Równania w słowach, lista nr 2

18 listopad 2003

Zad. 1. Udowodnij, że jeżeli M jest podpółgrupą $\Xi^* \times \Xi^*$ i $X = (M \setminus \{\varepsilon\}) \setminus (M \setminus \{\varepsilon\})^2$, to X jest najmniejszym zbiorem generatorów M.

Zad. 2. Niech e_i oznacza równanie $xy^iz = zy^ix$. Pokaż, że układ równań $\{e_1, e_2\}$ jest niezależny i równoważny układowi $\{e_1, e_2, e_3\}$.

Zad. 3. Niezerowe rozwiązanie $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in N^n$ równania diofantycznego e nazywamy minimalnym, jeżeli nie jest rozwiązaniem równania e żaden układ $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in N^n$ taki, że $\vec{y} \neq \vec{x}$ oraz $y_i \leqslant x_i$ dla $i = 1, \ldots, n$. Przypuśćmy, że rozważamy liniowe równanie diofantyczne $a_1z_1 + \ldots + a_nz_n = b$. Przyjmijmy, że $m = \max\{\mid a_1 \mid, \ldots, \mid a_n \mid\}$. Udowodnij, że jeżeli $\vec{x}$ jest minimalnym rozwiązaniem tego równania, to dla wszystkich $i \leqslant n$ zachodzi nierówność $x_i < nm^2 + \mid b \mid$. Spróbuj znaleźć lepsze oszacowanie.

Zad. 4. Zbiór (wektorów) N^n ze zwykłym dodawaniem jest półgrupą. Niech M będzie podpółgrupą N^n. Czy dla M można dowieść twierdzenie o minimalnym zbiorze generatorów?

Zad. 5. Zauważmy, że zbiór rozwiązań jednorodnego, liniowego równania diofantycznego $a_1z_1 + \ldots + a_nz_n = 0$ jest półgrupą. Pokaż, że minimalny zbiór generatorów tej półgrupy składa się dokładnie z minimalnych rozwiązań tego równania.

Zad. 6. Opisz zbiór rozwiązań liniowego równania diofantycznego $a_1z_1 + \ldots + a_nz_n = b$.

Zad. 7. Rozwiązanie α równania w słowach nazywamy cyklicznym, jeżeli istnieje słowo u takie, że dla dowolnej zmiennej x wartość $\alpha(x)$ jest postaci u^i. Znajdź wszystkie cykliczne rozwiązania równania $xyx^2yz = yz^4x$.

Zad. 8. Opracuj algorytm sprawdzający, czy dla danego skończonego zbioru X półgrupa X^* jest wolna.

Zad. 9. Przypuśćmy, że $\alpha : V^* \to A^*$ jest homomorfizmem. Zauważ, że dla zbioru $\{\alpha(v) : v \in V\}^*$ nie zachodzi twierdzenie o jednoznaczności wtedy i tylko wtedy, gdy w zbiorze $E(\alpha)$ jest równanie, które nie jest postaci $s = s$. Sformułuj w języku teorii grafów algorytm sprawdzający, czy dla $\{\alpha(v) : v \in V\}^*$ zachodzi twierdzenie o jednoznaczności.

Zad. 10. Przypuśćmy, że mamy dwa rozłączne zbiory zmiennych $\{x_1, \ldots, x_n\}$ oraz $\{x'_1, \ldots, x'_n\}$. Przyjmijmy, że jeżeli $u = x_{i_1} \ldots x_{i_k}$, to $u' = x'_{i_1} \ldots x'_{i_k}$. Spróbuj znaleźć algorym sprawdzający, czy do zbioru $E(\alpha)$ należy równanie postaci $u = u'$.

Zad. 11. Opracuj algorytm sprawdzający, czy dla danych skończonych zbiorów X i Y półgrupy X^* i Y^* są izomorficzne.

Zad. 12. Pokaż, że każdy układ złożony z dwóch równań w słowach jest równoważny z pojedyńczym równaniem.

Zad. 13. Przypuśćmy, że u i v są słowami (termami w języku półgrup wolnych). Napisz formułę nie zawierającą negacji i równoważną formule $u \neq v$. Wywnioskuj stąd, że każda formuła (wyrażająca własności słów) jest równoważna formule, w której nie występuje negacja.

Zad. 14. Spróbuj opracować algorytm, który dla danych skończonych zbiorów $X \subseteq Y \subseteq A^+$ sprawdza, czy zbiór X jest zbiorem testowym dla Y.

Zad. 15. Spróbuj opracować algorytm, który dla danego regularnego układu U równań w słowach znajduje niezależny podukład $U' \subseteq U$ równoważny z układem U.