35 Alg. Chmielewskiego, cd. Równania $xAy\ldots \to yBx\ldots$

35.1 μ-obrazy

Rozważamy równanie

$$xAy\Phi \to yBx\Psi \tag{26}$$

ze zmiennymi x, y takie, że A i B są różnymi słowami stałymi tej samej długości oraz podstawienie $\bar{x} = (xAyB)^\mu x$ i $\bar{y} = xAy$. Każde rozwiązanie równania (26) przypisuje zmiennym x i y słowa różnej długości. Zauważmy, że po wykonaniu podanego podstawienia w równaniu (26) i skróceniu stron otrzymujemy

$$xAy\bar{\Phi} \rightleftharpoons yBx\bar{\Psi}$$

(równanie jednostronne ze strzałką w jedną lub drugą stronę). Równanie to nazywamy μ-obrazem równania (26).

Wiadomo, że równanie (26) dla pewnej liczby N można zastąpić równaniami otrzymanymi z (26) przez podstawienie $x \leftarrow (yB)^t x$ dla dodatnich $t \leqslant N$ oraz $x \leftarrow (yB)^t yB'$ dla $t \leqslant N$, $B' \leqslant B$, $t+|B'| > 0$. Podstawienia drugiego rodzaju przekształcają równanie (26) w równanie z jedną zmienną i dalej możemy się nimi nie interesować. Nietrudno zauważyć, że po wykonaniu podstawienia pierwszego rodzaju otrzymujemy równanie postaci $yBx\Psi' \to xAy\Phi'$. Każde takie rownanie można zastąpić równaniami otrzymanymi w wyniku podstawień $y \leftarrow xA'$ dla $A' \leqslant A$ oraz podstawieniem $y \leftarrow xAy$. W wyniku drugiego podstawienia otrzymujemy t-obraz równania (26). Ostatecznie, każde równanie (26) można zastąpić μ-obrazami tego równania dla $\mu \leqslant N$ i równaniami z jedną zmienną.

Równanie postaci (26) nazywamy istotnym, jeżeli jest równoważne z równaniem postaci $xAyP_1z_1\ldots \to yBxP_2z_2\ldots$, gdzie P_1 i P_2 są różnymi słowami, a $z_1, z_2 \in \{x, y\}$.

Zauważmy, że sprzeczne równanie (26) jest równoważne równaniu $xAyAxx \to yBxBx$, a więc jest równaniem istotnym (rozważamy tylko rozwiązania, których wszystkie składowe są niepuste).

Lemat 35.1 *Przypuśćmy, że R jest równaniem (26), a R_μ jest jego μ-obrazem. Para słów (X, Y) jest rozwiązaniem R_μ wtedy i tylko wtedy, gdy para słów $((XAYB)^\mu X, XAY)$ jest rozwiązaniem R.* $\square$

Lemat 35.2 *Przypuśćmy, że R jest równaniem (26), R_μ jest jego μ-obrazem oraz, że mamy dane P, Q, R, $k \geqslant 2$ i n takie, że $QA = \langle QR, QP\rangle_k$, $QB = \langle QR, QP\rangle_{k-1}$, $n_k = 1$ i $n_{k+1}\mu$. Para słów*

$$X = g(QR, QP, k, n)Q \quad \textit{oraz} \quad Y = g(QR, QP, k-1, n)Q$$

jest rozwiązaniem R_μ wtedy i tylko wtedy, gdy para słów

$$X' = g(QR, QP, k+2, n)Q \quad \textit{oraz} \quad Y' = g(QR, QP, k+1, n)Q$$

jest rozwiązaniem R.

Dowód. Zauważmy, że

$$X'A = f(QR, QP, k+2, n) \ \text{ oraz } \ Y'B = f(QR, QP, k+1, n).$$

Korzystając z definicji f pokazujemy, że

$$X'A = (XAYB)^{\mu}XA \ \text{ oraz } \ Y'B = XAYB.$$

Teraz tezę otrzymujemy z porzedniego lematu. □

Lemat 35.3 *Jeżeli równania $w_1 = w_2$ i $v_1 = v_2$ są równoważne i α jest dowolnym homomorfizmem zachowującym stałe, to równania $\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$ i $\alpha(v_1) = \alpha(v_2)$ są równoważne. Wobec tego równoważne równania mają równoważne μ-obrazy.* □

Jeżeli R jest równoważne równaniu $xAy \to yBx$, to μ-obraz R_μ równania R jest też równoważny $xAy \to yBx$. Fakt ten wynika (na dwa sposoby) z poprzednich lematów. Będziemy dowodzić implikację odwrotną.

35.2 Główna własność μ-obrazów

Lemat 35.4 *Niech R oznacza równanie* (26) *takie, że A i B są różnymi słowami stałymi tej samej długości, R_μ – μ-obraz równania R, czyli równanie $xAy\bar{\Phi} \rightleftharpoons yBx\bar{\Psi}$. Wtedy albo równanie R jest równoważne $xAy \to yBx$, albo R_μ jest istotne (w tym sprzeczne).*

Dowód. Dowód przez indukcję ze względu na liczbę zmiennych występujących w $\Phi\Psi$.

Jeżeli w słowie $\Phi\Psi$ nie występują zmienne, to Φ i Ψ są słowami stałymi i równanie R_μ jest równe R. Jeżeli $\Phi = \Psi$, to równanie R jest równoważne z $xAy = yBx$. W przeciwnym razie, równanie R_μ jest sprzeczne oraz – jako sprzeczne – jest istotne.

Przyjmijmy, że

$$\Phi = A_0[\xi_i A_i]_{i=1}^n \ \text{ oraz } \ \Psi = B_0[\eta_i B_i]_{i=1}^m,$$

gdzie A_i i B_i są słowami stałymi. Oczywiście,

$$\bar{\Phi} = A_0[\bar{\xi}_i A_i]_{i=1}^n \ \text{ oraz } \ \bar{\Psi} = B_0[\bar{\eta}_i B_i]_{i=1}^m.$$

Jeżeli $|\,A_0\,| \neq |\,B_0\,|$, to równanie R_μ jest istotne. Jeżeli $|\,A_0\,| = |\,B_0\,|$ i $A_0 \neq B_0$, to równanie R_μ jest sprzeczne, a więc też jest istotne. Możemy więc założyć, że $A_0 = B_0$. Lemat wystarczy dowieść w przypadku $A_0 = B_0 = \varepsilon$. Dalej więc zakładamy, że $A_0 = B_0 = \varepsilon$ (można też usunąć A_0 i B_0 z R i R_μ, ale to skomplikowałoby oznaczenia).

Jeżeli tylko w jednym słowie Φ lub Ψ występują zmienne, to żadne niepuste słowa nie są rozwiązaniem równania R, ani R_μ. Tak więc R_μ jest sprzeczne.

Dalej rozważamy przypadek, gdy w słowach Φ i Ψ występują zmienne, a więc $n, m > 0$.

Załóżmy teraz, że pierwsze występujące w tych słowach zmienne są identyczne. Wtedy (w jednym z przypadków)

$$\Phi = xA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^n \ \text{ oraz } \ \Psi = xB_1[\eta_i B_i]_{i=2}^m$$

W tej sytuacji, równanie R' dane wzorem

$$xAyA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^{n} \to yBxB_1[\eta_i B_i]_{i=2}^{m},$$

jest równoważne R i ma mniejszą liczbę zmiennych niż R. Wobec tego, równanie

$$xAyA_1[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^{n} \rightleftharpoons yBxB_1[\bar{\eta}_i B_i]_{i=2}^{m}$$

będące μ-obrazem R' jest równoważne równaniu R_μ i teza lematu wynika z założenia indukcyjnego dla R'.

Jeżeli pierwsze zmienne występujące w słowach Φ i Ψ są różne, to np.

$$\Phi = xA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^{n} \text{ oraz } \Psi = yB_1[\eta_i B_i]_{i=2}^{m}.$$

Wystarczy rozważać jedną z możliwości, przyjmijmy więc, ze zachodzą podane równości. Wtedy dla pewnego $q \geqslant 1$ równanie R ma postać

$$xAyxA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^{n} \to yBx[yB_i]_{i=1}^{q}[\eta_i B_i]_{i=q+1}^{m}$$

i albo $q = m$, albo $\eta_{q+1} = x$. Równanie R_μ jest równoważne układowi

$$xAy(xAyB)^{\mu}xA_1[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^{n} = yBx[xAyB_i]_{i=1}^{q}[\bar{\eta}_i B_i]_{i=q+1}^{m} \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 1: $\mu \geqslant q$.

Przypadek 1.1: $B_i \neq B$ dla pewnego $i = 1, \ldots, q-1$. W tym przypadku równanie R_μ jest istotne.

Przypadek 1.2: $B_i = B$ dla $i = 1, \ldots, q-1$. Wtedy równanie R_μ jest równoważne układowi złożonemu z równań

$$B(xAyB)^{\mu-q}xA_1[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^{n} = B_q[\bar{\eta}_i B_i]_{i=q+1}^{m} \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 1.2.1: $q = m$. Teraz układ równoważny R_μ ma postać

$$B(xAyB)^{\mu-q}xA_1[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^{n} = B_q \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx. \tag{27}$$

Przypadek 1.2.1.1: $B = B_q$. W tym przypadku, żadna para niepustych słów nie spełnia równania R_μ, więc jest to równanie sprzeczne.

Przypadek 1.2.1.2: $B \neq B_q$. Mnożąc równoważną postać R_μ z prawej strony przez x pokazujemy, że R_μ jest istotne.

Przypadek 1.2.2: $\eta_{q+1} = x$. Rozważamy więc równanie R_μ równoważne układowi

$$B(xAyB)^{\mu-q}xA_1[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^{n} = B_q\bar{x}B_{q+1}[\bar{\eta}_i B_i]_{i=q+2}^{m} \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 1.2.2.1: $B \neq B_q$. W tym przypadku równanie R_μ jest istotne.

Przypadek 1.2.2.2: $B = B_q$. Ponieważ $B_i = B$ dla $i = 1, \ldots, q$ oraz $\eta_{q+1} = x$, więc równanie R jest równoważne układowi

$$xA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^n = [yB]_{i=1}^q xB_{q+1}[\eta_i B_i]_{i=q+2}^m; \text{ oraz } xAy \to yBx$$

Zauważmy, że jeżeli $xAy = yBx$, to

$$(yB)^q x = x(Ay)^q.$$

Wobec tego R jest równoważne układowi

$$xA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^n = x[Ay]_{i=1}^q B_{q+1}[\eta_i B_i]_{i=q+2}^m \text{ oraz } xAy \to yBx$$

czyli układowi

$$A_1[\xi_i A_i]_{i=2}^n = [Ay]_{i=1}^q B_{q+1}[\eta_i B_i]_{i=q+2}^m \text{ oraz } xAy \to yBx$$

Niech R' oznacza równanie

$$xAyA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^n \to yBx(Ay)^q B_{q+1}[\eta_i B_i]_{i=q+2}^m.$$

Nietrudno zauważyć, że R' jest równoważne R, a równanie R_μ jest równoważne z μ-obrazem równania R'. Równanie R' ma mniej zmiennych niż równanie R. W tym przypadku, tezę otrzymujemy z założenia indukcyjnego dla R'.

Przypadek 2: $\mu < q$. Równanie R_μ jest teraz równoważne układowi

$$(\bar{y}B)^\mu xA_1[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^n = [\bar{y}B_i]_{i=1}^\mu \bar{y}B_{\mu+1}[\bar{y}B_i]_{i=\mu+2}^q[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^m \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 2.1: $B_i \neq B$ dla pewnego $i = 1, \ldots, \mu$. Także w tym przypadku równanie R_μ jest istotne.

Przypadek 2.2: $B_i = B$ dla $i = 1, \ldots, \mu$. Równanie R_μ teraz jest równoważne układowi

$$A_1[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^n = AyB_{\mu+1}[\bar{y}B_i]_{i=\mu+2}^q[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^m \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 2.2.1: $A \neq A_1$. W tym przypadku równanie R_μ jest istotne.

Przypadek 2.2.2: $A = A_1$. Możemy usunąć współczynniki A i A_1, więc R_μ jest równoważne układowi

$$[\bar{\xi}_i A_i]_{i=2}^n = yB_{\mu+1}[\bar{y}B_i]_{i=\mu+2}^q[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^m \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 2.2.2.1: $n = 1$. Równanie R_μ jest sprzeczne, a więc jest istotne.

Przypadek 2.2.2.2: $n > 1$ i $\xi_2 = x$. Równanie R_μ jest równoważne układowi

$$\bar{x}A_2[\bar{\xi}_i A_i]_{i=3}^n = yB_{\mu+1}[\bar{y}B_i]_{i=\mu+2}^q[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^m \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx,$$

czyli układowi postaci

$$xAyB(xAyB)^{\mu-1}x\ldots = yB_{\mu+1}[\bar{y}B_i]_{i=\mu+2}^q[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^m \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Po skorzystaniu z równości $xAy = yBx$ otrzymujemy, że R_μ jest równoważne układowi

$$yBxB(xAyB)^{\mu-1}x\ldots = yB_{\mu+1}[\bar{y}B_i]_{i=\mu+2}^q[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^m \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx,$$

czyli

$$BxB(xAyB)^{\mu-1}x\ldots = B_{\mu+1}[\bar{y}B_i]_{i=\mu+2}^q[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^m \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 2.2.2.2.1: $B \neq B_{\mu+1}$. Równanie R_μ jest istotne.

Przypadek 2.2.2.2.2: $B = B_{\mu+1}$. Równanie R_μ jest równoważne układowi

$$xB(xAyB)^{\mu-1}x\ldots = [xAyB_i]_{i=\mu+2}^{q}[\bar{\xi}_i B_i]_{i=q+1}^{m} \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Przypadek 2.2.2.2.2.1: $m = \mu + 1$. Równanie R jest sprzeczne, a więc jest istotne.

Przypadek 2.2.2.2.2.2: $m > \mu + 1$. Równanie R_μ jest równoważne układowi o postaci

$$xB(xAyB)^{\mu-1}x\ldots = xA\ldots \text{ oraz } xAy \rightleftharpoons yBx.$$

Ten układ jest sprzeczny, gdyż $A \neq B$, a więc R_μ jest istotne.

Przypadek 2.2.2.3: $n > 1$ i $\xi_2 = y$. Przypomnijmy, że równanie R jest równoważne układowi

$$xA_1[\xi_i A_i]_{i=2}^{n} = [yB_i]_{i=1}^{q}[\eta_i B_i]_{i=q+1}^{m} \text{ oraz } xAy \to yBx.$$

W rozważanym przypadku zachodzą warunki $n > 1$, $\xi_2 = y$, $A = A_1$ oraz $B_i = B$ dla $i = 1, \ldots, \mu$. Dzięki temu, równanie R jest równoważne układowi

$$xAyA_2[\xi_i A_i]_{i=3}^{n} = yB[yB_i]_{i=2}^{q}[\eta_i B_i]_{i=q+1}^{m} \text{ oraz } xAy \to yBx.$$

Jeżeli skorzystamy z równości $xAy = yBx$ i usuniemy yB, to otrzymamy, że R jest równoważne z

$$xA_2[\xi_i A_i]_{i=3}^{n} = [yB_i]_{i=2}^{q}[\eta_i B_i]_{i=q+1}^{m} \text{ oraz } xAy \to yBx.$$

Weźmy równanie R'

$$xAyxA_2[\xi_i A_i]_{i=3}^{n} \to yBx[yB_i]_{i=2}^{q}[\eta_i B_i]_{i=q+1}^{m}.$$

Równanie to jest równoważne z R i ma mniej zmiennych niż R. Wobec tego, μ-obrazy równań R i R' są równoważne. Korzystając z założenia indukcyjnego dla R' otrzymujemy tezę. $\square$

35.3 Testowanie równoważności z $xAy \to yBx$

Dowód lematu 35.4 zawiera opis procedury, która może zostać wykorzystana do testowania, czy równanie R postaci $xAy\ldots \to yBx\ldots$ jest równoważne $xAy \to yBx$. Po wykonaniu tej procedury otrzymujemy jedną z dwóch informacji: albo R jest równoważne $xAy \to yBx$, albo równanie R_μ jest istotne (lub sprzeczne). Aby tą procedurę można było wykorzystać do testowania interesującej nas własności powinniśmy jeszcze wiedzieć, że jeżeli R_μ jest istotne, to R nie jest równoważne $xAy \to yBx$. Naszym celem jest wykazanie tego faktu.

Lemat 35.5 *Słowo XY jest proste wtedy i tylko wtedy, gdy słowo YX jest proste.* $\square$

Lemat 35.6 *Jeżeli słowa X^n i Y^m mają wspólny prefiks długości $|XY|$, to X i Y komutują.*

Dowód. Załóżmy, że $| X | \leqslant | Y |$. Wtedy $Y = X^k P$ dla pewnego prefiksu P słowa X, $X^{k+1} = YQ$ dla pewnego sufiksu Q słowa X. Oczywiście $X = PQ$. Niech $X^{k+1}R$ będzie wspólnym prefiksem długości $| XY |$ słów Y^2 i X^{k+2}. Tak więc R jest prefiksem X, długość QR jest równa długości $X = PQ$. Stąd P i R są prefiksami X tej samej długości, więc $P = R$. Zauważmy także $QR = QP$ oraz $X = PQ$ są tej samej długości prefiksami Y. Wobec tego, $PQ = QP$ i – w konsekwencji – P i Q są potęgami pewnego słowa S. Stąd wynika, że słowa X i Y też są potęgami S, a więc komutują. □

Wniosek 35.7 *Przypuśćmy, że mamy słowo X, prefiks Y słowa X i liczbę $n \geqslant 2$. Jeżeli słowo X^nY nie jest proste, to X i Y komutują.*

Dowód. Przypuśćmy, że słowo X^nY nie jest proste, a więc $X^nY = S^m$ dla pewnego S i $m \geqslant 2$ oraz $S^m \leqslant X^{n+1}$. Ponieważ dłuższe ze słów X lub S występuje w słowie S^m przynajmniej dwa razy, więc $| XS | \leqslant | S^m |$ i teza wynika z lematu 35.6.

Wniosek 35.8 *Jeżeli liczby l, m oraz n są większe od 0 i słowo $((X^lY)^mX)^nX^lY$ nie jest proste, to X i Y komutują.*

Dowód. Jeżeli $n \geqslant 2$, to korzystamy z wniosku 35.7 dla słów $X' = (X^lY)^mX$ i $Y' = X^lY$. Wobec tego, słowa $(X^lY)^mX$ i X^lY komutują. Stąd łatwo wynika, że komutują słowa X i X^lY. Powtarzając rozumowanie otrzymujemy, że komutują także X i Y.

Jeżeli $n = 1$, to na mocy lematu 35.5 słowo $(X^lY)^{m+1}X$ też nie jest proste. Stąd i z wniosku 35.7 otrzymujemy, że słowa X^lY i X komutują. Wobec tego, także X i Y komutują. □

Lemat 35.9 *Jeżeli słowa X i Y nie komutują i $k \geqslant 3$, to słowo $f(X, Y, k, n)$ jest proste.*

Dowód. Zauważyć, że $f(X, Y, 3, n) = ((X^{n_0}Y)^{n_1}X)^{n_2}X^{n_0}Y$. Na podstawie lematu 34.1 także słowo $f(X, Y, k, n)$ dla $k \geqslant 3$ daje się przedstawić w postaci $f(X', Y', 3, n')$. Teza wynika z wniosku 35.8. □

Wniosek 35.10 *Jeżeli $PQR \neq RQP$ i $k \geqslant 3$, to słowo $f(QR, QP, k, n)$ jest proste.* □

Lemat 35.11 *Jeżeli $A \neq B$, to istotne równanie* (26) *nie jest równoważne $xAy \to yBx$.*

Dowód. Przypuśćmy, że mamy równanie R postaci (26), które jest równoważne z równaniem

$$xAyUz_1 \ldots \to yBxVz_2 \ldots$$

takim, że $U \neq V$. Możemy dodatkowo założyć, że R jest niesprzeczne. Weźmy dowolne rozwiązanie (X, Y) tego równania. Zauważmy, że $UY \ldots = VY \ldots$ Jest to oczywiste, gdy $z_1 = z_2 = y$. W pozostałych przypadkach trzeba dodatkowo zauważyć, że $X = YW$ dla pewnego W. Ponieważ $U \neq V$, więc $U < V$ lub $V < U$, i dalej wystarczy rozważać tylko pierwszy przypadek. Wtedy $V = US$ dla pewnego niepustego słowa S oraz $Y \ldots = SY \ldots$ Stąd $Y = S^tS'$ dla pewnej liczby t i pewnego słowa $S' < S$.

Jeżeli równanie R jest równoważne $xAy \to yBx$, to zgodnie z twierdzeniem 34.8 istnieją słowa P, Q i R takie, że QP i QR nie komutują oraz dla wszystkich parzystych liczb k i wszystkich n słowa $Y = g(QR, QP, k+1, n)Q$ są współrzędnymi rozwiązania równania R i są równe S^tS' dla odpowiedniego t. Weźmy parzystą liczbę $k \geqslant 3$ taką, że nierówność

$$| \, f(QR, QP, k, n) \, | > | \, S \, |$$

jest prawdziwa dla wszystkich n i liczbę n taką, że $n_k \geqslant 2$. Dla pewnego $t > 2$ mamy

$$Y = g(QR, QP, k+1, n)Q = (f(QR, QP, k, n))^{n_k} g(QR, QP, k-1,)Q = S^tS'.$$

Z lematu 35.6 wynika, że słowa $f(QR, QP, k, n)$ i S są potęgami pewnego słowa. Ponieważ wykładnik potęgi r?ownej $f(QR, QP, k, n)$ jest większy od wykładnika potęgi równej S, więc słowo $f(QR, QP, k, n)$ nie jest proste. To jednak przeczy wnioskowi 35.10. □

Wniosek 35.12 *Jeżeli $A \neq B$ i równanie* (26) *ma istotny μ-obraz, to nie jest równoważne równaniu $xAy \to yBx$.*

Dowód. Jeżeli równanie jest równoważne z $xAy \to yBx$, to jego μ-obraz też jest równoważny z $xAy \to yBx$ i – na mocy lematu 35.11 – nie jest istotny. □

35.4 Niesprzeczność równań $xAy \ldots \to yBx \ldots$

Przypuśćmy, że mamy dane równanie R postaci $xAy \ldots \to yBx \ldots$ i chcemy odpowiedzieć na pytanie, czy ma rozwiązanie.

Najpierw sprawdzamy, czy R jest równoważne $xAy \to yBx$. Dzięki wnioskowi 35.12 można to sprawdzić posługując się procedurą z lematu 35.4. Jeżeli tak jest, to sprawdzamy niesprzeczność R korzystając z twierdzenia 34.9 Markowa.

W przeciwnym razie, równanie R zastępujemy μ-obrazami R (i pewną listą równań z jedną zmienną). W rozważanym przypadku wszystkie μ-obrazy równanie R są istotne. W ten sposób badanie nieprzeczności równanie postaci $xAy \ldots \to yBx \ldots$ zostało sprowadzone do badanie niesprzeczności istotnego równania tej postaci.

Przypuśćmy więc, że R jest istotnym równaniem postaci $xAy \ldots \to yBx \ldots$. Równanie R zastępujemy (ponownie) μ-obrazami i równaniami z jedną zmienną. Musimy więc jeszcze umieć sprawdzać, czy μ-obraz istotnego równania jest niesprzeczny.

Przypuśćmy, że μ-obraz R_μ istotnego równania R ma rozwiązanie (X, Y). Wtedy XAY jest krótszą składową rozwiązania równania R. Ponieważ R jest istotne, więc $XAY = S^tS'$ dla pewnego słowa sufiksu S współczynnika równania R i pewnych $S' < S$ i t. Zauważmy, że słowa S i S' należą do pewnego skończonego zbioru słów i możemy analizować wszystkie możliwe pary takich słów. Jeżeli analizujemy słowa S i S', to mamy $X = S^uS_1$ i $Y = S_2S^vS'$ dla podsłów S_1 i S_2 słowa S i pewnych liczb naturalnych u i v. Jeżeli teraz podstawimy $X = S^uS_1$ i $Y = S_2S^vS'$ w równaniu R_μ i podsłowa S_1, S_2 i S' uznamy za części współczynników, to równanie R_μ przekształci się w równanie wykładnicze postaci

$$\Phi'(S^u, S^v) = \Psi'(S^u, S^v).$$

Nietrudno zauważyć, że R_μ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje słowo S będące sufiksem współczynników R, istnieją podsłowa S_1, S_2 i S' słowa S i istnieją liczby u i v spełniające podane równanie wykładnicze z dwoma zmiennymi. W ten sposób badanie niesprzeczności μ-obrazu istotnego równania sprowadziliśmy do badania niesprzeczności zbioru wykładniczych równań z dwoma zmiennymi.