Równania w słowach, lista nr 1

25 października 2003

Zad. 1. Pokaż, że zbiór

$$\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in N \wedge ac - bd = 1\}$$

z mnożeniem macierzy jest półgrupą wolną. Znajdź generatory tej półgrupy (słowo półgrupa będzie najczęściej oznaczać półgrupę z jednością, czyli monoid).

Zad. 2. Pokaż, że zbiór

$$\{\begin{pmatrix} 2^n & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n, m \in N \wedge 0 \leqslant m < 2^n\}$$

z mnożeniem macierzy jest półgrupą wolną. Znajdź generatory tej półgrupy.

Zad. 3. Udowodnij, że jeżeli półgrupa M ma własność uniwersalności, to jest wolna.

Zad. 4. Pokaż, że problem niesprzeczności dla równań w słowach jest równoważny z problemem unifikacji łącznej.

Zad. 5. Pokaż, że w lemacie o minimalnym zbiorze generatorów założenie, że rozważamy półgrupy zawarte w A^* jest istotne.

Zad. 6. Pokaż, że każda półgrupa wolna z przeliczalnym zbiorem generatorów jest izomorficzna z podpółgrupą półgrupy $\{a, b\}^*$.

Zad. 7. Pojęcie rozwiązania równania w słowach może być definiowane jako homomorfizm w pewną pólgrupę wolną, albo w ustaloną półgrupę postaci A^* (A to pewien alfabet). Przeanalizuj, jak problem niesprzeczności zależy definicji pojęcia rozwiązania, w szczególności jak zależy od wyboru A.

Zad. 8. Opisz rozwiązania dowolnego równania słowowego z dwoma zmiennymi i nie zawierającego stałych.

Zad. 9. Opisz rozwiązania dowolnego równania słowowego z jedną stałą.

Zad. 10. Pokaż, że półgrupa $M \subseteq A^*$ jest generowana przez zbiór prefiksów wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $x, y \in A^*$ warunek $x, xy \in M$ implikuje, że $y \in M$. Zbiór $X \subseteq A^*$ jest zbiorem prefiksów, jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ z tego, że $x \leqslant y$ wynika, że $x = y$.

Zad. 11. Udowodnij, że półgrupa M (z jednością ε) jest wolna wtedy i tylko wtedy, gdy

1. istnieje homomorfizm φ przekształcający M w półgrupę liczb naturalnych z dodawaniem taki, że jedynym elementem $x \in M$ spełniającym $\varphi(x) = 0$ jest $x = \varepsilon$ (zauważmy, że taki homomorfizm ma własności, których wymagamy od funkcji przyporządkowującej słowu jego długość),

2. dla dowolnych $x, y, z, t \in M$ warunek $xy = zt$ implikuje, że istnieje $u \in M$ taki, że albo $xu = z$ i $xy = ut$, albo $zu = x$ i $uy = t$.