37 Nieparametryzowalność równania $xaby = ybax$

Lemat 37.1 *Słowa X^nY i X komutują wtedy i tylko wtedy, gdy słowa X i Y komutują.* □

Lemat 37.2 *Słowa $f(X, Y, k, n)$ i $f(X, Y, k-1, n)$ komutują wtedy i tylko wtedy, gdy słowa X i Y komutują.* □

Zauważmy jeszcze, że jezeli rozważamy równanie $xAy = yBx$ i mamy słowa P, Q i R takie, że $A = PQR$ i $B = RQP$, to $A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy QP i QR komutują. Wobec tego, jeżeli $A \neq B$, to słowa $f(QR, QP, k, n)$ i $f(A, B.k-1, n)$ nie komutują.

Lemat 37.3 *Przypuśćmy, że mamy dwie litery a i b, słowa U, $S \neq \varepsilon$ i V, oraz liczby k i n takie, że $n_0 = \ldots = n_{k-1} = 1$. Wtedy warunek*

$$US^tV = f(a, b, k, n)$$

implikuje, że $t \leqslant 6(|\,U\,| + 1)$.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenie $F_i = f(a, b, i, n)$ dla $i \leqslant k$. Oczywiście, $F_{i-1} < F_i$ dla wszystkich $i > 0$.

Gdyby $U = \varepsilon$ i $|\,S\,| = 1$, to równość $F_1 = ab$ implikowałaby by, że $t \leqslant 1$. Możemy więc założyć, że $|\,US\,| \geqslant 2$. Możemy też dodatkowo założyć, że słowo S jest proste.

Dla dowodu nie wprost załóżmy, że $t > 6(|\,U\,| + 1)$. Z tej nierówności wynika, że

$$|\,US^t\,| \geqslant 7|\,U\,| + 7|\,S\,|.$$

Niech więc j oznacza najmniejszą liczbę taką, że $US < F_j$. Jest oczywiste, że $2 \leqslant j \leqslant k$, a także $F_{j-1} \leqslant US$.

Z lematu 34.1 otrzymujemy, że (z tym samym n po obu stronach)

$$F_k = f(a, b, k, n) = f(F_j, F_{j-1}, k-j, n).$$

Gdyby $k - j \leqslant 2$, to

$$F_k \leqslant f(F_j, F_{j-1}, 2, n) = F_jF_{j-1}F_j = F_{j-1}F_{j-2}F_{j-1}F_{j-1}F_{j-2}.$$

Ponieważ $F_{j-2} < F_{j-1} \leqslant US$, więc $|\,F_k\,| < 5|\,US\,|$. Jest to sprzeczne z założeniem o t.

Tak więc $k - j \geqslant 3$ oraz

$$F_k = f(F_j, F_{j-1}, k-j, n) \geqslant f(F_j, F_{j-1}, 3, n) = F_jF_{j-1}F_jF_jF_{j-1}.$$

Oszacujmy długość $F_jF_{j-1}F_jF_j$. Ponieważ

$$F_jF_{j-1}F_jF_j = F_{j-1}F_{j-2}F_{j-1}F_{j-1}F_{j-2}F_{j-1}F_{j-2},$$

więc długość tego słowa nie przekracza $7|\,U\,| + 7|\,S\,|$. Wobec tego,

$$F_jF_{j-1}F_jF_j \leqslant US^t.$$

Weźmy V takie, że $F_j = USV$. Po podstawieniu otrzymujemy $USVF_{j-1}USVUSV \leqslant US^t$, a po uproszczeni – $VF_{j-1}USVUSV \leqslant S^t$. Wobec tego, słowa $VF_{j-1}U$ oraz VU są dodatnimi potęgami S (z definicji j wynika, że $V \neq \varepsilon$).

Przyjmijmy, że $V = S^x X$ oraz $U = Y S^y$ dla pewnych słów takich, że $XY = S$. Wtedy

$$S^z = VF_{j-1}U = S^x X F_{j-1} Y S^y.$$

Po uproszczeniu otrzymujemy

$$(YX)^{z-x-y-1} = F_{j-1}.$$

Z drugiej strony

$$F_j = USV = YS^y SS^x X = YS^{x+y+1}X = Y(XY)^{x+y+1}X = (YX)^{x+y+2}.$$

W ten sposób dowiedliśmy, że F_j i F_{j-1} komutują. Zgodnie z lematem 37.2, jest to równoważne komutowaniu liter a i b. Oczywiście litery nie komutują, a uzyskana w ten sposób sprzeczność dowodzi przwdziwości lematu. □

Wniosek 37.4 *Przypuśćmy, że $p_1, \ldots, p_m$ są parametrycznymi słowami nie zawierającymi zmiennych słowowych. Zbiór wszystkich możliwych wartości tych słów nie zawiera zbioru*

$$\{g(a, b, k, n) : n_0 = \ldots = n_{k-1} = 1\}.$$

Dowód. Niech $[p]$ oznacza zbiór wartości parametrycznego słowa p. Gdyby

$$\{g(a, b, k, n) : n_0 = \ldots = n_{k-1} = 1\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} [p_i],$$

to dla pewnego i zbiór

$$\{g(a, b, k, n) : n_0 = \ldots = n_{k-1} = 1\} \cap [p_i]$$

byłby nieskończony. Pokażemy, że takie przekroje dla dowolnego słowa parametrycznego są skończone.

Przypuśćmy, że mamy słowo parametryczne p. Dowolne słowo parametryczne p jest postaci $uq^x r$, gdzie u jest słowem, q i r są słowami parametrycznymi, a x jest zmienną naturalną. Dla słów parametrycznych nie zawierających zmiennych słowowych q i r są też takimi słowami parametrycznymi, a u jest słowem stałym. Dla tak przedstawionego słowa $p = uq^x r$ definiujemy zbiór

$$W_p = \{(uq^x r)[x/i] : i \leqslant 6(|\, u \,| + 1)\}$$

(za zmienną x podstawiamy wszędzie w słowie p każdą podaną wartość). Zauważmy, że zbiór W_p jest skończony i w słowach parametrycznych z W_p występuje mniej zmiennych niż w p. Niech $\mathcal{W}_p$ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym p i takim, że $W_s \subseteq \mathcal{W}_p$ dla każdego $s \in \mathcal{W}_p$. Nietrudno zauważyć, że zbiór $\mathcal{W}_p$ jest skończony i słowa stałe należące do $\mathcal{W}_p$ należą także do $[p]$.

Pokażemy, że jeżeli n koduje ciąg długości k samych jedynek i słowo (stałe) $g(a, b, k, n) \in [p]$, to $g(a, b, k, n) \in \mathcal{W}_p$. Jeżeli $g(a, b, k, n) \in [p]$, to $g(a, b, k, n) = p[v]$ jest wartością p dla pewnego wartościowania v zmiennych naturalnych. Przedstawmy p w postaci $uq^x r$ spełniającej wyżej podane warunki. Przyjmijmy, że $p' = (uq^x r)[x/v(x)]$ (p' to słowo parametryczne powstające z p przez zastąpienia x wartością tej zmiennej przy wartościowaniu v). Oczywiście, $g(a,b,k,n) = p[v] = p'[v] = u(q[v])^{v(x)} r[v]$. Z lematu 37.3 otrzymujemy, że $v(x) \leqslant 6(|\,u\,|+1)$, a więc $p' \in W_p$. Przedstawione rozumowanie łatwo przerobić na indukcyjny dowód interesującej nas własności. □

Lemat 37.5 *Dla $k \geqslant 0$ litera a rozpoczyna słowo $f(a,b,k,n)$.* □

Lemat 37.6 *Słowo $f(a,b,k,n)$ nie zawiera podsłowa b^2.*

Dowód. Przypuśćmy, że pewne takie słowo zawiera b^2 i weźmy takie słowo $f(a,b,k,n)$ z najmniejszym k. Oczywiście, $k \geqslant 2$ oraz $f(a,b,k,n) = (f(a,b,k-1,n))^{n_{k-1}} f(a,b,k-2,n)$. Ponieważ ani $f(a,b,k-1,n)$, ani $f(a,b,k-2,n)$ nie zawierają b^2, więc b^2 musi się pojawić na granicy między słowami postaci $f(a,b,k-1,n)$ i $f(a,b,k-2,n)$. Jedno z tych słów zaczynałoby się wtedy literą b, a to przeczy lematowi 37.5. □

Lemat 37.7 *Równanie $xaby = ybax$ nie jest parametryzowalne (a więc zbiór rozwiązań tego równania (zbiór par słów) nie jest zbiorem wartości skończonego układu par słów parametrycznych).*

Dowód. Nietrudno zauważyć, że jeżeli X i Y są rozwiązaniem równania $xaby = ybax$, to

$$X, Y \in \{g(a,b,k,n) : k,n \in N\} \cup \{g(b,a,k,n) : k,n \in N\}.$$

Zgodnie z lematem 37.6, żadne ze słów $g(a,b,k,n)$, ani $g(b,a,k,n)$ nie zawiera podsłowa a^2b^2.

Z wniosku 37.4 wynika, że żaden skończony układ par (p,q) słów parametrycznych takich, że słowa p nie zawierają zmiennych słowowych nie zawiera wszystkich rozwiązań.

Przypuśćmy, że równanie jest jednak parametryzowalne. Wtedy w rozwiązaniu zparametryzowanym jest para (p,q), taka, że p zawiera zmienne słowowe. Jeżeli za przynajmniej jedną zmienną słowową podstawimy dowolne słowo zawierające a^2b^2, to otrzymamy słowo różna od wszystkich słów postaci $g(a,b,k,n)$. Wobec tego, zbiór wartości pary (p,q) zawiera pary, które nie są rozwiązaniami równania $xaby = ybax$. □