Logiki multimodalne - notatka

Łukasz Dąbek

5 stycznia 2014

1 System K

1.1 Składnia

Na początku przypomnimy sobie jak wygląda jedna z podstawowych logik modalnych, czyli system K. Gramatyka formuł jest następująca:

$$\phi ::= v \mid \phi_1 \to \phi_2 \mid \neg\phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \Box\phi,$$

gdzie przez v oznaczamy formuły atomowe z pewnego przeliczalnego zbioru. Alternatywę oraz drugi operator modalny wprowadzamy dla uproszczenia jako lukier syntaktyczny:

$$\begin{aligned} \phi_1 \vee \phi_2 &\equiv \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2) \\ \Diamond\phi &\equiv \neg\Box\neg\phi \end{aligned}$$

W dalszej części notatek operatory modalne zdefiniowane w gramatyce będziemy nazywać podstawowymi a dualne do nich (wprowadzone jako lukier syntaktyczny) będziemy nazywać operatorami wtórnymi.

Do standardowych praw rachunku zdań dodajemy aksjomat K:

$$\Box(p \to q) \to \Box p \to \Box q. \tag{1}$$

Powyższy system nazywamy systemem K.

1.2 Semantyka

Formułom systemu K nadamy semantykę wielu światów Kripkego. Niech W będzie niepustym zbiorem a R relacją binarną nad W. Krotkę (W, R) nazywamy ramką Kripkego. Jeżeli (W, R) jest ramką, to trójkę $(W, R, \Vdash)$ nazywamy modelem Kripkego, gdzie $\Vdash$ spełnia następujące własności dla każdego $w \in W$:

- $w \Vdash \phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \nVdash \neg\phi$,
- $w \Vdash \phi_1 \to \phi_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \nVdash \phi_1$ lub $w \Vdash \phi_2$,
- $w \Vdash \phi_1 \wedge \phi_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $w \Vdash \phi_1$ i $w \Vdash \phi_2$,

- $w \Vdash \Box\phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $u \in W$ z faktu $(w, u) \in R$ wynika, że $u \Vdash \phi$.

Zauważmy, że jeżeli określimy relację $\Vdash$ tylko dla formuł atomowych, to istnieje jednoznaczne rozszerzenie tej relacji do takiej, która spełnia powyższe warunki.

Kilka podstawowych pojęć dotyczących prawdziwości formuł:

- formuła ϕ jest *prawdziwa* w danym modelu, jeżeli dla każdego $w \in W$ mamy $w \Vdash \phi$,
- formuła ϕ jest *spełniona* w danym modelu, jeżeli istnieje takie $w \in W$, że zachodzi $w \Vdash \phi$,
- formuła ϕ jest *spełnialna*, jeżeli istnieje model w którym jest ona prawdziwa; jeżeli formuła nie jest spełnialna, to jest *sprzeczna*,
- formuła ϕ jest *tautologią*, jeżeli jest prawdziwa w każdym modelu.

1.3 Rozszerzenia

Podstawową logikę modalną możemy rozszerzać dodając kolejne aksjomaty lub nakładając pewne ograniczenia na model. Kilka przykładowych rozszerzeń:

- T: $\Box\phi \to \phi$, semantycznie: relacja R jest zwrotna,
- K4: $\Box\phi \to \Box\Box\phi$, semantycznie: relacja R jest przechodnia,
- S4: jednocześnie T i K4,
- S5: jednocześnie T i $\Diamond\phi \to \Box\Diamond\phi$, semantycznie: relacja R jest relacją równoważności.

Najprostszą logikę multimodalną uzyskamy przez umieszczenie w systemie K nie jednego, a dwóch podstawowych operatorów modalnych.

2 Logika temporalna

Logikę temporalną wprowadził w latach pięćdziesiątych Arthur Prior. W swoim systemie logicznym wyróżnił dwie podstawowe modalności:

- $\mathbf{G}P$ – zawsze będzie tak, że P,
- $\mathbf{H}P$ – zawsze było tak, że P.

oraz dwie wtórne:

- $\mathbf{P}P$ – kiedyś było tak, że P,
- $\mathbf{F}P$ – kiedyś będzie tak, że P.

Operatory **F** i **G** oraz **P** i **H** są parami operatorów dualnych. Dualności te możemy spróbować wyrazić w języku naturalnym aby uzasadnić je „zdrowym rozsądkiem". Następującą dualność:

$$\mathbf{F}P \equiv \neg\mathbf{G}\neg P$$

możemy zapisać jako „jeżeli P ma kiedyś zajść, to nie jest prawdą, że zawsze będzie tak, że P nie zachodzi". Podobne tłumaczenie ma druga para operatorów modalnych.

Minimalna logika temporalna składa się z następujących praw:

- $P \to \mathbf{HF}P$ – „co jest, zawsze było wiadomo, że będzie",
- $P \to \mathbf{GP}P$ – „co jest, zawsze będzie, że było",
- Instancje aksjomatu (1) dla operatorów **H** i **G**.

Z filozoficznego punktu widzenia ciekawym zagadnieniem jest wybranie odpowiednich aksjomatów. Pierwszy aksjomat z powyższej listy można traktować jako wyrażenie determinizmu świata, który opisujemy. Inne przykładowe aksjomaty wraz z opisem w języku naturalnym:

- $\mathbf{G}P \to \mathbf{F}P$ – „co zawsze będzie, wydarzy się",
- $\mathbf{F}P \to \mathbf{FF}P$ – „jeżeli będzie P, to będzie tak, że będzie P".

3 Przykład zastosowania - systemy współbieżne

3.1 Etykietowane systemy przejść

Trójkę $(S, \Lambda, \to)$ nazywamy etykietowanym systemem przejść. Zbiór S nazywamy zbiorem stanów, zbiór Λ nazywamy zbiorem etykiet a $\to$ jest podzbiorem $S \times \Lambda \times S$. Fakt $(a, \alpha, b) \in \to$ zapisujemy jako $a \overset{\alpha}{\to} b$.

Etykietowane systemy przejść rozważa się między innymi w teorii procesów współbieżnych. Zbiór S jest wtedy zbiorem możliwych stanów opisywanego systemu, Λ jest zbiorem obserwowalnych akcji (często zakłada się, że istnieje cicha akcja $\tau \in \Lambda$) a relacja $\to$ opisuje jak może ewoluować opisywany system.

Mówimy, że etykietowany system przejść ma własność skończonego obrazu jeżeli dla każdego stanu $a \in S$ i akcji $\alpha \in \Lambda$ zbiór takich $b \in S$, że $a \overset{\alpha}{\to} b$ jest skończony.

3.2 Równoważność procesów

W jaki sposób stwierdzić, że dwa procesy są równoważne? Uznanym sposobem jest sprawdzenie, czy etykietowane systemy przejść odpowiadające procesom są ze sobą w relacji silnej bisymulacji.

Po definicję silnej bisymulacji odsyłam do Wikipedii[1]. Zapis $a \leftrightarrow b$ oznacza, że a i b są ze sobą w relacji silnej bisymulacji.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Bisimulation

4 Logika Hennessy'ego-Millnera

Odpowiednio długo wpatrując się w definicje etykietowanego systemu przejść oraz ramki Kripkego dojdziemy do wniosku, że jeżeli Λ jest zbiorem jednoelementowym, to są to te same struktury. Rozszerzając definicje ramki i modelu Kripkego do wielu modalności uzyskamy pełną odpowiedniość.

Stwórzmy następującą logikę modalną: dla każdej akcji $\alpha \in \Lambda$ dodajmy operator modalny $[\alpha]$. Taką logikę nazywamy logiką Hennessy'ego-Millnera.

Logika ta ma ważny związek z równoważnością procesów. Wyraża to następujące twierdzenie:

Twierdzenie (Hennessy'ego-Millnera)**.**
Ustalmy etykietowany system przejść $(S, \Lambda, \to)$ *i niech* $a, b \in S$. *Wtedy:*

1. *Jeżeli* $a \leftrightarrow b$*, to dla każdej formuły* ϕ*,* $a \Vdash \phi$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $b \Vdash \phi$*.*

2. *Jeżeli etykietowany system przejść ma własność skończonego obrazu, to z faktu, że dla każdej formuły* ϕ*,* $a \Vdash \phi$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $b \Vdash \phi$ *wynika, że* $a \leftrightarrow b$*.*

Spełnialność formuł w logice Hennessy'ego-Millnera jest rozstrzygalna, ponieważ logika ta ma własność małego modelu (tzn. jeżeli formuła jest spełnialna, to istnieje model co najwyżej wykładniczo duży w stosunku do rozmiaru formuły w którym ta formuła jest prawdziwa).

4.1 Rozszerzenie semantyki Kripkego

Aby nadać semantykę logice Hennessy'ego-Millnera rozszerzymy semantykę wielu światów Kripkego na wiele modalności. Niech M będzie zbiorem podstawowych operatorów modalnych (w przypadku opisywanej logiki mamy $M = \{[\alpha] : \alpha \in \Lambda\}$). Zmianie ulega jedynie ostatnia własność nakładana na relację $\Vdash$. Musi być tak, że dla każdego $w \in W$ oraz $\Box \in M$ mamy:

- $w \Vdash \Box\phi$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $u \in W$ z faktu $(w, \Box, u) \in R$ wynika, że $u \Vdash \phi$.

5 Modalny rachunek μ

Logika Hennessy'ego-Millnera jest za słaba by wyrazić własności postępu (po skończonej liczbie kroków stanie się α) oraz bezpieczeństwa (nigdy nie stanie się α). Powodem tego jest prosta obserwacja: formuła w logice modalnej może mówić o etykietowanym systemie przejść / ramce Kripkego tylko w lokalnym otoczeniu bieżącego stanu. Od bieżącego stanu możemy odsunąć się tylko na tyle kroków, ile wynosi głębokość zagnieżdżenia operatorów modalnych.

Aby sprostać temu wyzwaniu możemy do logiki Hennessy'ego-Millnera dodać operator punktu stałego. Rozszerzamy składnię formuł:

$$\phi ::= \ldots \mid X \mid \mu X.\phi$$

Operator największego punktu stałego ν wprowadzamy jako lukier syntaktyczny:

$$\nu X.\phi \equiv \neg\nu X.\neg\phi$$

Semantykę rachunku μ można znaleźć w sieci (patrz bibliografia na końcu dokumentu). Poniżej kilka przykładów własności wyrażalnych w modalnym rachunku μ:

- $\nu X.\phi \wedge [\alpha]X$ - po każdym ciągu α-przejść spełnione jest ϕ (własność bezpieczeństwa),
- $\mu X.\phi \vee \langle\alpha\rangle X$ - istnieje skończony ciąg α-przejść do stanu w którym zachodzi ϕ (własność postępu).

Modalny rachunek μ ma własność małego modelu, zatem spełnialność jest rozstrzygalna (co ciekawe, nadal w EXPTIME).

6 Logika dynamiczna

Odsyłam do bardzo dobrych notatek warszawiaków: `http://wazniak.mimuw.edu.pl/index.php?title=Logika_dla_informatyk%C3%B3w/Zdaniowa_logika_dynamiczna`.

7 Bibliografia

- „Modal logic” (`https://en.wikipedia.org/wiki/Modal_logic`).
- „Modal μ-calculus” (`https://en.wikipedia.org/wiki/Modal_%CE%BC-calculus`).
- „Modal Logic – Stanford Encyclopedia of Philosophy” (`http://plato.stanford.edu/entries/logic-modal/`).
- Notatki do przedmiotu „Teoretyczne podstawy procesów współbieżnych” (`https://kno.ii.uni.wroc.pl/ii/course/view.php?id=243`).
- Arthur Prior „Time and Modality” – Oxford University Press, 1957.
- J. Benthem, J. Eijck, V. Stebletsova „Modal Logic, Transition Systems and Processes” – J. Logic Computat., Vol. 4 No. 5, pp. 1–50 1994.