1 Składnia języka REC

N – zbiór liczb całkowitych (utożsamiamy liczby i ich przedstawienia),

Var – zbiór zmiennych (elementy tego zbioru odgrywają rolę nazw zmiennych),

Fvar – zbiór zmiennych funkcyjnych, każdemu elementowi tego zbioru jest przypisana arność,

Exp – zbiór wyrażeń języka **REC**.

Konwencje notacyjne:

$n, m, p \in \mathbf{N}$,

$x, y \in \mathbf{Var}$,

$f, g \in \mathbf{Fvar}$,

$t, t_0, t_1, t_2, d_1, d_2 \in \mathbf{Exp}$

$$t ::= n \mid x \mid t_0 + t_1 \mid t_0 - t_1 \mid t_0 * t_1 \mid \ \mathbf{if}\ t_0\ \mathbf{then}\ t_1\ \mathbf{else}\ t_2 \mid f(t_1, \ldots, t_a)$$

(w poprzedniej linijce a oznacza arność symbolu f)

2 Semantyki operacyjne języka REC

Semantyka operacyjna języka **REC** jest definiowana dla danej definicji (deklaracji) d. Definicją (lub deklaracją) nazywamy skończony zbiór napisów

$$f_i(x_1, \ldots, x_{a_i}) = d_i \tag{1}$$

dla $i = 1, \ldots, n$, spełniający dla wszystkich $i = 1, \ldots, n$ następujące warunki:

1. jeżeli x występuje w d_i, to x jest jedną ze zmiennych $x_1, \ldots, x_{a_i}$,
2. jeżeli f występuje w d_i, to f jest jedną ze zmiennych funkcyjnych $f_1, \ldots, f_n$.

Niech **Cexp** oznacza zbiór wyrażeń należących do **Exp** i nie zawierających zmiennych (z **Var**). Rozważamy dwie semantyki operacyjne języka **REC**: typu call-by-value i typu call-by-name. Będą to relacje w zbiorze $\mathbf{Cexp} \times \mathbf{N}$. Relacje te będą oznaczane odpowiednio symbolami $\to_{va}^{d}$ i $\to_{na}^{d}$. Część reguł w tych semantykach jest identyczna. reguły te zapiszemy używając $\to$ jako symbolu relacji. Tak więc $\to$ można zastąpić zarówno przez $\to_{va}^{d}$ jak i $\to_{na}^{d}$.

2.1 Reguły wspólne dla obu semantyk

$$\frac{}{n \to n}$$

$$\frac{t_0 \to n_0, t_1 \to n_1}{t_0 + t_1 \to n}$$ gdzie n jest sumą n_0 i n_1,

$$\frac{t_0 \to n_0, t_1 \to n_1}{t_0 - t_1 \to n}$$ gdzie n jest różnicą n_0 i n_1,

$$\frac{t_0 \to n_0, t_1 \to n_1}{t_0 * t_1 \to n}$$ gdzie n jest iloczynem n_0 i n_1,

$$\frac{t_0 \to 0, t_1 \to n}{\textbf{if } t_0 \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2 \to n}$$

$$\frac{t_0 \to n_0, t_2 \to n}{\textbf{if } t_0 \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2 \to n}$$ w przypadku, gdy n_0 jest różne od 0.

2.2 Pozostałe reguły dla semantyki typu call-by-value

$$\frac{t_1 \to^d_{va} n_1, \ldots, t_{a_i} \to^d_{va} n_{a_i}, d_i[n_1/x_1, \ldots, n_{a_i}/x_{a_i}] \to^d_{va} n}{f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}) \to^d_{va} n}$$

2.3 Pozostałe reguły dla semantyki typu call-by-name

$$\frac{d_i[t_1/x_1, \ldots, t_{a_i}/x_{a_i}] \to^d_{na} n}{f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}) \to^d_{na} n}$$

3 Semantyki denotacyjne języka REC

Zbiór $\mathbf{N}$ uważamy za zbiór uporządkowany, porządkiem w tym zbiorze jest relacja równości. Niech $\mathbf{N}_\perp$ oznacza kopię zbioru $\mathbf{N}$ uzupełnioną o element najmniejszy $\perp$. Przyjmujemy, że mamy funkcję

$$\lfloor . \rfloor : \mathbf{N} \to \mathbf{N}_\perp$$

przyporządkowującą liczbie n odpowiadający tej liczbie element przestrzeni $\mathbf{N}_\perp$ (wobec tego element ten możemy oznaczać symbolem $\lfloor n \rfloor$).

Bedziemy definiować dwie semantyki denotacyjne **REC**: typu call-by-value i typu call-by-name. Semantyki te będą definiowane dla ustalonego skończonego zbioru zmiennych funkcyjnych $f_1, \ldots, f_n$ o arnościach równych odpowiednio $a_1, \ldots, a_n$. Zdefiniujmy zbiory wartościowań zmiennych z **Var** dla obu typów semantyk:

$$\mathbf{Env}_{va} = [\mathbf{Var} \to \mathbf{N}]$$

oraz

$$\mathbf{Env}_{na} = [\mathbf{Var} \to \mathbf{N}_\perp],$$

a także zbiory wartościowań zmiennych funkcyjnych $f_1, \ldots, f_n$:

$$\mathbf{Fenv}_{va} = [\mathbf{N}^{a_1} \to \mathbf{N}_\perp] \times \ldots \times [\mathbf{N}^{a_n} \to \mathbf{N}_\perp]$$

oraz

$$\mathbf{Fenv}_{na} = [\mathbf{N}_\perp^{a_1} \to \mathbf{N}_\perp] \times \ldots \times [\mathbf{N}_\perp^{a_n} \to \mathbf{N}_\perp].$$

Przyjmujemy, że $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in \mathbf{Fenv}_{va}$ oraz $\rho \in \mathbf{Env}_{va}$. Przypuśćmy, że mamy funkcję $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$. Dla takich funkcji definiujemy funkcję $f_\perp : \mathbf{N}_\perp^2 \to \mathbf{N}_\perp$ przyjmując, że dla $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$ zachodzą następujące wzory

$$f_\perp(\lfloor m_1 \rfloor, \lfloor m_2 \rfloor) = \lfloor f(m_1, m_2) \rfloor$$

oraz

$$f_\perp(\lfloor m_1 \rfloor, \perp) = f_\perp(\perp, \lfloor m_2 \rfloor) = f_\perp(\perp, \perp) = \perp.$$

Podobną operację definiujemy dla funkcji $f : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}_\perp$. Wtedy funkcję $f_\perp : \mathbf{N}_\perp^2 \to \mathbf{N}_\perp$ przyjmując, że dla $m_1, m_2 \in \mathbf{N}$ zachodzą następujące wzory

$$f_\perp(\lfloor m_1 \rfloor, \lfloor m_2 \rfloor) = f(m_1, m_2)$$

oraz

$$f_\perp(\lfloor m_1 \rfloor, \perp) = f_\perp(\perp, \lfloor m_2 \rfloor) = f_\perp(\perp, \perp) = \perp.$$

Analogiczne operacje definiujemy dla funkcji o innej liczbie zmiennych. Niech $Cond : \mathbf{N}_\perp^3 \to \mathbf{N}_\perp$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$Cond(n_0, n_1, n_2) = \begin{cases} \perp & \text{jeżeli } n_0 = \perp, \\ n_1 & \text{jeżeli } n_0 = 0, \\ n_2 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Przez indukcję ze względu na budowę elementów zbioru **Exp** definiujemy dwie funkcje

$$[\![\cdot]\!]_{va} : \mathbf{Exp} \to (\mathbf{Fenv}_{va} \to (\mathbf{Env}_{va} \to \mathbf{N}_\perp))$$

$$[\![\cdot]\!]_{na} : \mathbf{Exp} \to (\mathbf{Fenv}_{na} \to (\mathbf{Env}_{na} \to \mathbf{N}_\perp))$$

przypisujące wyrażeniu jego wartość przy wskazanych wartościowaniach.

3.1 Sematyka denotacyjna typu call-by-value

$$[\![t]\!]_{va} = \begin{cases} \lambda\vec{\varphi}\lambda\rho.\lfloor n \rfloor & \text{jeżeli } t = n, \\ \lambda\vec{\varphi}\lambda\rho.\lfloor \rho(x) \rfloor & \text{jeżeli } t = x, \\ [\![t_0]\!]_{va} +_\perp [\![t_1]\!]_{va} & \text{jeżeli } t = t_0 + t_1, \\ [\![t_0]\!]_{va} -_\perp [\![t_1]\!]_{va} & \text{jeżeli } t = t_0 - t_1, \\ [\![t_0]\!]_{va} *_\perp [\![t_1]\!]_{va} & \text{jeżeli } t = t_0 * t_1, \\ Cond([\![t_0]\!]_{va}, [\![t_1]\!]_{va}, [\![t_2]\!]_{va}) & \text{jeżeli } t = \textbf{ if } t_0 \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2, \\ (\varphi_i)_\perp([\![t_1]\!]_{va}, \ldots, [\![t_{a_i}]\!]_{va}) & \text{jeżeli } t = f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}). \end{cases}$$

Przypuśćmy, że mamy daną definicję (deklarację) d (patrz (1)). Definiujemy funkcję

$$F_{va}^d : \mathbf{Fenv}_{va} \to \mathbf{Fenv}_{va}$$

przyjmując, że

$$F_{va}^d(\vec{\varphi}) = (\lambda\vec{m}.[\![d_1]\!]_{va}\vec{\varphi}\rho[\vec{m}/\vec{x}], \ldots, \lambda\vec{m}.[\![d_n]\!]_{va}\vec{\varphi}\rho[\vec{m}/\vec{x}])$$

(oczywiście, długości ciągów $\vec{m}$ i $\vec{x}$ zależą od symbolu f_i definiowanego termem d_i).

Dla definicji d i dla termu stałego $t \in$ **Cexp** definiujemy wartość tego termu (w przeciwieństwie do wartości przy danych wartościowaniach) przyjmując, że jest to

$$[\![t]\!]_{va} \mathit{fix}(F^d_{va})\rho,$$

gdzie ρ jest dowolnym wartościowaniem (nietrudno zauważyć, że dla $t \in$ **Cexp** podane wyrażenie nie zależy od wartościowania ρ).

3.2 Sematyka denotacyjna typu call-by-name

$$[\![t]\!]_{na} = \begin{cases} \lambda\vec{\varphi}\lambda\rho.n & \text{jeżeli } t = n, \\ \lambda\vec{\varphi}\lambda\rho.\rho(x) & \text{jeżeli } t = x, \\ [\![t_0]\!]_{na} +_\perp [\![t_1]\!]_{na} & \text{jeżeli } t = t_0 + t_1, \\ [\![t_0]\!]_{na} -_\perp [\![t_1]\!]_{na} & \text{jeżeli } t = t_0 - t_1, \\ [\![t_0]\!]_{na} *_\perp [\![t_1]\!]_{na} & \text{jeżeli } t = t_0 * t_1, \\ \mathit{Cond}([\![t_0]\!]_{na}, [\![t_1]\!]_{na}, [\![t_2]\!]_{na}) & \text{jeżeli } t = \textbf{ if } t_0 \textbf{ then } t_1 \textbf{ else } t_2, \\ \varphi_i([\![t_1]\!]_{na}, \ldots, [\![t_{a_i}]\!]_{na}) & \text{jeżeli } t = f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}). \end{cases}$$

Dla definicji (deklarację) d (patrz (1)) definiujemy funkcję

$$F^d_{na} : \mathbf{Fenv}_{na} \to \mathbf{Fenv}_{na}$$

przyjmując, że

$$F^d_{na}(\vec{\varphi}) = (\lambda\vec{m}.[\![d_1]\!]_{na}\vec{\varphi}\rho[\vec{m}/\vec{x}], \ldots, \lambda\vec{m}.[\![d_n]\!]_{na}\vec{\varphi}\rho[\vec{m}/\vec{x}])$$

(oczywiście, długości ciągów $\vec{m}$ i $\vec{x}$ zależą od symbolu f_i definiowanego termem d_i).

Dla definicji d i dla termu stałego $t \in$ **Cexp** definiujemy wartość tego termu (w przeciwieństwie do wartości przy danych wartościowaniach) przyjmując, że jest to

$$[\![t]\!]_{va} \mathit{fix}(F^d_{na})\rho,$$

gdzie ρ jest dowolnym wartościowaniem (nietrudno zauważyć, że dla $t \in$ **Cexp** podane wyrażenie nie zależy od wartościowania ρ).