

Lista 4

Antoni Kościelski

1 Zadanie 2

1.1 Specyfikacja

Dane: dodatnie liczby naturalne M i N takie, że $M \leq N$.

Wynik: największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność danych liczb i nieskracalna postać ułamka M/N .

1.2 Szkic programu

Program będzie wykorzystywał niestandardowy algorytm.

```
int A[3], B[3];
A[0]=N; B[0]=M;
A[1]=1; B[1]=0;
A[2]=0; B[2]=1; /*(1)*/
while (B[0]) { /*(2)*/
    i=A[0]/B[0];
    p=B[0]; B[0]=A[0]%B[0]; A[0]=p;
    p=B[1]; B[1]=A[1]-i*B[1]; A[1]=p;
    p=B[2]; B[2]=A[2]-i*B[2]; A[2]=p;
    /*(3)*/ }
```

Aby zrozumieć działanie programu trzeba sprawdzić, że w zaznaczonych napisami (1), (2) i (3) miejscach programu prawdziwe są następujące własności:

$$A[0] \geq B[0],$$

$$d \text{ dzieli } A[0], B[0] \Leftrightarrow d \text{ dzieli } N, M$$

(dla dowolnej liczby naturalnej d),

$$A[0] = A[1] * N + A[2] * M,$$

$$B[0] = B[1] * N + B[2] * M$$

oraz

$$A[1] * B[2] - A[2] * B[1] = 1.$$

Wszystkie wymienione własności stają się prawdziwe po wykonaniu początkowych podstawień, w miejscu (1). Wobec tego, są także prawdziwe, gdy program po raz pierwszy znajdzie się w miejscu (2). Dalej trzeba sprawdzić, że instrukcje wykonywane w pętli

zachowują te własności, są więc one prawdziwe także w miejscu (3). Dzielenie w pętli jest wykonalne, ponieważ warunkiem wejścia do pętli jest to, by $B[0]$ było różne od 0. Oznacza to, że wszystkie wymienione własności są prawdziwe także po wykonaniu całego programu. Wtedy dodatkowo będzie spełniona równość $B[0] = 0$.

Dalej przyjmijmy, że w podanych wzorach są podane końcowe wartości wskazanych zmiennych, ustalone po zakończeniu działania programu. Ponieważ wtedy $B[0] = 0$, więc druga własność stwierdza, że dzielniki liczby $A[0]$ to dokładnie wspólne dzielniki liczb M i N . Stąd wynika, że $A[0]$ jest największym wspólnym dzielnikiem M i N . Z ostatniej równości wynika, że każda para czynników rozmieszczona po obu stronach znaku odejmowania (np. $B[1]$ i $B[2]$ lub $A[1]$ i $B[1]$) składa się z liczb względnie pierwszych (każdy ich wspólny dzielnik dzieli także 1). Z ostatniej równości otrzymujemy, że

$$B[1] * N = -B[2] * M,$$

a więc liczba po obu stronach tej równości jest wspólną wielokrotnością liczb M i N . Jest to najmniejsza wspólna wielokrotność, ponieważ liczby $B[1]$ i $B[2]$ są względnie pierwsze. Zachodzi też równość

$$\frac{M}{N} = -\frac{B[1]}{B[2]}.$$

Mamy więc przedstawienie liczby M/N w postaci nieskracalnego ułamka (choć jedna z występujących w tym przedstawieniu liczb jest ujemna).

2 Zadania 5 i 6

2.1 Specyfikacja

Dane: dodatnia liczba naturalna M .

Wynik: informacja, czy najkrótsze przedstawienie dziesiętne liczby M jest palindromem.

2.2 Szkic programu

Program będzie wykorzystywał niestandardowy algorytm.

```
m=M;
n=0; /*(1)*/
while (m>n) { /*(2)*/
    c=m/10;
    m=m%10;
    n=10*n+c;
    /*(3)*/ }
```

Jeżeli po zakończeniu obliczeń okaże się, że $m = n$, to dana liczba ma przedstawienie dziesiętne będące palindromem.