczna. Przypuśćmy, że $\langle x, y\rangle \in R_\infty$. Na podstawie definicji R_∞ stwierdzamy, że $\langle x, y\rangle \in R^n$ dla pewnej dodatniej liczby naturalnej n. Ponieważ relacja R^n jest równa f^n, więc $f^n(x) = y$. Weźmy liczbę naturalną k taką, że $n < kr$. Dla tej liczby k mamy $kr - n > 0$ oraz

$$f^{kr-n}(y) = f^{kr-n}(f^n(x)) = f^{kr}(x) = x.$$

Udowodniona równość oznacza, że

$$\langle y, x\rangle \in f^{kr-n} = R^{kr-n} \subseteq R_\infty.$$

Przechodniość relacji R_∞ wynika z zadania 521.

Z przedstawionych rozumowań otrzymujemy, że jeżeli zbiór A jest skończony, to relacja R_∞ jest zwrotna i symetryczna. Wiemy też, że jest przechodnia. Tak więc dla zbioru skończonego A, relacją R_∞ jest równoważnością. ■

Zadanie 814. Przypuśćmy, że V jest skończonym zbiorem zmiennych zdaniowych, $R \subseteq V^2$ jest przechodnią relacją w zbiorze V, a $p_0, q_0 \in V$ są dwiema różnymi zmiennymi zdaniowymi. Niech Φ będzie formułą zdaniową

$$p_0 \wedge \neg q_0 \wedge \bigwedge_{(p,q)\in R} (p \Rightarrow q).$$

Pokaż, że formuła Φ jest sprzeczna wtedy i tylko wtedy, gdy $(p_0, q_0) \in R$.

Rozwiązanie. Najpierw udowodnimy, że jeżeli $(p_0, q_0) \notin R$, to formuła Φ jest spełnialna. Zrobimy to definiując wartościowanie spełniające Φ.

Zauważmy, że chcemy zdefiniować wartościowanie, przy którym będzie prawdziwa formuła p_0, będą prawdziwe wszystkie implikacje $p \Rightarrow q$ takie, że $(p, q) \in R$, i — w konsekwencji — będą prawdziwe wszystkie zmienne q takie, że $(p_0, q) \in R$, oraz możliwie dużo zmiennych będzie fałszywych, gdyż q_0 powinna być fałszywa. Weźmy więc wartościowanie w, przy którym prawdziwa jest zmienna p_0 oraz wszystkie zmienne q takie, że $(p_0, q) \in R$, a pozostałe zmienne są fałszywe.

Pokażemy, że przy wartościowaniu w koniunkcja Φ jest prawdziwa. W tym celu wystarczy pokazać, że wszystkie jej człony są prawdziwe.

Oczywiście, pierwszy człon (p_0) jest prawdziwy przy wartościowaniu w. Ponieważ $q_0 \neq p_0$ i $(p_0, q_0) \notin R$, więc zmienna q_0 jest fałszywa przy wartościowaniu w, a drugi człon formuły Φ (negacja q_0) jest prawdziwy.

Pozostałe człony koniunkcji Φ są postaci $p \Rightarrow q$ dla zmiennych p i q takich, że $(p, q) \in R$. Weźmy więc p i q takie, że $(p, q) \in R$. Jeżeli zmienna p jest fałszywa przy wartościowaniu w, to implikacja $p \Rightarrow q$ jest przy tym wartościowaniu prawdziwa.

Przypuśćmy więc, że zmienna p jest prawdziwa przy wartościowaniu w. Wtedy są możliwe dwa przypadki: albo $p = p_0$, albo $(p_0, p) \in R$. W każdym przypadku (w drugim z przechodniości R) mamy, że $(p_0, q) \in R$. Tak więc zmienna q oraz implikacja $p \Rightarrow q$ są prawdziwe przy wartościowaniu w. W ten sposób dowiedliśmy spełnialności formuły Φ.

Udowodnimy jeszcze metodą nie wprost, że jeżeli $(p_0, q_0) \in R$, to formuła Φ jest sprzeczna. Załóżmy więc, że koniunkcja Φ jest prawdziwa przy pewnym wartościowaniu. Przy tym wartościowaniu są prawdziwe wszystkie człony Φ, a więc m.in. formuły p_0, $\neg q_0$ oraz — na mocy założenia $(p_0, q_0) \in R$ — implikacja $p_0 \Rightarrow q_0$.

Oczywiście, nie jest to możliwe, gdyż implikacja $p_0 \Rightarrow q_0$ jest fałszywa przy każdym wartościowaniu, przy którym formuły p_0 i $\neg q_0$ są prawdziwe. ■

Zadanie 815. Na zbiorze X określone są takie relacje równoważności Q i R, że

1. każda klasa równoważności relacji Q ma q elementów,
2. każda klasa relacji R ma r elementów oraz
3. istnieje klasa równoważności relacji Q, która ma dokładnie jeden element wspólny z każdą klasą równoważności relacji R.

Ile elementów ma zbiór X?

Rozwiązanie. Przyjmijmy, że A oznacza tę klasę równoważności relacji Q, o której jest mowa w punkcie 3), a K — zbiór klas równoważności relacji R.

Wszystkie przedstawione rozwiązania korzystają z faktu, że zbiory K i A mają tyle samo elementów. Jeżeli to wiemy, to na podstawie warunku 1) stwierdzamy, że K ma q elementów. Relacja równoważności R wyznacza więc podział zbioru X na q rozłącznych klas równoważności, które mają po r elementów. Stąd otrzymujemy, że X ma $q \cdot r$ elementów. Dalej pokażę, jak dowodzić, że $|A| = |K|$.

Sposób 1. Niech $f : K \to A$ będzie funkcją, która dla klasy $Y \in K$ przyjmuje wartość $f(Y) \in Y \cap A$. Punkt 3) ze sformułowania zadania gwarantuje poprawność tej definicji.

Pokażemy, że funkcja f jest bijekcją. Jeżeli $f(Y) = f(Z)$ dla pewnych klas klas $Y, Z \in K$, to $f(Y) \in (Y \cap A) \cap (Z \cap A) \subseteq Y \cap Z$. W tym przypadku klasy Y i Z nie są rozłączne, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy $Y = Z$. Wobec tego f jest różnowartościowa.

Weźmy teraz $a \in A$. Oczywiście, klasa równoważności $[a]_R$ należy do K. Gdyby $f([a]_R) \neq a$, to zbiór $[a]_R \cap A$ miałby przynajmniej dwa elementy: $f([a]_R)$ oraz a, a to przeczy warunkowi 3). Tak więc funkcja f jest typu „na”.

Sposób 2. Tym razem definiujemy funkcję $g : A \to K$, która elementowi $a \in A$ przyporządkowuje klasę $[a]_R$ (przyjmujemy, że $g(a) = [a]_R$). Podobnie jak w pierwszym rozwiązaniu, funkcja g jest bijekcją.

Jeżeli $[a]_R = [b]_R$ dla $a, b \in A$, to do klasy $[a]_R$ należy zarówno a, jak i b. Z wyboru A mamy jednak, że do dowolnej klasy równoważności może należeć tylko jeden element zbioru A, więc $a = b$.

Jeżeli Y jest dowolną klasą równoważności relacji R, to z warunku 3) (a raczej z wyboru A) znajdujemy w niej pewien element $a \in A$. Wobec tego, klasy równoważności $[a]_R$ i Y nie są rozłączne. Takie klasy muszą być równe. Otrzymaliśmy więc, że $g(a) = [a]_R = Y$.

Sposób 3. Zauważmy, że

$$A = A \cap X = A \cap \bigcup_{Y \in K} Y = \bigcup_{Y \in K} A \cap Y$$

(druga równość wynika stąd, że suma klas równoważności jest równa dziedzinie relacji równoważności). Zbiory $A \cap Y_1$ i $A \cap Y_2$ dla różnych klas równoważności Y_1 i Y_2 są rozłączne, ponieważ klasy te są rozłączne. Wobec tego

$$|A| = |\bigcup_{Y \in K} A \cap Y| = \sum_{Y \in K} |A \cap Y| = \sum_{Y \in K} 1 = |K|.$$

■

Zadanie 816. Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Kiedy równanie

$$A \cup X = B$$

1. ma dokładnie jedno rozwiązanie,
2. ma nieskończenie wiele rozwiązań,
3. nie ma rozwiązań?

Rozwiązanie. Jeżeli równanie $A \cup X = B$ ma rozwiązanie, to jest taki zbiór C, że $A \cup C = B$. Wtedy oczywiście zbiór A jest podzbiorem B. Także na odwrót, jeżeli $A \subseteq B$, to zbiór $X = B \setminus A$ spełnia równanie $A \cup X = B$.

Udowodniliśmy więc, że równanie $A \cup X = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $A \subseteq B$. Tym samym odpowiedzieliśmy na pytanie 3: równanie $A \cup X = B$ nie ma rozwiązania wtedy i tylko wtedy, gdy $A \not\subseteq B$.

Załóżmy, że $A \subseteq B$. Scharakteryzujemy rozwiązania równania $A \cup X = B$. Warunek $A \cup C = B$ implikuje, że C jest podzbiorem B oraz zawiera różnicę $B \setminus A$. Prawdziwa jest także implikacja odwrotna: jeżeli $B \setminus A \subseteq C \subseteq B$, to

$$B = A \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup C \subseteq A \cup B = B,$$

a więc C spełnia równanie $A \cup X = B$. Tak więc zbiorem rozwiązań równania $A \cup X = B$ jest

$$\{X : B \setminus A \subseteq X \subseteq B\}.$$

Policzymy jeszcze liczbę elementów tego zbioru, albo jego moc. W tym celu definiujmy funkcję f określoną w zbiorze $\mathcal{P}(A)$ wszystkich podzbiorów zbioru A i przyjmującą wartości dane wzorem

$$f(Y) = Y \cup (B \setminus A).$$

Łatwo dowodzi się, że funkcja f przekształca $\mathcal{P}(A)$ na zbiór rozwiązań równania $A \cup X = B$. Co więcej, jest to funkcja różnowartościowa. Jeżeli bowiem $f(Y_1) = f(Y_2)$ dla pewnych $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(A)$, to

$$Y_1 = (Y_1 \cup (B \setminus A)) \cap A = f(Y_1) \cap A = f(Y_2) \cap A = (Y_2 \cup (B \setminus A)) \cap A = Y_2.$$

Tak więc funkcja f ustala równoliczność zbioru $\mathcal{P}(A)$ i zbioru rozwiązań równania $A \cup X = B$. Oznacza to, że równanie $A \cup X = B$ ma tyle elementów, co zbiór $\mathcal{P}(A)$ (albo zbiór rozwiązań równania $A \cup X = B$ jest tej samej mocy, co zbiór $\mathcal{P}(A)$).

Teraz łatwo odpowiedzieć na pytania 1 i 2. Jeżeli A jest niepusty to ma przynajmniej dwa podzbiory: zbiór pusty i samego siebie. Tak więc równanie $A \cup X = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem pustym.

Zbiory skończone mają skończenie wiele podzbiorów, a nieskończone — nieskończenie wiele. Wobec tego, równanie $A \cup X = B$ ma nieskończenie wiele rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem nieskończonym. ■

Zadanie 817. Niech $\alpha : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ będzie ciągiem zerojedynkowym. Symbolem $\sim_\alpha$ oznaczamy relację w zbiorze $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ nieskończonych ciągów zerojedynkowych zdefiniowaną formułą

$$\beta \sim_\alpha \gamma \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}\ \big(\alpha(n)\beta(n) = \alpha(n)\gamma(n)\big).$$

Czy istnieje taki ciąg α, dla którego:

a) relacja $\sim_\alpha$ ma przeliczalnie i nieskończenie wiele klas równoważności?

b) wszystkie klasy równoważności relacji $\sim_\alpha$ są przeliczalne i nieskończone?

c) istnieje przeliczalna i nieskończona klasa równoważności relacji $\sim_\alpha$?

Rozwiązanie. Ustalmy α i przyjmijmy, że $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\}$. Oczywiście, $\sim_\alpha$ jest relacją równoważności. Przyjmijmy, że N_α jest zbiorem klas równoważności tej relacji. Symbolem $[x]_\alpha$ będziemy oznaczać klasy abstrakcji relacji $\sim_\alpha$.

Fakt 199. Zbiór N_α i zbiór $\{0, 1\}^A$ są równoliczne.

Dowód. Dla funkcji $\xi : A \to \{0, 1\}$ definiujemy funkcję $\bar{\xi} : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ przyjmując, że

$$\bar{\xi}(n) \quad = \quad \begin{cases} \xi(n), & \text{jeżeli } n \in A, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Zdefiniujmy jeszcze wzorem

$$f(\xi) \quad = \quad [\bar{\xi}]_\alpha$$

funkcję $f : \{0, 1\}^A \to N_\alpha$. Funkcja ta jest różnowartościowa i typu „na”.

Aby dowieść różnowartościowość funkcji f weźmy dwa (różne) argumenty ξ_1 i ξ_2 tej funkcji. Są to funkcje określone w zbiorze A. Istnieje więc liczba $n \in A$ taka, że $\xi_1(n) \neq \xi_2(n)$. Funkcje $\bar{\xi}_1$ i $\bar{\xi}_2$ też przyjmują różne wartości dla argumentu n:

$$\bar{\xi}_1(n) = \xi_1(n) \neq \xi_2(n) = \bar{\xi}_2(n).$$

Oznacza to, że $\bar{\xi}_1 \not\sim_\alpha \bar{\xi}_2$. Stąd otrzymujemy, że klasy $[\bar{\xi}_1]_\alpha$ i $[\bar{\xi}_2]_\alpha$ są różne (różnią się np. elementem $\bar{\xi}_1$).

Weźmy dowolną klasę ze zbioru N_α i jej reprezentanta γ. Pokażemy, że $[\gamma]_\alpha$ jest wartością funkcji f. W tym celu weźmy funkcję $\delta : A \to \{0, 1\}$ będącą obcięciem γ do zbioru A (a więc spełniającą $\delta(n) = \gamma(n)$ dla wszystkich $n \in A$) i zauważmy, że także $\bar{\delta}(n) = \gamma(n)$ dla wszystkich $n \in A$. To jednak oznacza, że $\bar{\delta} \sim_\alpha \gamma$. Wobec tego, $f(\delta) = [\bar{\delta}]_\alpha = [\gamma]_\alpha$.

Dowód (inny sposób). Weźmy funkcję $g : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}^A$ przyporządkowującą funkcji $\gamma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ obcięcie funkcji γ do zbioru A. Oczywiście, funkcja g jest typu „na". Świadczy o tym np. równość $g(\bar{\xi}) = \xi$.

Funkcja g spełnia także równoważność

$$g(\gamma_1) = g(\gamma_2) \Leftrightarrow \gamma_1 \sim_\alpha \gamma_2.$$

Równoważność ta implikuje, że wzór

$$G([\gamma]_\alpha) = g(\gamma)$$

jest poprawną definicją funkcji $G : N_\alpha \to \{0, 1\}^A$ i – co więcej – funkcja ta jest różnowartościowa. Ponieważ g jest typu „na", więc także G jest typu „na".

Fakt 200. Klasy równoważności relacji $\sim_\alpha$ są równoliczne ze zbiorem $\{0, 1\}^{\mathbb{N}\setminus A}$.

Dowód. Weźmy dowolną funkcję $\beta \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ i zdefiniujmy funkcję $f : [\beta]_\alpha \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}\setminus A}$. Funkcja f elementowi $\gamma \in [\beta]_\alpha$ przyporządkowuje obcięcie γ do zbioru $\mathbb{N} \setminus A$. Aby dowieść podany fakt pokażemy, że funkcja f jest bijekcją.

Weźmy więc różne funkcje $\gamma_1, \gamma_2 \in [\beta]_\alpha$. Ponieważ należą do jednej klasy równoważności relacji $\sim_\alpha$, więc przyjmują te same wartości dla dowolnego argumentu ze zbioru A. Wobec tego, przyjmują różne wartości dla pewnego $n \notin A$. Ich obcięcia od zbioru $\mathbb{N} \setminus A$ też przyjmują różne wartości dla tego samego argumentu, a więc są różne. To dowodzi, że funkcja f jest różnowartościowa.

Aby dowieść, że funkcja f jest typu „na", weźmy dowolną funkcję $\xi \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}\setminus A}$ i zdefiniujmy $\gamma \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ takie, że

$$\gamma(n) = \begin{cases} \beta(n), & \text{jeżeli } n \in A, \\ \xi(n), & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Oczywiście, funkcje γ i β są w relacji $\sim_\alpha$ oraz obcięcie γ do $\mathbb{N} \setminus A$ jest równe ξ. Tak więc $f(\gamma) = \xi$.

Fakt 201. Jeżeli zbiór $A \subseteq \mathbb{N}$ jest nieskończony, to zbiór $\{0, 1\}^A$ jest nieprzeliczalny.

Dowód. Nieskończony podzbiór A zbioru liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Jeżeli zbiór A jest równoliczny z $\mathbb{N}$, to także zbiory $\{0, 1\}^A$ i $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ są równoliczne. Ten ostatni zbiór jest nieprzeliczalny na podstawie twierdzenia Cantora. Oznacza to, że także zbiór $\{0, 1\}^A$ jest nieprzeliczalny.

Wniosek. Zbiór N_α klas równoważności relacji $\sim_\alpha$ jest albo skończony, albo nieprzeliczalny.

Dowód. Są możliwe dwa przypadki: albo zbiór A jest skończony i wtedy zbiór $\{0, 1\}^A$ i równoliczny z nim zbiór N_α są skończone, albo zbiór A jest nieskończony i zarówno zbiór $\{0, 1\}^A$ jak i równoliczny z nim zbiór N_α są nieprzeliczalne.

Z powyższego wniosku wynika negatywna odpowiedź na pytanie a): dla żadnego α zbiór klas równoważności relacji $\sim_\alpha$ nie jest przeliczalny i nieskończony.

Wniosek. Klasy abstrakcji relacji $\sim_\alpha$ są albo skończone, albo nieprzeliczalne.

Dowód. Ten wniosek dowodzimy dokładnie tak, jak poprzedni.

Z ostatniego wniosku otrzymujemy negatywną odpowiedź na pytanie c): dla żadnego α żadna klasa klasa równoważności nie jest nieskończona przeliczalna.

Negatywna odpowiedź na pytanie c) implikuje także negatywną odpowiedź na pytanie b). Odpowiedź na pytanie b) można też łatwo wyprowadzić z ostatniego wniosku. ■

Zadanie 818. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Mówimy, że $x \in \mathbb{R}$ jest lokalnym maksimum funkcji f, jeżeli istnieje taka dodatnia liczba rzeczywista r, że dla każdego $y \in \mathbb{R}$

$$(x - r < y < x + r \land x \neq y) \Rightarrow f(x) > f(y)$$

Udowodnij, że dla każdej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zbiór jej lokalnych maksimów jest przeliczalny.

Rozwiązanie. Nie należy ulec pokusie i próbować udowodnić powyższe twierdzenie w następujący, niesłuszny sposób:

Dowód (fałszywy!). Z każdym z maksimów lokalnych x związujemy przedział zawierający x, taki, że dla każdej liczby z tego przedziału z wyjątkiem x funkcja f przyjmuje wartości mniejsze niż $f(x)$ (taki przedział istnieje na mocy definicji). Z każdego takiego przedziału wybieramy liczbę wymierną. Zbudowaliśmy więc odwzorowanie przekształcające zbiór maksimów funkcji w zbiór liczb wymiernych, który jest przeliczany.

Niestety nie zadbaliśmy o to, by odwzorowanie powyższe było różnowartościowe! Jednym z warunków, który by to zagwarantował, jest wymaganie, by przedziały otaczające maksima były rozłączne. Nie zawsze jednak takie przedziały da się wybrać. Podam przykłady funkcji, dla których nie można skonstruować rodziny parami rozłącznych przedziałów zawierających wszystkie maksima lokalne, takiej, że w każdym przedziale jest najwyżej jedno maksimum.

Rozważmy funkcję $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowaną wzorem

$$f_1(x) = \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{dla } x \neq 0, \\ 2, & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Łatwo sprawdzić, że funkcja f_1 przyjmuje maksimum lokalne dla $x = 0$ i dla wszystkich $x = \frac{1}{2k\pi}$ dla $k \in Z$.

Podobnie jest w przypadku funkcji f_2 zdefiniowanej wzorem

$$f_2(x) = \begin{cases} x^2\left(\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - 2\right), & \text{dla } x \neq 0, \\ 0, & \text{dla } x = 0, \end{cases}$$

która dodatkowo jest ciągła, a nawet różniczkowalna.

Weźmy teraz funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przyjmującą wartości

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{jeżeli } x = \frac{m}{n}, \text{ gdzie } n \text{ i } m \text{ są liczbami względnie pierwszymi i } n > 0, \\ 1, & \text{jeżeli } x = 0, \\ 0, & \text{jeżeli } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dla tej funkcji zbiór lokalnych maksimów jest równy zbiorowi liczb wymiernych. Zauważmy od razu ważną własność funkcji f: dla dowolnej dodatniej liczby k i dla dowolnej liczby całkowitej a, funkcja f nie przyjmuje wartości $1/k$ dla argumentów $x \in (a/k, (a+1)/k)$.

Najpierw pokażemy, że $3/7$ jest lokalnym maksimum f. Oczywiście, $f(3/7) = 1/7$. Zauważmy, że w przedziale $(2/7, 4/7)$ funkcja f przyjmuje wartość 1/7 tylko dla $x = 3/7$. Funkcja f przyjmuje też wartości większe od 1/7 i są to wartości 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 i 1/6. Ale f nie przyjmuje wartości 1 w przedziale (0, 1), nie przyjmuje wartości 1/2 w przedziale (0, 1/2), nie przyjmuje wartości 1/3 dla $x \in (1/3, 2/3)$, wartości 1/4 dla $x \in (1/4, 2/4)$, wartości 1/5 dla $x \in (2/5, 3/5)$ oraz wartości 1/6 dla $x \in (2/6, 3/6)$. Zauważmy, że do wszystkich wymienionych przedziałów należy 3/7. Co więcej, dla argumentów należących do przekroju wymienionych przedziałów (z wyjątkiem $x = 3/7$) funkcja f nie przyjmuje wartości $\geq 1/7$. Przekrojem tym jest $(2/5, 1/2)$. Dla $x \in (2/5, 1/2)$ z wyjątkiem $x = 3/7$ funkcja f przyjmuje wartości mniejsze od 1/7. Zmniejszając ten przedział można spowodować, że jego środkiem stanie się punkt 3/7. Tak więc 3/7 jest jednym z maksimów lokalnych funkcji f.

Przedstawione rozumowanie można powtórzyć dla każdej z liczb wymiernych. Jeżeli m/n jest nieskracalnym przedstawieniem liczby wymiernej i $n > 0$, to definiujemy

$$a_k = \max\left\{a \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \frac{a}{k} < \frac{m}{n}\right\}.$$

Oczywiście, $\frac{a_k}{k} < \frac{m}{n} \leq \frac{a_k+1}{k}$. Jeżeli $0 < k < n$, to także $\frac{m}{n} < \frac{a_k+1}{k}$, gdyż przedstawienie liczby wymiernej w postaci nieskracalnego ułamka z dodatnim mianownikiem jest jednoznaczne i liczba m/n nie daje się przedstawić w postaci l/k.

Przyjmijmy, że

$$p = \max\{a_1, \ldots, a_n\} \text{ oraz } q = \min\{a_1 + 1, \ldots, a_{n-1} + 1, a_n + 2\}.$$

Liczby p i q są tak dobrane, że

$$(p, q) = \bigcap_{k=1}^{n-1} (a_k, a_k + 1) \cap (a_n, a_n + 2).$$

Oczywiście, $m/n \in (p, q)$. Ze wspomnianej własności funkcji f otrzymujemy, że na przedziale (p, q) nie przyjmuje ona wartości $> 1/n$ oraz – z wyjątkiem argumentu m/n – nie przyjmuje wartości $1/n$. Wobec tego, na przedziałach $(p, m/n)$ i $(m/n, q)$ funkcja f przyjmuje tylko wartości $< 1/n$. Aby wykazać, że liczba m/n spełnia warunek z definicji maksimum lokalnego wystarczy zastąpić przedział (p, q) mniejszym i symetrycznym względem punktu m/n.

Można konstruować jeszcze bardziej skomplikowane funkcje o interesujących nas własnościach. Prawdopodobnie można dowieść, że dla dowolnego przeliczalnego zbioru $X \subseteq \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która ma maksima lokalne dokładnie w punktach należących do X.

Dowód (poprawny). Weźmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zdefiniujmy zbiór

$$M = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ jest maksimum lokalnym funkcji } f\}.$$

Aby rozwiązać zadanie wystarczy dowieść, że M jest przeliczalny. Przeliczalność zbioru M wykażemy dowodząc, że istnieje różnowartościowa funkcja

$$g : M \to Q \times Q.$$

Od funkcji g będzie wymagać, aby dla argumentu $m \in M$ jej wartością była para liczb wymiernych r_1 i r_2 taka, że $r_1 < m < r_2$ i dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ spełniony jest warunek

$$r_1 < x < r_2 \wedge x \neq m \Rightarrow f(x) < f(m).$$

Oczywiście, dla każdego $m \in M$ takie liczby r_1 i r_2 istnieją. Dzięki temu, korzystając z przeliczalności produktu $Q \times Q$ można zdefiniować funkcję g przyjmując, że $g(m)$ jest pierwszą w ustalonej numeracji zbioru $Q \times Q$ parą o podanych własnościach.

Teraz wystarczy dowieść, że funkcja g jest różnowartościowa. Przypuśćmy, że mamy dwa różne elementy $m_1, m_2 \in M$ takie, że $g(m_1) = g(m_2)$. Jeżeli $g(m_1) = (r_1, r_2)$, to $m_1, m_2 \in (r_1, r_2)$ i z podanej własności g możemy wywnioskować dwie nierówności:

$$f(m_2) < f(m_1) \text{ oraz } f(m_1) < f(m_2).$$

Z drugiej strony, te nierówności nie mogą być jednocześnie prawdziwe. Uzyskana w ten sposób sprzeczność dowodzi różnowartościowości funkcji g, a to z kolei implikuje przeliczalność zbioru M. ■

Zadanie 819. Pokaż, że zbiory: liczb wymiernych ze zwykłym porządkiem i skończonych niepustych ciągów liczb wymiernych z porządkiem leksykograficznym generowanym przez zwykły porządek na liczbach wymiernych *są* izomorficzne. *Wsk.:* skorzystaj z wyników poprzednich zadań.

Rozwiązanie. W tym zadaniu należy skorzystać z twierdzenia, które mówi, że każde dwa przeliczalne porządki liniowe, które są gęste i bez końców, są izomorficzne (zadanie 661). Aby skorzystać z tego twierdzenia, należy pokazać, że:

1. zbiór skończonych, niepustych ciągów o wyrazach wymiernych jest przeliczalny (zadanie 626),
2. porządek leksykograficzny wyznaczony przez porządek liniowy jest porządkiem liniowym (zadanie 656),
3. porządek leksykograficzny w zbiorze skończonych, niepustych ciągów o wyrazach wymiernych jest gęsty,
4. oraz nie ma w nim elementu największego, ani najmniejszego.

Aby dowieść gęstość rozważanego porządku weźmy dwa skończone, niepuste ciągi a i b liczb wymiernych odpowiednio o wyrazach $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Załóżmy, że ciąg a jest mniejszy w sensie porządku leksykograficznego od ciągu b. Są możliwe dwa przypadki: albo $n < m$ oraz $a_i = b_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$, albo też dla pewnej liczby $k \leq n, m$ zachodzi nierówność $a_k < b_k$ i spełnione są równości $a_i = b_i$ dla $i = 1, \ldots, k-1$. Jeżeli zachodzi pierwszy przypadek, to bierzemy ciąg c o wyrazach $b_1, b_2, \ldots, b_n, b_{n+1} - 1$. W drugim przypadku bierzemy ciąg c o wyrazach $b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, (a_k + b_k)/2$. Bez trudu sprawdzamy, że w obu przypadkach ciąg c jest większy w sensie porządku leksykograficznego od ciągu a i mniejszy od ciągu b.

Jest też oczywiste, że jeżeli a_1 jest pierwszym wyrazem ciągu a, to jednoelementowy ciąg, którego wyrazem jest liczba $a_1 + 1$ jest większy od a, a jednoelementowy ciąg, którego wyrazem jest liczba $a_1 - 1$ jest mniejszy od a. Tak więc w rozważanym porządku leksykograficznym nie ma elementu największego, ani najmniejszego.

Zadanie 820. Niech $\Sigma = \{+, a\}$ będzie sygnaturą zawierającą dwuargumentowy symbol funkcji $+$ i symbol stałej a. Dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n niech $A_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, $\oplus_n$ oznacza dodawanie modulo n, zaś $a_n = 0$. Rozważmy algebry $\mathcal{A}_n = \langle A_n, \oplus_n, a_n\rangle$. Udowodnij, że jeżeli $k = l \cdot m$, to istnieje homomorfizm h algebry $\mathcal{A}_k$ na algebrę $\mathcal{A}_l$ (surjekcja) taki, że $|h^{-1}(\{0\})| = m$. Podaj przykład takich k, l i m, dla których istnieją co najmniej dwa takie homomorfizmy. Ile jest takich homomorfizmów, jeśli zamiast sygnatury Σ będziemy rozważać sygnaturę $\Sigma' = \{+, a, b\}$ zawierającą dwa symbole stałych a i b oraz algebry $\mathcal{A}'_n = \langle A_n, \oplus_n, a_n, b_n\rangle$, gdzie $b_n = 1$?

Rozwiązanie. Resztę z dzielenia k przez l będę oznaczać także symbolem $k \bmod l$. Zauważmy, że każdy element A_k jest sumą pewnej liczby jedynek (daje się przedstawić w postaci $1 \oplus_k \dots \oplus_k 1$). Wobec tego 1 generuje A_k. Homomorfizm wystarczy zdefiniować na zbiorze generatorów. Przyjmijmy więc, że $h : A_k \to A_l$ jest homomorfizmem i $h(1) = a$. Wtedy

$$h(n) = h(\underbrace{1 \oplus_k \dots \oplus_k 1}_{n \text{ razy}}) = \underbrace{h(1) \oplus_l \dots \oplus_l h(1)}_{n \text{ razy}} = (a \cdot n) \bmod l.$$

Fakt 202. Jeżeli l dzieli k, to funkcja $h_a : A_k \to A_l$ zdefiniowana wzorem

$$h_a(x) = (a \cdot x) \bmod l$$

jest homomorfizmem algebr $\mathcal{A}_k$ i $\mathcal{A}_l$.

Dowód. Zauważmy najpierw, że definicja funkcji h_a zależy od k i l, mimo że wprowadzone oznaczenie na to nie wskazuje. Oczywiście, $h_a(0) = 0$. Wystarczy więc dowieść, że dla wszystkich $x, y \in A_k$ zachodzi równość $h_a(x \oplus_k y) = h_a(x) \oplus_l h_a(y)$. Zauważmy, że

$$a \cdot x = p \cdot l + h_a(x) \ \text{ oraz } \ a \cdot y = q \cdot l + h_a(y)$$

dla pewnych liczb naturalnych p i q. Z tych samych powodów zachodzi równość

$$x + y = r \cdot k + (x \oplus_k y).$$

Łącząc podane równości otrzymujemy

$$a \cdot r \cdot k + a \cdot (x \oplus_k y) = a \cdot (x + y) = (p + q) \cdot l + h_a(x) + h_a(y).$$

Ponieważ l dzieli k, więc

$$h_a(x \oplus_k y) = a \cdot (x \oplus_k y) \bmod l = (h_a(x) + h_a(y)) \bmod l = h_a(x) \oplus_l h_a(y).$$

Część 1. Korzystając z podanego faktu można łatwo rozwiązać pierwszą część zadania. Wystarczy zauważyć, że jeżeli $k = l \cdot m$, to $h_1 : A_k \to A_l$ jest homomorfizmem takim, że $h_1(x) = x$ dla $x = 0, \ldots, l-1$, a więc jest homomorfizmem algebry $\mathcal{A}_k$ na algebrę $\mathcal{A}_l$. Mamy także

$$\begin{aligned} h_1^{-1}(0) &= \{x < l \cdot m \mid x \bmod l = 0\} = \{x < l \cdot m \mid l \text{ dzieli } x\} = \\ &= \{i \cdot l \mid i < m\} = g(\{i \mid i < m\}) \end{aligned}$$

dla funkcji $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takiej, że $g(i) = i \cdot l$. Funkcja g jest oczywiście różnowartościowa. Wobec tego zbiór $h_1^{-1}(0)$ jest równoliczny ze zbiorem $\{i \mid i < m\}$, który oczywiście ma m elementów, i też ma m elementów.

Część II. Aby rozwiązać drugą część zadania wystarczy dodatkowo zauważyć, że jeżeli weźmiemy $k = l = 3$, to odpowiednia funkcja h_2 przekształca A_3 na A_3 ($h_2(1) = 2$ i $h_2(2) = 1$) i — wobec tego — jest homomorfizmem algebry $\mathcal{A}_3$ na algebrę $\mathcal{A}_3$. Funkcje h_1 i h_2 są w tym przypadku różne, ponieważ $1 = h_1(1) \neq h_2(1) = 2$. Podobnie jest w przypadku funkcji $h_2 : A_6 \to A_3$ (jest to inna funkcja niż poprzednia, mimo że jest tak samo oznaczana!). Można dowieść, że dla dowolnej wielokrotności k liczby l, funkcja h_a przekształca A_k na A_l wtedy i tylko wtedy, gdy a jest względnie pierwsze z l.

Część III. Z definicji homomorfizmu wynika, że homomorfizmy algebry $\mathcal{A}'_k$ w algebrę $\mathcal{A}'_l$ są to dokładnie homomorfizmy algebry $\mathcal{A}_k$ w algebrę $\mathcal{A}_l$ przekształcające 1 na 1. Aby więc odpowiedzieć na ostatnie pytanie wystarczy ustalić, ile jest homomorfizmów przekształcających algebrą $\mathcal{A}_k$ na algebrę $\mathcal{A}_l$ i przeprowadzających 1 na 1. Pokażemy, że jeżeli l dzieli k, to jest dokładnie jeden taki homomorfizm. Oczywiście, jest taki homomorfizm (jest nim h_1). Przypuśćmy, że h też jest takim homomorfizmem. Wtedy

$$h(n) = h(\underbrace{1 \oplus_k \ldots \oplus_k 1}_{n \text{ razy}}) = \underbrace{h(1) \oplus_l \ldots \oplus_l h(1)}_{n \text{ razy}} = \underbrace{h_1(1) \oplus_l \ldots \oplus_l h_1(1)}_{n \text{ razy}} = h_1(n)$$

dla wszystkich $n \in A_k$. Wobec tego, homomorfizmy h i h_1 są identyczne. Bardziej elegancki dowód tego faktu powinien być indukcyjny. ■

Zadanie 821. Niech $A_0, A_1, A_2, \ldots$ będzie ciągiem zbiorów takim, że

$$A_{n+1} = \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i=0}^{n} A_i\right)$$

dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Przyjmijmy, że

$$B = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i.$$

Pokaż, że $B \times B \subseteq B$.

Rozwiązanie. Aby dowieść zawieranie $B \times B \subseteq B$ wystarczy z założenia $X \in B \times B$ wywnioskować, że $X \in B$. Załóżmy więc, że $X \in B \times B$. Elementami iloczynu kartezjańskiego $B \times B$ są pary uporządkowane o współrzędnych należących do B. Przypuśćmy, że X jest parą uporządkowaną $\langle a, b\rangle$ o współrzędnych $a, b \in B$, czyli $X = \langle a, b\rangle$. Zbiór B jest sumą mnogościową wyrazów ciągu $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Wobec tego, elementy a i b należą do pewnych składników tej sumy. Przyjmijmy, że $a \in A_p$ oraz $b \in A_q$ dla pewnych liczb $p, q \in \mathbb{N}$. Stąd oczywiście wynika, że

$$a, b \in \bigcup_{i=0}^{\max\{p,q\}} A_i.$$

Łatwo zauważyć, że

$$X = \langle a, b\rangle \in \left(\bigcup_{i=0}^{\max\{p,q\}} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i=0}^{\max\{p,q\}} A_i\right) = A_{\max\{p,q\}+1}.$$

Zbiór $A_{\max\{p,q\}+1}$ jest jednym ze składników sumy równej B. Ponieważ

$$X \in A_{\max\{p,q\}+1},$$

więc także $X \in B$.

Zadanie 822. Rozważmy formuły zdaniowe ϕ, w których występują jedynie spójniki równoważności i negacji. Niech ϕ^- oznacza formułę, którą otrzymujemy usuwając z ϕ wszystkie znaki negacji. Udowodnij, że

1. jeżeli symbol negacji występuje w ϕ parzystą liczbę razy, to $\phi \Leftrightarrow \phi^-$ jest tautologią,
2. jeżeli symbol negacji występuje w ϕ nieparzystą liczbę razy, to $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ jest tautologią.

Zauważ, że operacja $^-$ ma następujące własności: $(\neg\phi)^- = \phi^-$ oraz $(\phi \Leftrightarrow \psi)^- = \phi^- \Leftrightarrow \psi^-$.

Przypomnijmy, że formuły zdaniowe ϕ i ψ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy formuła $\phi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią. Napis $\phi \equiv \psi$ oznacza, że formuły ϕ i ψ są równoważne. Będziemy korzystać z następujących znanych i łatwych do wykazania własności:

1. formuły $\neg\neg\phi$ i ϕ są równoważne,
2. każde dwie z formuł $(\neg\phi) \Leftrightarrow \psi$, $\neg(\phi \Leftrightarrow \psi)$ i $\phi \Leftrightarrow (\neg\psi)$ są równoważne,
3. formuły $(\neg\phi) \Leftrightarrow (\neg\psi)$ i $\phi \Leftrightarrow \psi$ są równoważne.

Niech $\mathcal{F}$ oznacza zbiór wszystkich formuł zdaniowych, w których nie występują spójniki różne od negacji i równoważności. Przyjmijmy też, że symbol $\mathcal{F}_n$ oznacza zbiór tych formuł należących do $\mathcal{F}$, w których występuje najwyżej n spójników.

Rozwiązanie (najbardziej naturalne). Pokażemy przez indukcję ze względu na n, że dla każdej liczby naturalnej n i dla każdej formuły $\phi \in \mathcal{F}_n$ zachodzą następujące implikacje:

1. jeżeli w formule ϕ negacja występuje na parzystej liczbie miejsc, to formuła $\phi \Leftrightarrow \phi^-$ jest tautologią,
2. jeżeli w formule ϕ negacja występuje na nieparzystej liczbie miejsc, to formuła $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ jest tautologią.

Z tego pozornie bardziej ogólnego faktu bez trudu można wywnioskować tezę rozwiązywanego zadania.

Pierwsza część dowodu indukcyjnego. Jeżeli $n = 0$, to $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_0$ jest zbiorem zmiennych zdaniowych. Wobec tego, dla formuł $\phi \in \mathcal{F}_0$ zachodzi równość $\phi = \phi^-$. Pierwsza z dowodzonych implikacji jest konsekwencją tego, że formuły postaci $p \Leftrightarrow p$ są tautologiami. Druga zachodzi, ponieważ jej poprzednik jest fałszywy.

Druga część dowodu indukcyjnego. Zakładamy, że formuły ze zbioru $\mathcal{F}_n$ mają obie podane własności i bierzemy formułę $\phi \in \mathcal{F}_{n+1}$. Możemy dodatkowo założyć, że $\phi \notin \mathcal{F}_n$ (dla formuł z $\mathcal{F}_n$ teza zachodzi na mocy założenia indukcyjnego). Oczywiście, wszystkie formuły ze zbioru $\mathcal{F}$ są negacjami, równoważnościami lub zmiennymi i formuła ϕ nie jest zmienną (w przeciwnym razie należałaby do $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_n$).

Przypadek 1: formuła ϕ jest negacją. Przyjmijmy, że $\phi = \neg\psi$. W tym przypadku, $\phi^- = \psi^-$. Oczywiście, formuła $\psi \in \mathcal{F}_n$ i dla formuły ψ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. W zależności od liczby wystąpień negacji w formule ψ, tautologią jest albo formuła $\psi \Leftrightarrow \psi^-$ (gdy negacja występuje w ϕ parzystą liczbę razy), albo formuła $\psi \Leftrightarrow \neg\psi^-$ (w przeciwnym przypadku).

Jeżeli w formule ϕ negacja występuje na parzystej liczbie pozycji, to w formule ψ występuje na nieparzystej i tautologią jest formuła $\psi \Leftrightarrow (\neg\psi^-)$. Tautologią jest także formuła $(\neg\psi) \Leftrightarrow \psi^-$, która jest równa formule $\phi \Leftrightarrow \phi^-$.

Jeżeli w formule ϕ negacja występuje w nieparzystej liczbie miejsc, to w formule ψ występuje w parzystej i formuła $\psi \Leftrightarrow \psi^-$ jest tautologią. Wtedy także tautologią jest formuła $(\neg\psi) \Leftrightarrow (\neg\psi^-)$ identyczna z formuła $\phi \Leftrightarrow (\neg\phi^-)$.

Przypadek 2: formuła ϕ jest równoważnością. Przyjmijmy, że $\phi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ dla pewnych formuł $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}_n$. Tym razem zachodzi wzór $\phi^- = \psi_1^- \Leftrightarrow \psi_2^-$. Dalej powinniśmy rozważać cztery przypadki.

Przypadek 2.1: negacja występuje w ϕ nieparzystą, a w ψ_1 parzystą liczbę razy. W tym przypadku negacja występuje w ψ_2 nieparzystą liczbę razy. Dla formuł ψ_1 i ψ_2

możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Wobec tego, formuły ψ_1 i ψ_1^- są równoważne, a także równoważne są ψ_2 i $\neg\psi_2^-$. Wobec tego formuła $\phi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ jest równoważna z $\psi_1^- \Leftrightarrow \neg\psi_2^-$. Korzystając z własności 2), Formuła ϕ jest równoważna z $\neg(\psi_1^- \Leftrightarrow \psi_2^-) = \neg\phi^-$.

Przypadek 2.2: negacja występuje w ϕ i ψ_1 nieparzystą liczbę razy. W tym i kolejnych przypadkach przeprowadzamy rozumowanie podobne do wyżej przedstawionego.

Aby zakończyć rozwiązanie, powinniśmy jeszcze rozważyć następujące przypadki:

Przypadek 2.3: negacja występuje w ϕ parzystą, a w ψ_1 nieparzystą liczbę razy.

Przypadek 2.4: negacja występuje w ϕ i ψ_1 parzystą liczbę razy.

Rozwiązanie (sugerowane przez jedną z prac egzaminacyjnych). Przypuśćmy, że mamy daną formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i wartościowanie h (zmiennych występujących w tej formule). Symbolem $\phi[h]$ oznaczamy wartość logiczną formuły ϕ przy wartościowaniu h. Dla danego wartościowania, indeksem $i_h(\phi)$ formuły ϕ nazywamy sumę liczby negacji występujących w ϕ i liczby wystąpień w ϕ zmiennych fałszywych przy wartościowaniu h. Na przykład, jeżeli $h(p) = 1$, $h(q) = 0$ oraz $\phi = (q \Leftrightarrow p) \Leftrightarrow \neg(q \Leftrightarrow (\neg q \Leftrightarrow p))$, to $i_h(\phi) = 5$.

Lemat 203. Przypuśćmy, że mamy formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i wartościowanie h zmiennych tej formuły. Formuła ϕ jest spełniona przy wartościowaniu h wtedy i tylko wtedy, gdy $i_h(\phi)$ jest liczbą parzystą.

Dowód. Dowód tego lematu pozostawiamy jako ćwiczenie.

Wniosek. Formuła $\phi \in \mathcal{F}$ jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy występuje w niej parzysta liczba negacji i każda zmienna zdaniowa występuje parzystą liczbę razy.

Dowód. Weźmy formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i najpierw załóżmy, że jest tautologią. Formuła ϕ jest więc spełniona dla każdego wartościowania. Niech h wartościowaniem, które wszystkim zmiennym z formuły ϕ przyporządkowuje 1 (prawdę). Dla tego wartościowania indeks $i_h(\phi)$ jest liczbą negacji występujących w ϕ. Na podstawie powyższego lematu indeks ten jest liczbą parzystą.

Aby pokazać, że zmienna p występuje w ϕ parzystą liczbę razy weźmy wartościowanie h_p, które zmiennej p przyporządkowuje 0 (fałsz), a pozostałym zmiennym — 1 (prawdę). Dla tego wartościowania indeks $i_{h_p}(\phi)$ jest liczbą parzystą i jest równy sumie liczb wystąpień w ϕ negacji i wystąpień zmiennej p. Odejmując od indeksu liczbę wystąpień negacji otrzymujemy liczbę wystąpień zmiennej p. Liczba ta, jako różnica dwóch liczb parzystych jest parzysta.

Aby dowieść implikację przeciwną do udowodnionej, wystarczy zauważyć, że jeżeli w formule ϕ negacja i każda zmienna występuje parzystą liczbę razy, to dla dowolnego wartościowania indeks tej formuły jest liczbą parzystą. W tej sytuacji, z powyższego lematu wynika, że formuła ϕ jest spełniona dla dowolnego wartościowania. ■

Korzystając z podanego wniosku bez trudu możemy sprawdzić, czy formuły takie, jak $\phi \Leftrightarrow \phi^-$ lub $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ są tautologiami.

Rozwiązanie (też sugerowane). Z lematu podanego w poprzednim rozwiązaniu wynika następujący, oczywisty wniosek:

Wniosek. Przypuśćmy, że formułę ψ otrzymujemy wymazując w formule $\phi \in \mathcal{F}$ jeden znak negacji. Wtedy, dla dowolnego wartościowania h wartości logiczne $\phi[h]$ i $\psi[h]$ są różne. ■

Weźmy teraz formułę $\phi \in \mathcal{F}$ i wymazujmy w niej kolejno symbole negacji tak długo, aż wymażemy wszystkie. Przypuśćmy, że w ten sposób otrzymujemy ciąg formuł

$$\phi = \phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_n.$$

Oczywiście, $\phi_n = \phi^-$ i n jest liczbą znaków negacji występujących w ϕ. Z powyższego wniosku wynika, że dla dowolnego wartościowania h ciąg wartości logicznych

$$\phi[h] = \phi_0[h], \phi_1[h], \ldots, \phi_n[h] = \phi^-[h]$$

zawiera na przemian 0 i 1. Stąd wynika, że jeżeli n jest liczbą parzystą, to $\phi[h] = \phi^-[h]$ dla dowolnego wartościowania h. Podobnie, jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $\phi[h] \neq \phi^-[h]$ dla dowolnego wartościowania h. Teraz teza zadania jest już oczywista.

Rozwiązanie (jeszcze inna wersja). To rozwiązanie też rozpoczniemy od wykazania pomocniczego lematu.

Lemat 204. Jeżeli w formule $\phi \in \mathcal{F}$ występuje dokładnie jeden symbol negacji, to formuła $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ jest tautologią.

Dowód. Lemat ten udowodnimy przez indukcję ze względu na liczbę spójników występujących w $\mathcal{F}$. Dla formuł $\phi \in \mathcal{F}_0$ jest on oczywisty, gdyż dla takich formuł nie jest spełnione założenie lematu.

Przypuśćmy, że lemat zachodzi dla formuł ze zbioru $\mathcal{F}_n$ i weźmy formułę $\phi \in \mathcal{F}_{n+1}$. Są możliwe dwa przypadki.

Przypadek 1: formuła ϕ jest negacją. Jeżeli $\phi = \neg\psi$, to $\phi^- = \psi^-$ i dodatkowo — na podstawie założenia — w formule ψ nie występuje negacja, a więc $\psi^- = \psi$. Nietrudno zauważyć, że w tym przypadku w formule $\phi \Leftrightarrow \neg\phi^-$ po obu stronach równoważości znajduje się to samo.

Przypadek 2: formuła ϕ jest równoważnością. Jeżeli $\phi = \psi_1 \Leftrightarrow \psi_2$ i negacja występuje w ϕ w dokładnie jednym miejscu, to występuje w dokładnie jednym miejscu dokładnie jednej z formuł ψ_1 lub ψ_2. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że negacja występuje w ψ_1.

Z założenia indukcyjnego wynika, że formuły ψ_1 i $\neg\psi_1^-$ są równoważne. Jest oczywiste, że $\psi_2^- = \psi_2$. Na podstawie własności 2) podanej na początku mamy, że formuła $\neg\phi^-$, czyli $\neg(\psi_1^- \Leftrightarrow \psi_2^-)$, jest równoważna formule $(\neg\psi_1^-) \Leftrightarrow \psi_2^-$, a ta z kolei — na podstawie założenia indukcyjnego — jest równoważna $\psi_1 \Leftrightarrow \psi_2^-$, czyli formule ϕ. ■

Załóżmy, że w formule ϕ jest symbol negacji i ten symbol poprzedza formułę δ. Przyjmijmy, że jeżeli wymażemy w ϕ tę negację wraz z formułą δ i w to miejsce wstawimy nową zmienną zdaniową q, to otrzymamy formułę ψ. Nietrudno zauważyć, że jeżeli teraz w formule ψ zastąpimy zmienną q formułą $\neg\delta$ to otrzymamy formułę $\psi(\neg\delta)$ identyczną z wyjściową formułą ϕ.

W formułach ψ i δ występuje mniej spójników, niż w ϕ. Z założenia indukcyjnego otrzymujemy, że zależnie od przypadku, formuły $\psi \Leftrightarrow \neg\psi^-$ oraz $\delta \Leftrightarrow \neg\delta^-$ lub podobne formuły bez negacji są tautologiami. Dalej korzystamy z dwóch faktów: zastępując w formułach równoważnych (lub w tautologii) pewną zmienną zdaniową dowolną formuła otrzymujemy formuły równoważne (lub odpowiednio: otrzymujemy tautologię) oraz zastępując w dowolnej formule pewien jej fragment formułą równoważną otrzymujemy formułę równoważną. Na przykład, jeżeli w formule ϕ występuje nieparzysta liczba spójników negacji oraz spójniki te podzieliły się tak, że podane wyżej formuły są tautologiami, to następujące formuły są równoważne:

$$\phi = \psi(\neg\delta),\ \neg\psi^-(\neg\delta),\ \neg\psi^-(\delta^-) = \neg\phi^-.$$

Sformułowany wyżej lemat przydaje się innych przypadkach.

Zadania zgłoszone na ćwiczeniach

W poniższej tabeli proszę notować numery zadań przewidzianych na dane zajęcia, numery zgłoszonych zadań i liczbę otrzymanych punktów. Na następnych stronach są wydrukowane kupony zgłoszenia zadań, które należy wyciąć, wypełnić i przekazać prowadzącym na zajęciach. Pierwsze zajęcia nie są punktowane.

Zaj. 2	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 3	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 4	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 5	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 6	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 7	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 8	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 9	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 10	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 11	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 12	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 13	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 14	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zaj. 15	Data:														
Zadania:															
Punkty:															
												Suma:			

Zadania domowe

1.	Zadane dnia:		na dzień:		Punkty:	
2.	Zadane dnia:		na dzień:		Punkty:	

Kartkówki i inne zdarzenia

Dnia:		punkty:		Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:		Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:		Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:		Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:		Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:		Dnia:		punkty:	
Dnia:		punkty:		Dnia:		punkty:	

Ocena końcowa

Liczba punktów zdobytych w semestrze:	
Ocena wyliczona według tablicy C.1:	

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:														Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:														Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika		Imię i nazwisko:														Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami

Logika			Imię i nazwisko:													Sala nr:	
Zadanie:																Data:	
Punkty:																Suma:	

Wypełniać czytelnie i bez skreśleń drukowanymi literami