Równania w słowach, lista nr 3

8 grudnia 2003

Zad. 1. Opisz wszystkie rozwiązania główne równania $xy = yx$.

Zad. 2. Niech $V = \{u, w, x, y, z\}$. Pokaż, że w grafie $\mathcal{G}_V$ istnieją dowolnie długie ścieżki nie przechodzące przez pętle, zaczynające się w wierzchołku wyznaczonym przez równanie $uwyu = xuuz$ i kończące się w wierzchołku wyznaczonym przez $\varepsilon = \varepsilon$.

Zad. 3. (Inna metoda wyznaczania rozwiązań głównych.) Homomorfizm $\alpha : V^* \to A^*$ nazywamy elementarnym, jeżeli dla każdych homomorfizmów $\beta : V^* \to B^*$ i $\theta : B^* \to A^*$ takich, że $\alpha = \theta\beta$ liczba elementów B jest przynajmniej taka, jak liczba elementów A. Pokaż, że homomorfizmy elementarne są różnowartościowe.

Zad. 4. Przypuśćmy, że mamy równanie $u = v$ i jego rozwiązania $\alpha : V^* \to A^*$. Niech M będzie najmniejszą półgrupą wolną zawartą w A^* i zawierającą $\alpha(V)$. Istnieje więc skończony zbiór X i izomorfizm $i : X^* \to M$. Oczywiście, $i^{-1}\alpha$ jest rozwiązaniem równania $u = v$. Pokaż, że to rozwiązanie jest homomorfizmem elementarnym. Wywnioskuj stąd, że jest to rozwiązanie główne.

Zad. 5. Przypuśćmy, że φ jest złożeniem etykiet ze ścieżki S w grafie $\mathcal{G}_V$ prowadzącej od wierzchołka $u = v$ do $\varepsilon = \varepsilon$ (i rozwiązanie równania $u = v$). Pokaż, że długość n ścieżki S jest $\leqslant |\,\varphi(u)\,|$ oraz $|\,\varphi(u)\,| \leqslant 2^n \cdot |\,u\,|$.

Zad. 6. (Rozwiązywanie równań z jedną zmienną.) Niepuste słowo X nazywamy prostym, jeżeli nie daje się przedstawić w postaci Y^i dla żadnej liczby naturalnej $i > 1$. Pokaż, że jeżeli X jest słowem prostym i PX jest prefiksem X^2, to albo P jest słowem pustym, albo $P = X$.

Zad. 7. Rozwiąż równanie $Wxy = xz$, gdzie x, y i z są zmiennymi, a W jest słowem złożonym ze stałych.

Zad. 8. Przypuśćmy, że mamy równanie R z jedną zmienną x i słowo proste X. Udowodnij, że jeżeli X^n jest rozwiązaniem równania R dla dostatecznie dużej liczby naturalnej n, to każde słowo postaci X^n jest rozwiązaniem równania R. Podaj oszacowanie (z dołu) liczby n gwarantujące prawdziwość tego zadania.

Zad. 9. Opracuj algorytm rozwiązujący równania z jedną zmienną. Oceń złożoność opracowanego algorytmu.

Zad. 10. (Nierozstrzygalność teorii półgrup wolnych). Rozważamy model obliczeń, w którym

1. mamy do dyspozycji jedną komórkę pamięci pozwalającą na przechowywanie informacji o jednej, dowolnie dużej liczbie naturalnej i licznik rozkazów,

2. program jest ciągiem złożonym z instrukcji czterech rodzajów:

   (a) pomnóż daną liczbę przez 2 i przygotuj się do wykonywania instrukcji o numerze i

   (b) pomnóż daną liczbę przez 3 i przygotuj się do wykonywania instrukcji o numerze i

   (c) jeżeli jest to możliwe, to podziel daną liczbę przez 6 i przygotuj się do wykonywania instrukcji o numerze i, w przeciwnym razie przygotuj się do wykonywania instrukcji o numerze j,

(d) zatrzymaj się,

3. (poprawny) program zawiera numery instrukcji nie przekraczające jego długości, zawiera dokładnie jedną instrukcję *zatrzymaj się* i instrukcja ta znajduje się na ostatnim miejscu,

4. przed uruchomieniem programu do pamięci wprowadzamy jakąś liczbę, a wykonanie programu polega na wykonywaniu jego instrukcji zgodnie z oczywistą semantyką, począwszy od instrukcji o numerze 1; wynikiem obliczeń jest zawartość pamięci po wykonaniu instrukcji *zatrzymaj się*. Wynik obliczeń nie jest określony, jeżeli program nie wykonał instrukcji *zatrzymaj się*.

Udowodnij, że przedstawiony model obliczeń ma nierozstrzygalny problem stopu. Wskazówka: podany model przypomina często rozważany model ograniczonej maszyny Turinga.

Zad. 11. Niech A będzie skończonym alfabetem, 0 i 1 – wyróżnionymi literami należącymi do A. Przypuśćmy, że P jest programem dla modelu obliczeń z poprzedniego zadania, zawierającym m instrukcji. Słowo

$$0^{n_1+1}1^{i_1}0^{n_2+1}1^{i_2}\dots 0^{n_k+1}1^{i_k}$$

opisuje obliczenia zgodne z programem P, jeżeli $i_1 = 1$, $i_k = m$ oraz dla każdego j, $1 \leqslant j < k$, instrukcja programu P o numerze i_j przekształca liczbę n_j w liczbę n_{j+1} i powoduje, że w następnym kroku zostanie wykonana instrukcja o numerze i_{j+1}. Napisz formułę, która jest prawdziwa w półgrupie A^* wtedy i tylko wtedy, gdy słowo w nie opisuje obliczeń zgodnych z programem P. Spróbuj napisać taką formułę, która zaczyna się czterema kwantyfikatorami egzystencjalnymi, a jej pozostała część jest alternatywą równości.

Zad. 12. Udowodnij, że nie jest rozstrzygalny problem, czy dana formuła (bez zmiennych wolnych) postaci

$$\forall w\ \exists t\ \exists x\ \exists y\ \exists z \bigvee_i s_i = s_i'$$

jest prawdziwa w półgrupie A^* słów nad przynajmniej dwuliterowym alfabetem A. Trzy ostatnie zadania przedstawiają dowód nierozstrzygalności teorii półgrup wolnych podany przez Marczenkowa. Przedstawioną ideę być może da się zrealizować także dla maszyn Turinga, o których mowa w zadaniu 10, a nie tylko dla podanego modelu obliczeń. Wiadomo też, że można dowieść nierozstrzygalność analogicznego problemu z trzema kwantyfikatorami egzystencjalnymi.