Równania w słowach, wstępna lista dodatkowa

Zad. 1. W ramach przygotowań do egzaminu proponuję opracowanie teorii kwadratowych równań i układów równań w słowach, a więc algorytmy słuące do rozwiązywania, złożoność algorytmów, oszacowania złożoności z góry i z dołu, oszacowanie długości minimalnego rozwiązania w zależności od długości równania (np. czy długość minimalnego rozwiązania można oszacować przez wielomian). Przykładem tego typu zagadnienia (trochę już na granicy omówionego materiału) jest pytanie o współczynnik periodyczności, patrz kolejne zadania.

Definicja. Przypuśćmy, że słowo W zostało przedstawione w postaci

$$W = A_0[P^{k_i}A_i]_{i=1}^{n}.$$

Takie przedstawienie jest P-stabilne, jeżeli

1) P^2 nie jest podsłowem A_i dla $i = 0, \ldots, n$,

2) $A_i \neq P$ dla i spełniających $0 < i < n$,

3) P jest sufiksem A_i dla $i \neq n$

4) oraz P jest prefiksem A_i dla $i > 0$.

Zad. 2. Opracuj algorytm, który dla danego słowa W i dla danego słowa prostego P znajduje P stabilne przedstawienie W. Pokaż, że każde słowo ma przedstawienie P stabilne.

Zad. 3. Pokaż, że dla dowolnego słowa W istnieje najwyżej jedno przedstawienie P stabilne.

Zad. 4. Wspólczynnik periodyczności rozwiązania kwadratowego równania (układu równań) daje się oszacować przez wielomian zależny od długości równania (odpowiednio: układu równań). Wskazówka: wynika to z poprzednich zadań. Bierzemy słowo P takie, że pewna składowa X rozwiązania jest postaci $X = UP^sV$, gdzie s jest współczynnikiem periodyczności, bierzemy P-stabilne przedstawienia składowych rozwiązania, a następnie P-stabilne przedstawienia słów powstających po podstawieniu w równaniu rozważanego rozwiązania.

Zad. 5. Pokaż, że długość minimalnego rozwiązania kwadratowego (układu) równań jest podwójnie wykładnicza w stosunku do długości równania.

Zad. 6. Opracuj algorytm sprawdzający, czy dane równanie w słowach ma rozwiązanie o danych długościach składowych. Oceń złożoność opracowanego algorytmu.

Zad. 7. Pokaż, że problem niesprzeczności równań w słowach jest rozstrzygany wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje obliczalna funkcja $f : N \to N$ taka, że jeżeli równanie R długości n ma rozwiązanie, to ma rozwiązanie długości $\leqslant f(n)$.

Zad. 8. Przygotowując się do egzaminu warto zwrócić uwagę na proste przypadki, np. równania z jedną zmienną, z jedną stałą, równania typu $u = u$ (w których po obu stronach jest ten sam ciąg zmiennych rozdzielony jakoś stałymi), itp.

Zad. 9. Opracuj liniowy algorytm (w sensie czasowym) badający niesprzeczność kwadratowego układu równań w słowach przy założeniu, że interesują nas rozwiązania o danych długościach zmiennych. Szacowanie złożoności może być trudne, może łatwiej da się znaleźć kwadratowy algorytm rozwiązujący podane zadanie.

Zad. 10. Bardzo ważny jest lemat 35.6. Jak bardzo można w nim osłabić założenie o długości wspólnego prefiksu, zachowując prawdziwość lematu?

Zad. 11. Problem niesprzeczności równania w słowach jest NP-trudny nawet gdy w równaniach może występować (wielokrotnie) tylko jedna litera stała. Wynika to stąd, że problem istnienia rozwiązania układu równań liniowych jest NP-trudny nawet, gdy współczynniki układu są podawane w systemie unarnym.

Zad. 12. Opisz rozwiązania równania z jedną zmienną i więzami regularnymi.

Zad. 13. Opracuj algorytm, który dla danych skończonych zbiorów $X \subseteq Y \subseteq A^+$ sprawdza, czy zbiór X jest zbiorem testowym dla Y.

Zad. 14. Opracuj algorytm obliczania rzędu równania w słowach.

Zad. 15. Opracuj algorytm, który dla danego regularnego układu U równań w słowach znajduje niezależny podukład $U' \subseteq U$ równoważny z układem U.

Zad. 16. Pokaż, że problem niesprzeczności kwadratowego równania w słowach jest NP-trudny

Zad. 17. Zredukuj problem istnienia rozwiązania równania uogólnionego do problemu niesprzeczności równania w słowach.

Zad. 18. Problem niesprzeczności równań w słowach z jednoliterowym alfabetem stałych jest NP-zupełny.

Zad. 19. Pokaż, że alternatywa równań jest równoważna pojedyńczemu równaniu w słowach.

Zad. 20. Problem niesprzeczności równań z więzami bezkontekstowymi jest nierozstrzygalny. Wskazówka: problem, czy przekrój dwóch języków bezkontekstowych jest nierozstrzygalny, patrz Hopcroft, Ullman, wstęp do teorii automatów,...

Zad. 21. W algorytmie Chmielewskiego ważną rzeczą jest tzw. eliminiwanie parametrów. Przypuśćmy, że rozważamy równanie R równe $x\varphi(x,\ldots) \to wx\psi(x,\ldots)$ i takie, że x nie występuje w w. Dla $v < w$ weźmy u takie, że $w = vu$ Niech $R_1^t(v)$ oznacza równanie $\varphi(w^t v,\ldots) = uv\psi(w^t v,\ldots)$, a $R_2^t(v)$ – równanie $x\varphi(w^t vx,\ldots) = uvx\psi(w^t v,\ldots)$. Oczywiście, równanie R ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $t \in N$ i pewnego $v < w$ jedno z równań $R_1^t(v)$ lub $R_2^t(v)$ ma rozwiązanie. Zdefiniowaliśmy więc „nieskończone" przekształcenie R i chcemy zastąpić je skończonym. Udowonij, że jeżeli w słowie w występuje każda zmienna występująca w równaniu R w wyjątkiem x, to istnieje liczba K taka, że równanie R ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego $t \leqslant K$ i pewnego $v < w$ jedno z równań $R_1^t(v)$ lub $R_2^t(v)$ ma rozwiązanie. Co więcej, wynika to z następującej własności: istnieje liczba K taka, że jeżeli równanie $R_i^t(v)$ ma rozwiązanie dla pewnego $t \geqslant K$, to ma rozwiązanie dla każdego $t \geqslant K$. Wskazówka: wykorzystaj podany na wykładzie dowód tego twierdzenia w przypadku równań z dwoma zmiennymi.

Zad. 22. Rozwiąż równanie „zwierciadlane" $x_1x_2\ldots x_n = x_nx_{n-1}\ldots x_1$. (W ogólnym przypadku jest to raczej trudne, dla $n = 3$ lub $n = 4$ wiąze się z tym, co było na wykładzie, może coś da się powiedzieć dla $n = 5$.)

Zad. 23. Pokaż, że minimalne rozwiązanie równania długości n z dwoma zmiennymi ma długość $\leqslant c \cdot n^2$ (może być trudne).

Zad. 24. Pokaż, że minimalne rozwiązanie równania długości n z jedną zmiennymi ma długość $\leqslant c \cdot n^2$. Wskazówka: skorzystaj z twierdzenia 32.1.

Zad. 25. Rozwiąż równania: $xyz = zxy$, $xyyx = zttz$, $xxyy = zz$, $xxxyyy = zzz$, $axax = ybyb$, $axaxax = ybyb$ itp. Rozwiąż układ równań $xyz = zxy = yzx$.