Logiki modalne

notatki z seminarium

Piotr Polesiuk

1 Motywacja i historia

Logika modalna rozszerza logikę klasyczną o modalności takie jak ϕ *jest możliwe*, ϕ *jest konieczne*, *zawsze* ϕ, itp. i jak wiele innych logik, narodziła się w filozofii. Pierwsze próby nadania znaczenia możliwości i konieczności można odnaleźć u Arystotelesa, a podobne rozważania u innych późniejszych filozofów.

W czasach nowożytnych modalnści analizował Hugh MacColl w latach 1880 - 1906. Próbował on uchwycić różnicę między implikacją materialną $A \to B$ równoważną $\neg A \vee B$, a implikacją ścisłą $A \multimap B$ rozumianą jako „z A wynika B". Zauważył on, że obie implikacje mają różne zaprzeczenia: zaprzeczenie $\neg A \vee B$ oznacza $A \wedge \neg B$, natomiast zaprzeczenie $A \multimap B$ oznacza „z A nie wynika B", czyli jedynie **możliwość** tego, że $A \wedge \neg B$. MacColl wprowadził operator niemożliwości η, oraz operator pewności ε. Implikację ścisłą można wyrazić jako $(A \wedge \neg B)^{\eta}$ lub równoważnie $(\neg A \vee B)^{\varepsilon}$.

Podobne rozważania prowadził Clarence Irving Lewis, jednak on w odróżnieniu od poprzedników wprowadził formalny system dowodzenia. Najpierw sformalizował on implikację ścisłą (system S1), a następnie kilka logik modalnych zawierających operator możliwości (systemy S2-S5). W tych późniejszych systemach implikacja ścisła $A \multimap B$ była zdefiniowana jako $\neg\Diamond(A \wedge \neg B)$.

W latach $1931-32$ Gödel odkrył związek między logiką modalną a intuicjonistyczną, co pozwoliło na przeniesienie znanych faktów pomiędzy tymi logikami. Podobny związek będzie wyprowadzony w sekcji 4.

Więcej na temat historii i rozwoju logiki modalnej można znaleźć u Goldblatta [1].

2 Semantyka Kripkego

Ustalmy pewien zbiór zmiennych zdaniowych PROP. Elementy tego zbioru będziemy oznaczać literami p, q, r. Formuły logiki modalnej defniujemy gramatyką

$$\varphi, \psi \ ::= \ p \mid \top \mid \bot \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \vee \psi \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond\varphi \mid \Box\varphi.$$

Formułę $\Diamond\varphi$ czytamy jako „możliwe, że φ", lub „φ jest możliwe", natomiast formułę $\Box\varphi$ czytamy jako „φ jest konieczne".

Modelem Kripkego nazwiemy trójkę $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ gdzie W jest zbiorem (nazywanym **dziedziną** lub **zbiorem światów**), $R \subseteq W \times W$ jest relacją binarną, oraz $V\colon \mathrm{PROP} \to \mathcal{P}(W)$ nazywane **wartościowaniem** jest funkcją, co każdej zmiennej zdaniowej $p \in \mathrm{PROP}$ przypisuje podzbiór światów $V(p)$ w którym zmienna p jest prawdziwa. Graf $\langle W, R\rangle$ złożony z pierwszych dwóch składowych modelu $\mathfrak{M}$ nazywany jest **ramą**, lub **szkieletem**.

Pojęcie „φ jest **spełniona** (**prawdziwa**) w modelu $\mathfrak{M} = \langle W, R, V\rangle$ w świecie $w \in W$" zapisywane jako $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ definiujemy indukcyjnie w następujący sposób:

$$
\begin{array}{rll}
\mathfrak{M}, w \models p & \text{wtw} & w \in V(p) \\
\mathfrak{M}, w \models \top & & \text{zawsze} \\
\mathfrak{M}, w \models \bot & & \text{nigdy} \\
\mathfrak{M}, w \models \neg\varphi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w \not\models \varphi \\
\mathfrak{M}, w \models \varphi \wedge \psi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w \models \varphi \text{ oraz } \mathfrak{M}, w \models \psi \\
\mathfrak{M}, w \models \varphi \vee \psi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w \models \varphi \text{ lub } \mathfrak{M}, w \models \psi \\
\mathfrak{M}, w \models \varphi \to \psi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, w \not\models \varphi \text{ lub } \mathfrak{M}, w \models \psi \\
\mathfrak{M}, w \models \Diamond\varphi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, v \models \varphi \text{ dla pewnego } v \in W\text{, takiego, że } wRv \\
\mathfrak{M}, w \models \Box\varphi & \text{wtw} & \mathfrak{M}, v \models \varphi \text{ dla każdego } v \in W\text{, takiego, że } wRv.
\end{array}
$$

Ponadto powiemy, że formuła φ jest **wszędzie spełniona** lub **wszędzie prawdziwa** w modelu $\mathfrak{M}$ (co zapiszemy jako $\mathfrak{M} \models \varphi$) jeśli $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ dla każdego $w \in W$. Jeżeli dla każdego modelu $\mathfrak{M}$ zachodzi $\mathfrak{M} \models \varphi$, to formuła φ jest **poprawna** ($\models \varphi$).

2.1 Ograniczenia na ramy i różne logiki modalne

Zauważmy, że z powyższej defnicji wynika, że formuła

$$\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$$

jest prawdziwa. Logika z takim aksjomatem to logika K. Rozważa się również logiki bez powyższego aksjomatu, ale wymagają one ogólniejszej semantyki niż semantyka Kripkego (np. semantyka sąsiedztwa). Inne logiki możemy otrzymać nakładając pewne ograniczenia na ramy, które można wyrazić dodatkowymi aksjomatami. Np. ograniczenie się do ram zwrotnych można wyrazić aksjomatem $\Box\varphi \to \varphi$ (lub równoważnie $\varphi \to \Diamond\varphi$), bo jeśli $\Box\varphi$ jest spełnione w świecie w, to φ jest spełnione w każdym sąsiadującym świecie, więc w szczególności w świecie w (bo rama jest zwrotna). Natomiast jeśli rama nie jest zwrotna, to łatwo wskazać wartościowanie i świat w, takie że $\Box p \wedge \neg p$.

Poniższa tabela przedstawia rozszerzenia logiki K i pokazuje jakie rozszerzenia odpowiadają jakim ramom.

logika	dodatkowe aksjomaty	ograniczenie na ramy
K	*brak*	*brak*
T	$\Box\varphi \to \varphi$	R zwrotne
K4	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	R przechodnie
S4	$\mathrm{T} + \mathrm{K4}$	R jest praporządkiem
KB	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	R symetryczne
B	$\mathrm{T} + \mathrm{KB}$	R zwrotne i symetryczne
S5	$\mathrm{T} + \mathrm{K4} + \mathrm{KB}$	R jest relacją równoważności
D	$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$ lub $\Diamond\top$	R szeregowe (zawsze jest następnik)
KD4	$\mathrm{D} + \mathrm{K4}$	R szeregowe i przechodnie
GL	$\Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi + \mathrm{K4}$	R dobrze ufundowane

2.2 Logika modalna jako fragment logiki pierwszego rzędu

Model Kripkego $\mathfrak{M} = \langle W, R, V \rangle$ można traktować jako strukturę relacyjną o dziedzinie W i interpretacji, która symbolowi relacyjnemu R przypisuje relację R, a dla każdego $p \in \mathrm{PROP}$ symbolowi P_p przypisuje unarną relację $V(p)$. Formułę logiki modalnej φ można przetłumaczyć na formułę logiki pierwszego rzędu $\mathrm{ST}_x(\varphi)$ z jedną wolną zmienną x, w standardowy sposób:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ST}_x(p) &= P_p x \\
\mathrm{ST}_x(\bot) &= \bot \\
\mathrm{ST}_x(\top) &= \top \\
\mathrm{ST}_x(\neg\varphi) &= \neg\mathrm{ST}_x(\varphi) \\
\mathrm{ST}_x(\varphi \wedge \psi) &= \mathrm{ST}_x(\varphi) \wedge \mathrm{ST}_x(\psi) \\
\mathrm{ST}_x(\varphi \vee \psi) &= \mathrm{ST}_x(\varphi) \vee \mathrm{ST}_x(\psi) \\
\mathrm{ST}_x(\varphi \to \psi) &= \mathrm{ST}_x(\varphi) \to \mathrm{ST}_x(\psi) \\
\mathrm{ST}_x(\Diamond\phi) &= \exists y.Rxy \wedge \mathrm{ST}_y(\psi) \\
\mathrm{ST}_x(\Box\phi) &= \forall y.Rxy \to \mathrm{ST}_y(\psi)
\end{aligned}
$$

Twierdzenie 1. *Niech φ będzie formułą logiki modalnej, $\mathfrak{M}$ będzie modelem, a w niech będzie światem w $\mathfrak{M}$. Wówczas $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathfrak{M} \models \mathrm{ST}_x(\varphi)[x \leftarrow w]$.*

Logiki modalne stanowią bogaty fragment logiki pierwszego rzędu, w którym można wyrazić dość dużo (np. logiki deskryptywne świetnie nadają się do reprezentowania baz wiedzy), jednak złożoność obliczeniowa problemów decyzyjnych dla logik modalnych jest stosunkowo mała. Np. spełnialność w prezentowanej logice jest PSPACE-zupełna, natomiast spełnialność w logice pierwszego rzędu jest nierozstrzygalna. Fakt ten czyni logiki modalne niezwykle użytecznymi.

3 Elementy teorii dowodu

Zdefiniujemy rachunki sekwentów dla logik modalnych K, T, K4 oraz S4, rozszerzając znany nam rachunek sekwentów dla logiki klasycznej o dodatkowe reguły, które pozwalają przechodzić pomiędzy światami:

$$\frac{\Gamma^\sharp, \varphi \vdash \Sigma^\flat}{\Gamma, \Diamond\varphi \vdash \Sigma} \qquad \frac{\Gamma^\sharp \vdash \varphi, \Sigma^\flat}{\Gamma \vdash \Box\varphi, \Sigma}$$

Pierwsza reguła mówi: „jeśli wiemy, że $\Diamond\varphi$, to przejdźmy do świata w którym φ i kontynuujmy dowód", natomiast druga reguła mówi: „jeśli mamy pokazać, że $\Box\varphi$, to pokażmy, że φ w każdym możliwym świecie".

Operacje $\Gamma^\sharp$ oraz $\Sigma^\flat$ zmieniają założenia i cele przy przechodzeniu pomiędzy światami i zdefiniowane są osobno dla logik nie zawierających aksjomatu 4:

$$\begin{aligned} \Gamma^\sharp &= \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\} \\ \Sigma^\flat &= \{\varphi \mid \Diamond\varphi \in \Sigma\} \end{aligned}$$

i dla logik zawierających aksjomat 4 (ramy przechodnie):

$$\begin{aligned} \Gamma^\sharp &= \{\varphi, \Box\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\} \\ \Sigma^\flat &= \{\varphi, \Diamond\varphi \mid \Diamond\varphi \in \Sigma\} \end{aligned}$$

Dodatkowo dla logik zawierających aksjomat T (ramy zwrotne) dodajemy reguły:

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Box\varphi \vdash \Sigma} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi\Sigma}{\Gamma \vdash \Diamond\varphi, \Sigma}$$

Dla powyższych rachunków zachodzą twierdzenia o poprawności i zupełności. Stąd wniosek, że spełnialność tych logik jest rozstrzygalna, bo rachunek sekwentów można odczytać jako algorytm tableaux: niedeterministycznie wybieraj i stosuj reguły dopuki daje to coś nowego.

Więcej na temat teorii dowodu dla logiki modalnej można znaleźć w rozdziale 2 podręcznika [2].

4 Semantyka topologiczna i związek z logiką intuicjonistyczną

4.1 Podstawowe pojęcia z topologii

Niech X będzie zbiorem, a $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ rodziną zbiorów spełniającą następujące warunki:

(i) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$,

(ii) $\forall A, B \in \mathcal{T}. A \cap B \in \mathcal{T}$,

(iii) $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}. \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$.

Wówczas parę $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ nazwiemy **przestrzenią topologiczną**, zaś samo $\mathcal{T}$ nazwiemy **topologią** przestrzeni X. Elementy topologi $\mathcal{T}$ będziemy nazywać **zbiorami otwartymi**, a ich dopełnienia **zbiorami domkniętymi**.

Zbiory

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &= \bigcup\{B \subseteq X \mid B \subseteq A, B \in \mathcal{T}\} \\ \operatorname{cl} A &= \bigcap\{B \subseteq X \mid A \subseteq B, X \setminus B \in \mathcal{T}\} \end{aligned}$$

nazywamy odpowiednio **wnętrzem** i **domknięciem** zbioru A. Wnętrze jest największym zbiorem otwartym zawartym w A, natomiast domknięcie jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.

Przykład 1. Niech d będzie metryką (funkcją odległości) w przestrzeni $\mathbb{R}^n$. **Kulą otwartą** o środku x i promieniu r nazwiemy zbiór

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}.$$

Niech $\mathcal{B} = \{B_r(x) \mid x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ będzie zbiorem wszystkich kul otwartych $\mathbb{R}^n$ oraz niech $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}\}$. Wówczas $\langle \mathbb{R}^n, \mathcal{T} \rangle$ jest przestrzenią topologiczną. Topologia $\mathcal{T}$ jest zgodna z naszym intuicynym rozumieniem zbiorów otwartych w $\mathbb{R}^n$, tzn. zbiór A jest otwarty, jeśli dla każdy $x \in A$ zawiera się w A wraz z pewnym otoczeniem (istnieje $r > 0$ takie, że $B_r(x) \subseteq A$).

4.2 Algebry Heytinga i semantyka logiki intuicjonistycznej

Algebrą Heytinga nazwiemy krotkę $\mathcal{H} = \langle H, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ spełniającą następujące warunki:

(i) $\langle H, \sqsubseteq, \sqcup, \sqcap, 0, 1 \rangle$ jest kratą,

(ii) $a \Rightarrow b$ jest największym elementem zbioru $\{x \in H \mid a \sqcap x \sqsubseteq b\}$,

gdzie $a \sqsubseteq b$ definiujemy jako $a \sqcup b = b$.

4.2.1 Semantyka algebraiczna

Niech $\mathcal{H} = \langle H, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, 0, 1 \rangle$ będzie algebrą Heytinga, a $V \colon \mathrm{PROP} \to H$ wartościowaniem. Niech

$$\begin{aligned} [\![p]\!]_V &= V(p) \\ [\![\bot]\!]_V &= 0 \\ [\![\varphi \wedge \psi]\!]_V &= [\![\varphi]\!]_V \sqcap [\![\psi]\!]_V \\ [\![\varphi \vee \psi]\!]_V &= [\![\varphi]\!]_V \sqcup [\![\psi]\!]_V \\ [\![\varphi \to \psi]\!]_V &= [\![\varphi]\!]_V \Rightarrow [\![\psi]\!]_V \\ [\![\neg\varphi]\!]_V &= [\![\varphi]\!]_V \Rightarrow 0. \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

- $\mathcal{H}, V \models_I \varphi$ jeśli $[\![\varphi]\!]_V = 1$,
- $\mathcal{H} \models_I \varphi$ jeśli $\mathcal{H}, V \models_I \varphi$ dla każdego wartościowania V,
- $\models_I \varphi$ jeśli $\mathcal{H} \models_I \varphi$ dla każdej algebry Heytinga $\mathcal{H}$.

4.2.2 Semantyka topologiczna

Lemat 2. *Niech $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ będzie przestrzenią topologiczną. Wówczas $\langle \mathcal{T}, \cup, \cap, \Rightarrow, \varnothing, X \rangle$ gdzie $A \Rightarrow B = \mathrm{int}((X \setminus A) \cup B)$ jest algebrą Heytinga.*

Algebry Heytinga o których mowa w powyższym lemacie będziemy nazywać **topologicznymi algebrami Heytinga**.

Twierdzenie 3. *Każda algebra Heytinga jest izomorficzna z pewną podalgebrą pewnej topologicznej algebry Heytinga.*

Wniosek 4. *$\models_I \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy $\mathcal{H} \models_I \varphi$ dla każdej topologicznej algebry Heytinga.*

4.3 Topologiczna semantyka lokgiki modalnej

Niech $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ będzie przestrzenią topologiczną, a $V\colon \mathrm{PROP} \to \mathcal{P}(X)$ wartościowaniem. Niech

$$\begin{array}{rcl}
[\![p]\!]_V &=& V(p) \\
[\![\bot]\!]_V &=& \varnothing \\
[\![\top]\!]_V &=& X \\
[\![\neg\varphi]\!]_V &=& X \setminus [\![\varphi]\!]_V \\
[\![\varphi \wedge \psi]\!]_V &=& [\![\varphi]\!]_V \cap [\![\psi]\!]_V \\
[\![\varphi \vee \psi]\!]_V &=& [\![\varphi]\!]_V \cup [\![\psi]\!]_V \\
[\![\varphi \to \psi]\!]_V &=& (X \setminus [\![\varphi]\!]_V) \cup [\![\psi]\!]_V \\
[\![\Diamond\varphi]\!]_V &=& \mathrm{cl}[\![\varphi]\!]_V \\
[\![\Box\varphi]\!]_V &=& \mathrm{int}[\![\varphi]\!]_V .
\end{array}$$

Jeśli dla każdej przestrzeni topologicznej $\langle X, \mathcal{T} \rangle$ i dla każdego wartościowania V zachodzi $[\![\phi]\!]_V = X$ to powiemy, że formuła φ jest **poprawna** w semantyce topologicznej, co zapiszemy jako $\models \varphi$.

Powyższa semantyka jest w istocie semantyką logiki S4, o czym mówi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. *φ jest poprawne w semantyce Kripkego dla logiki* S4 *wtedy i tylko wtedy gdy $\models \varphi$.*

Szkic dowodu. $\Leftarrow$ Każda rama $\langle W, R \rangle$ modelu Kripkego będąca praporządkiem może być rozpatrywana jako przestrzeń topologiczna $\langle W, \mathcal{T} \rangle$, gdzie $\mathcal{T}$ jest zbiorem podzbiorów dziedziny zamkniętych na branie R-następnika. Dla takiej topologii $[\![\psi]\!]_V$ jest zbiorem światów w dla których $\langle W, R, V \rangle, w \models \psi$.

$\Rightarrow$ Wystarczy sprawdzić, że aksjomaty logiki S4 są spełnione w semantyce topologicznej.

$\square$

Patrząc na definicję semantyki topologicznej widzimy, że spójniki logiki modalnej odpowiadają jeden do jednego operacjom na zbiorach w przestrzeni topologicznej. Pamiętając jak wyglądały topologiczne algebry Heytinga, można przetłumaczyć formuły logiki intuicjonistycznej na formuły logiki modalnej:

$$\begin{array}{rcl} p^\bullet & = & \Box p \\ \bot^\bullet & = & \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\bullet & = & \varphi^\bullet \wedge \psi^\bullet \\ (\varphi \vee \psi)^\bullet & = & \varphi^\bullet \vee \psi^\bullet \\ (\varphi \to \psi)^\bullet & = & \Box(\varphi^\bullet \to \psi^\bullet) \\ (\neg\varphi)^\bullet & = & \Box\neg\varphi^\bullet \end{array}$$

Twierdzenie 6. *Dla każdej formuły φ logiki intuicjonistycznej $\models_I \varphi$ wtedy i tylko wtedy gdy $\models \varphi^\bullet$.*

Literatura

[1] Robert Goldblatt. Mathematical modal logic: A view of its evolution. *J. of Applied Logic*, 1(5-6):309–392, October 2003.

[2] Patrick Blackburn, Johan F. A. K. van Benthem, and Frank Wolter. *Handbook of Modal Logic, Volume 3 (Studies in Logic and Practical Reasoning)*. Elsevier Science Inc., New York, NY, USA, 2006.

[3] Morten Heine B. Sørensen and Pawel Urzyczyn. Lectures on the curry-howard isomorphism, 1998.