Lista zadań z semantyki języków programowania

1. Znajdź zbiór $\{(\sigma, \sigma') \in \Sigma^2 : (\mathbf{while\ true\ do\ skip}, \sigma) \to \sigma'\}$.

2. Napisz w języku **IMP** program obliczający $n!$ i udowodnij jego poprawność posługując się podaną na wykładzie semantyką (operacyjną) tego języka.

3. Przypuśćmy, że mamy dane zbiory $X, Y, A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ oraz funkcje $f : X \to X$, $g : Y \to Y$, $F : X \times Y \to X$ i $G : X \times Y \to Y$. Będziemy rozważać pary zbiorów (X', Y') takie, że

   (a) $A \subseteq X'$ i $B \subseteq Y'$,

   (b) $f(x) \in X'$ dla dowolnego $x \in X'$,

   (c) $g(y) \in Y'$ dla dowolnego $y \in Y'$,

   (d) $F(x, y) \in X'$ i $G(x, y) \in Y'$ dla dowolnych elementów $x \in X'$ i $y \in Y'$.

   Pary zbiorów porównujemy za pomocą relacji zdefiniowanej wzorem

   $$(X_1, Y_1) \leq (X_2, Y_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \wedge Y_1 \subseteq Y_2.$$

   Udowodnij, że istnieje najmniejsza w podanym sensie para zbiorów spełniająca wymienione warunki. Niech (X_0, Y_0) będzie taką parą. Udowodnij następujący schemat indukcji: jeżeli każdy element zbioru A ma własność φ, jeżeli dla dowolnego $x \in X_0$, z tego, że x ma własność φ wynika, że własność φ ma $f(x)$, oraz jeżeli dla dowolnych $x \in X_0$ i $y \in Y_0$, z tego, że x ma własność φ wynika, że własność φ ma $F(x, y)$, to każdy element zbioru X_0 ma własność φ.

4. Zdefiniujmy czteroargumentową relację $(., .) \to (., .)$ w zbiorze $\mathbf{Aexp} \times \Sigma \times \mathbf{Aexp} \times \Sigma$ jako najmniejszą relacją zamkniętą między innymi ze względu następujące reguły:

   $$\frac{(a_0, \sigma) \to (a_0', \sigma)}{(a_0 + a_1, \sigma) \to (a_0' + a_1, \sigma)},$$

   $$\frac{(a, \sigma) \to (a', \sigma)}{(n + a, \sigma) \to (n + a', \sigma)},$$

   $$\frac{}{(n + m, \sigma) \to (p, \sigma)},$$

gdzie p jest sumą liczb n i m, i podobne reguły dotyczące odejmowania i mnożenia. Uzupełnij definicję relacji i udowodnij, że dla dowolnych $a \in \mathbf{Aexp}$, $n \in N$ i $\sigma \in \Sigma$ zachodzi następująca równoważność:

$$(a, \sigma) \to (n, \sigma) \Leftrightarrow (a, \sigma) \to n.$$

5. Zmieńmy definicję zbioru **Aexp** przyjmując, że

$$a ::= n \mid X \mid a_0 + a_1 \mid a_0 - a_1 \mid a_0 * a_1 \mid c \ \mathbf{resultis}\ a_0$$

(definicje zbiorów **Bexp** i **Com** pozostają takie same, jak dotychczas). Wartość wyrażenia c **resultis** a_0 w stanie σ definiujemy (nieformalnie) jako wartość wyrażenia a_0 obliczona w stanie otrzymanym po takim wykonaniu instrukcji c, które rozpoczęło się w stanie σ. Zaproponuj semantykę operacyjną rozszerzonego w ten sposób języka **IMP**. Zapisz program podany na liście nr 1 w tak rozszerzonym języku **IMP** (pomijając te fragmenty programu, które dotyczą tablic, zastępując znak dzielenia znakiem mnożenia i przyjmując jakąś konwencję dotyczącą wyprowadzania wyników obliczeń). Ustal korzystając z zaproponowanej semantyki, co zwraca otrzymany program.