Równania w słowach, lista nr 4

13 stycznia 2004

Zad. 1. Pokaż, że istnieje różnowartościowy homomorfizm $\alpha : \{a, b, c\}^* \to \{a, b, c\}^*$, który nie jest elemetarny.

Definicja. Zbiór jednopiętrowych słów parametrycznych to najmniejszy spośród zbiorów X takich, że

1. dowolne słowa należą do X,
2. jeżeli w jest słowem i x jest zmienną, to $w^x \in X$,
3. jeżeli $w_1 \in X$ i $w_2 \in X$, to $w_1w_2 \in X$.

Umawiamy się, że $w^x w^y = w^{x+y}$, $w^x w^2 = w^{x+2}$, $w^x w^x = w^{2 \cdot y}$ itp.

Zad. 2. Każde jednopiętrowe słowo parametryczne ma postać $P_0[A_i^{L_i} P_i]_{i=1}^n$ gdzie $P_0, \ldots, P_n$ oraz $A_1, \ldots, A_n$ są słowami, a L_i są liniowymi wielomianami o współczynnikach i wyrazach wolnych będących liczbami naturalnymi.

Definicja. Słowo $P_0[A_i^{L_i} P_i]_{i=1}^n$ nazywamy uproszczonym, jeżeli

1. słowa A_i mają tę samą długość,
2. dla $i = 1, \ldots, n$, jeżeli $P_{i-1} \neq \varepsilon$, to ostatnie litery słów P_{i-1} i A_i są różne,
3. dla $i = 2, \ldots, n$, słowo A_{i-1} nie jest odcinkiem początkowym słowa $P_{i-1}A_i$,
4. słowo A_n nie jest odcinkiem początkowym słowa P_n.

Definicja. Parametryczne słowa $\varphi(t_1, \ldots, t_n)$ i $\psi(t_1, \ldots, t_n)$ są równoważne w dziedzinie $\mathcal{P}(t_1, \ldots, t_n)$, jeżeli

$$\mathcal{P}(t_1, \ldots, t_n) \Rightarrow \varphi(t_1, \ldots, t_n) = \psi(t_1, \ldots, t_n).$$

Zad. 3. Załóżmy, że słowa A_i mają tę samą długość. Pokaż, że parametryczne słowo

$$P_0[A_i^{L_i} P_i]_{i=1}^n$$

jest równoważne w dziedzinie $L_1, \ldots, L_n > 0$ pewnemu słowu uproszczonemu. Wskazówka: rozwiązanie polega na spowodowaniu, że dla kolejnych $i = 0, \ldots, n$ spełnione są warunki 2), 3) i 4) z definicji słowa uproszczonego. Robimy to zachowując warunek 1). Spełnianie warunków 2) i 3) uzyskujemy „rolując” w razie potrzeby słowa A_i w lewo, a więc dla $A_i = PQ$ słowo QA_i^n zastępujemy przez $(QP)^nQ$.

Zad. 4. Niech

$$P_0[A_i^{L_i} P_i]_{i=1}^n = Q_0[B_i^{M_i} Q_i]_{i=1}^m$$

będzie równaniem o uproszczonych stronach takim, że $|A_i| = |B_j|$ dla wszystkich i, j i

$$G = \max\{\,|\,|P_i| - |Q_i|\,| : i = 0, 1, \ldots, \min\{n, m\}\}.$$

Pokaż, że jeżeli podane równanie ma rozwiązanie spełniające warunki

$$L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m \geqslant 1 + \frac{G}{|\, A_1 \,|},$$

to $n = m$, $P_0 = Q_0$, oraz dla $i = 1, \ldots, n$ zachodzą równości $P_i = Q_i$, $A_i = B_i$ i $L_i = M_i$. Wskazówka: spróbuj najpierw ustalić związek między A_1 i B_1. Następnie kolejno pokaż, że $A_1 = B_1$, $P_0 = Q_0$ i $L_1 = M_1$.

Zad. 5. Opracuj algorytm rozwiązywania równań wykładniczych postaci

$$\varphi(A^n, A^m) = \psi(A^n, A^m).$$

Uogólnij metodę najbardziej, jak potrafisz. Opracuj algorytm testowania niesprzeczności takich równań wykładniczych.

Zad. 6. Spróbuj opracować algorytm rozwiązywania równań wykładniczych postaci

$$\varphi(A^n, B^m) = \psi(A^n, B^m).$$

Wskazówka: wymaga to rozwiązania zadań podobnych do podanych, ale dla innej definicji słowa uproszczonego. W definicji słowa uproszczonego należy zrezygnować z warunku 1). Zamiast niego powinniśmy żądać, że słowa A_i są proste. Zmiany wymaga też warunek 3): bierzemy minimalne c takie, że $|\, A_{i-1} \,| \leqslant c |\, A_i \,|$ i żądamy, aby A_{i-1} nie było prefiksem $P_{i-1} A_i^c$. Wprowadzone zmiany spowodują także konieczność korekty nierówności gwarantujących prawdziwość poszczególnych zadań.