Lista zadań z semantyki języków programowania

1. Zbiór $X \subseteq N$ jest induktywny, jeżeli
   - $0 \in X$,
   - dla dowolnej liczby naturalnej n, jeżeli $n \in X$, to $n+1 \in X$.

   Udowodnij, że następujące zasady są równoważne:
   - (zasada indukcji) jeżeli X jest dowolnym zbiorem induktywnym, to $X = N$,
   - (zasada minimum) w każdym niepustym zbiorze liczb naturalnych jest element najmniejszy,
   - (zasada maksimum) w każdym niepustym, ograniczonym z góry zbiorze liczb naturalnych jest element największy.

2. Relacja $R \subseteq X^2$ jest regularna, jeżeli w dowolnym niepustym zbiorze $A \subseteq X$ jest element x taki, że dla dowolnego $y \in X$ warunek yRx nie zachodzi. Zbiór $A \subseteq X$ jest R-induktywny, jeżeli

   $$\forall x \in X\left((\forall y \in X \ \ (yRx \Rightarrow y \in A)) \Rightarrow x \in A\right).$$

   Udowodnij, że dowolny zbiór R-induktywny jest równy X.

3. Udowodnij, że relacja $R \subseteq X$ jest regularna wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieje ciąg $(x_n)_{n \in N}$ elementów zbioru X taki, że $x_{n+1} R x_n$ dla dowolnego $n \in N$.

4. Przypuśćmy, że mamy zbiór X, $A \subseteq X$ i $f : X^n \to X$. Niech X_0 będzie najmniejszym spośród zbiorów X' takich,że $A \subseteq X'$ i $f : (X')^n \to X'$. Udowodnij, że jeżeli ψ jest własnością taką, że
   - $\forall x \in A\ \psi(x)$,
   - $\forall x_1, \ldots, x_n \in X_0\ (\bigwedge_{i=1}^{n}\ \psi(x_i) \Rightarrow \psi(f(x_1, \ldots, x_n))$,

   to $\forall x \in X_0\ \psi(x)$.

5. Rozważmy następujący program zapisany w Algolu (w drugiej kolumnie znajdują komentarze i wyjaśnienia):

`begin`	
`  integer a;`	deklaracja zmiennej a
`  integer array A,B,C;`	deklaracje tablic (jednowymiarowych, pominięto określenie wielkości tablic)
`  integer procedure f(x,y);`	nagłówek definicji funkcji
`    value x,y;`	parametry x i y są przekazywane przez wartość
`    integer x,y;`	deklaracja typów parametrów
`    a := f := x+1;`	treść procedury, treścia jest zawsze pojedyńcza instrukcja, tu: podwójna instrukcja podstawienia
`  integer procedure g(x);`	
`    integer x;`	parametr x jest przekazywany przez nazwę
`    x := g := a+2;`	
`  a := 0;`	pierwsza instrukcja
`  outreal(1,a + (f(a,g(a))/g(a)));`	polecenie wyprowadzenia wartości drugiego parametru
`  A[a + B[f(a)] + g(a)] := C[a] := 0`	
`end`	

Jaką wartość otrzymamy po wykonaniu tego programu? Który element tablicy C zostanie zmieniony podczas wykonywania tego programu?

Prawdopodobnie jedyną istotną i potrzebną do zrozumienia tego programu jest następująca informacją z opisu Algolu:

... Proces podstawienia dzieli się na trzy następujące kroki:

4.2.3.1. Wszystkie wyrażenia wskaźnikowe, występujące w zmiennych lewych stron, oblicza się kolejno od lewego do prawego.

4.2.3.2. Oblicza się wartość wyrażenia.

4.2.3.3. Wartość wyrażenia podstawia się pod wszystkie zmienne lewych stron z wyrażeniami wskaźnikowymi o wartościach obliczonych w kroku 4.2.3.1.

(Czy ten program czegoś nie przypomina?)