Logika intuicjonistyczna

Łukasz Tomaszewski

Instytut Informatyki UWr

10 października 2013

Prawda a dowód

- W rozwinięciu dziesiętnym liczby π występuje siedem siódemek pod rząd.
- Istnieją takie liczby niewymierne x i y, że x^y jest liczbą wymierną.

Intuicjonistyczny rachunek zdań

Definition

Załóżmy, że PV jest nieskończonym zbiorem zmiennych zdaniowych. Zbiór formuł Φ definiujemy jako najmniejszy zbiór spełniający następujące warunki:

- Każda zmienna zdaniowa oraz stała $\perp$ należą do Φ;
- Jeżeli $\varphi, \psi \in \Phi$, to $(\varphi \to \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \wedge \psi) \in \Phi$.

Dedukcja naturalna

Aby sformalizować logikę intuicjonistyczną definiujemy system dowodzenia zwany dedukcją naturalną (Gentzen).

Definition

- Sąd w dedukcji naturalnej jest parą, zapisaną w postaci $\Gamma \vdash \varphi$ (czyt. Γ dowodzi φ), składającą się ze skończonego zbioru fromuł Γ i formuły φ.
- Używamy następujących skrótów notacyjnych:
  - $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi$ zamiast $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \psi$
  - Γ, Δ zamiast $\Gamma \cup \Delta$
  - $\vdash \varphi$ zamiast $\emptyset \vdash \varphi$

Dedukcja naturalna

Definition

- Formalnym dowodem lub wyprowadzeniem $\Gamma \vdash \varphi$ jest skończone drzewo sądu, które spełnia następujące warunki:
  - etykietą korzenia jest $\Gamma \vdash \varphi$
  - wszystkie liście są aksjomatami
  - w każdym z wierzchołków występuje jedna z reguł dedukcji naturalnej
- Jeżeli $\vdash \varphi$, to mówimy że φ jest twierdzeniem.

Reguły naturalnej dedukcji

- $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (Ax)
- $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}$ $(\to \mathsf{I})$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}$ $(\to \mathsf{E})$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}$ $(\wedge\ \mathsf{I})$

Reguły naturalnej dedukcji

- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\wedge E) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\wedge E)$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee I) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi}\ (\vee I)$
- $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \upsilon \quad \Gamma, \psi \vdash \upsilon \quad \Gamma \vdash \varphi \vee \psi}{\Gamma \vdash \upsilon}\ (\vee E)$
- $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \varphi}\ (\bot E)$

Rachunek sekwentów

Innym systemem dowodzenia dla logiki intuicjonistycznej jest rachunek sekwentów (Gentzen 1935).

Definition

Sekwentem nazywamy parę $\Gamma \vdash \Delta$ (lub $\Gamma \Rightarrow \Delta$), gdzie Γ jest skończonym ciągiem formuł, a Δ zawiera co najwyżej jedną formułę.

Reguły rachunku sekwentów

- $\varphi \vdash \varphi$ (Ax)
- $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \varphi, \Pi \vdash \Delta}{\Gamma, \Pi \vdash \Delta}$ (Cut)
- $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta}{\varphi, \Gamma \vdash \Delta}$ (LW) [weakening]
- $\dfrac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \Delta}$ (RW) [weakening]

Reguły rachunku sekwentów

- $\dfrac{\Gamma,\varphi,\psi,\Gamma' \vdash \Delta}{\Gamma,\psi,\varphi,\Gamma' \vdash \Delta}$ (LX) [exchange]
- $\dfrac{\Gamma,\varphi,\varphi \vdash \Delta}{\Gamma,\varphi \vdash \Delta}$ (LC) [contraction]
- $\dfrac{\Gamma,\varphi \vdash \Delta}{\Gamma,\varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$ (L$\wedge$)
- $\dfrac{\Gamma,\psi \vdash \Delta}{\Gamma,\varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$ (L$\wedge$)

Reguły rachunku sekwentów

- $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \ (\mathrm{R}\wedge)$$
- $$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta} \ (\mathrm{L}\vee)$$
- $$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \ (\mathrm{R}\vee)$$
- $$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi} \ (\mathrm{R}\vee)$$

Reguły rachunku sekwentów

- $\dfrac{\Gamma,\varphi\vdash\psi}{\Gamma\vdash\varphi\rightarrow\psi}$ (R$\rightarrow$)

- $\dfrac{\Gamma\vdash\varphi \qquad \Gamma,\psi\vdash\Delta}{\Gamma,\varphi\rightarrow\psi\vdash\Delta}$ (L$\rightarrow$)

- $\bot\vdash$ (L $\bot$)

Krata

Definition

Kratą nazywamy częściowy porządek $\langle A, \leqslant \rangle$, jeśli każdy dwuelementowy podzbiór $\{a, b\}$ zbioru A ma kres górny i kres dolny w A. Kres górny zbioru $\{a, b\}$ będziemy oznaczać $a \sqcup b$, a kres dolny $a \sqcap b$, natomiast elemet największy i najmniejszy (jeżeli istnieją) kraty A odpowiednio 1 i 0.

Krata rozdzielcza i dopełnienie

Definition

- Krata A jest **rozdzielcza** (*distributive*) wtedy i tylko wtedy, gdy w A spełnione są następujące równości:
  1. $(a \sqcup b) \sqcap c = (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c)$;
  2. $(a \sqcap b) \sqcup c = (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c)$.
- Załóżmy, że krata A ma największy element 1 i najmniejszy element 0. Mówimy, że b jest **dopełnieniem** (*complement*) a wtedy i tylko wtedy, gdy $a \sqcup b = 1$ i $a \sqcap b = 0$.

Algebra Bool'a

Definition

Algebra Bool'a jest to krata rozdzielcza B posiadająca najmniejszy i największy element i taka, że każdy elemet a należący do B ma dopełnienie (oznaczane $-a$).

Algebra Bool'a jest często zapisywana w postaci $B = \langle B, \sqcup, \sqcap, -, 0, 1 \rangle$.

Example

- Zbiór zawierający dwa elementy: prawdę i fałsz .
- Dowolny zbiór potęgowy.

Wartościowanie w algebrze Bool'a

Definition

Wartościowaniem w algebrze Bool'a $B = \langle B, \sqcup, \sqcap, -, 0, 1 \rangle$ nazywamy odwzorowanie v ze zbioru PV w zbiór B. Wartość (w zbiorze B) formuły φ przy wartościowaniu v definiujemy indukcyjnie:

- $[|p|]_v = v(p)$ dla $p \in PV$
- $[|\bot|]_v = 0$
- $[|\varphi \vee \psi|]_v = [|\varphi|]_v \sqcup [|\psi|]_v$
- $[|\varphi \wedge \psi|]_v = [|\varphi|]_v \sqcap [|\psi|]_v$
- $[|\varphi \to \psi|]_v = -[|\varphi|]_v \sqcup [|\psi|]_v$

Zapisujemy $B, v \models \varphi$ kiedy $[|\varphi|]_v = 1$ oraz $B \models \varphi$ gdy $B, v \models \varphi$ dla każdego v.

Algebry Heyting'a

Definition

Element c w kracie jest zwany relatywnym pseudo-dopełnieniem (*relative pseudo-complement*) a w zależności do b wtedy i tylko wtedy, gdy c jest największym elementem takim, że $a \sqcap c \leqslant b$. Jeżeli relatywne pseudo-domknięcie istnieje jest oznaczane $a \Rightarrow b$ oraz definiujemy $-a$ następująco: $-a = a \Rightarrow 0$.

Definition

Algebra Heyting'a jest to krata rozdzielcza H posiadająca najmniejszy i największy element i taka, że dla każdych $a, b \in H$ istnieje relatywne pseudo-dopełnienie $a \Rightarrow b$.

Przykładowe algebry Heytinga'a

Example

- Każda algebra Bool'a, w której $a \Rightarrow b$ zdefiniujemy jako $-a \sqcup b$.
- Każda skończona krata rozdzielcza.
- Algebra Lindenbaum'a $\mathcal{L}_\Gamma$, którą definiujemy: $\mathcal{L}_\Gamma = \Phi/_\sim$, gdzie Φ oznacza zbiór wszystkich formuł, a $\varphi \sim_\Gamma \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ i $\Gamma \vdash \psi \to \varphi$. Relację $\leqslant_\Gamma$ definiujemy następująco: $[\varphi]_\sim \leqslant_\Gamma [\psi]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

Wartościowanie w algebrze Heyting'a

Definition

Wartościowaniem w algebrze Heyting'a $H = \langle H, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, -, 0, 1 \rangle$ nazywamy odwzorowanie v ze zbioru PV w zbiór H. Wartość (w zbiorze H) formuły φ przy wartościowaniu v definiujemy indukcyjnie:

- $[|p|]_v = v(p)$ dla $p \in PV$
- $[|\bot|]_v = 0$
- $[|\varphi \vee \psi|]_v = [|\varphi|]_v \sqcup [|\psi|]_v$
- $[|\varphi \wedge \psi|]_v = [|\varphi|]_v \sqcap [|\psi|]_v$
- $[|\varphi \to \psi|]_v = [|\varphi|]_v \Rightarrow [|\psi|]_v$

Twierdzenie o zupełności

Theorem

Następujące stwierdzenia są równoważne:

- $\Gamma \vdash \varphi$
- $\Gamma \models \varphi$

Model Kripke'a

Definition

Model Kripke'a to trójka postaci $C = \langle C, \leqslant, \Vdash \rangle$, gdzie C jest niepustym zbiorem, którego elementy nazywamy stanami (states), $\leqslant$ jest częściowym porządkiem na C, a $\Vdash$ jest relacją pomiędzy elementami C i zmiennymi zdaniowymi. Relacja $\Vdash$ musi spełniać następujący warunek monotoniczności: Jeżeli $c \leqslant c'$ i $c \Vdash p$ to $c' \Vdash p$

Model Kripke'a

Definition

Jeżeli $C = \langle C, \leqslant, \Vdash \rangle$ jest modelem Kripke'a, to

- $c \Vdash \varphi \vee \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c \Vdash \varphi$ lub $c \Vdash \psi$
- $c \Vdash \varphi \wedge \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c \Vdash \varphi$ i $c \Vdash \psi$
- $c \Vdash \varphi \to \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $c' \Vdash \psi$ dla każdego $c' \geqslant c$, dla którego zachodzi $c' \Vdash \varphi$
- $c \Vdash \bot$ nie zachodzi

Przykładowy model Kripke'a

Example

Niech $C = \{c, c', c''\}$, gdzie $c \leqslant c', c''$ oraz c', c'' są nieporównywalne. Zachodzi również $c' \Vdash p$ i $c'' \Vdash q$ oraz $c \nVdash p, q$. W tym modelu mamy $c \nVdash p \vee \neg p$.

Twierdzenie o zupełności w modelu Kripke'a

Theorem

Następujące stwierdzenia są równoważne:

- $\Gamma \vdash \varphi$
- $\Gamma \models \varphi$
- $\Gamma \Vdash \varphi$

Izomorfizm Curry'ego-Howard'a

Definition

1. Jeżeli $\Gamma \vdash M : \varphi$ w $\lambda_{\rightarrow}$, to $rg(\Gamma) \vdash \varphi$ w $IPC(\rightarrow)$.
2. Jeżeli $\Delta \vdash \varphi$ w $IPC(\rightarrow)$, to $\Gamma \vdash M : \varphi$ w $\lambda_{\rightarrow}$ dla pewnego M i Γ, gdzie $rg(\Gamma) = \Delta$.

$rg(\Gamma) = \{\tau : (x, \tau) \in \Gamma\}$
IPC - intuicjonistyczny rachunek zdań (intuitionistic propositional calculus)

Bibliografia

1. Lectures on the Curry-Howard Isomorphism. Morten Heine Sorensen, Paweł Urzyczyn.
2. www.filozof.uni.lodz.pl/prac/ai/Gentzen.pdf
3. http://plato.stanford.edu/entries/logic-intuitionistic/