33 Alg. Chmielewskiego, cd. Równania $xAy\ldots = yAx\ldots$

33.1 Równania $xAy = yAx$

Najpierw rozwiążemy równanie $xAy = yAx$. W tym celu wystarczy dopisać A i otrzymujemy, że $xAyA = yAxA$. Stąd $xA = Q^n$ i $yA = Q^m$. Teraz są dwie możliwości: albo Q jest sufiksem A i wtedy $A = VQ^t$, $Q = UV$, $x = (UV)^kU$ oraz $y = (UV)^lU$, albo odwrotnie, $Q = UA$ i wtedy $x = (UA)^kU$ i $y = (UA)^lU$. W pierwszym przypadku, słowa U i V można wskazać na skończenie wiele sposobów, w drugim – niekoniecznie.

33.2 Przypadek ogólny

Rozważamy równanie postaci

$$xAy\Phi(x,y) = yAx\Psi(x,y), \tag{19}$$

gdzie A jest słowem stałym. Równanie to jest równoważne układowi

$$xAy = yAx \text{ oraz } \Phi(x,y) = \Psi(x,y)$$

Równanie $xAy = yAx$ ma trzy rodzaje rozwiązań:

1) $x = (UV)^kU$ oraz $y = (UV)^lU$, gdzie $A = VQ^t$ dla $t > 0$ i $Q = UV$,

2) $x = (UA)^kU$ i $y = (UA)^lU$ dla pewnego U takiego, że $Q = UA$ jest proste; te rozwiązanie dzielą się na dwa rodzaje:

   (a) takie, że $U = S^tS'$ dla pewnego słowa S o długości $\leqslant M$ i pewnego $S' \leqslant S$ (M jest tu pewną liczbą zależną od Φ i Ψ, która później zostanie sprecyzowana),

   (b) pozostałe

Równanie (19) rozwiązujemy szukając osobno rozwiązań poszczególnych rodzajów.

Aby znaleźć rozwiązania pierwszego rodzaju, znajdujemy wszystkie odpowiednie słowa Q, U i V (jest skończenie wiele takich układów słów), a następnie dla każdej trójki słów szukamy liczb k i l rozwiązując jednopiętrowe równanie wykładnicze

$$\Phi'(Q^k, Q^l) = \Psi'(Q^k, Q^l)$$

z dwoma zmiennymi k i l, gdzie Q jest rozpatrywanym słowem, a Φ' i Ψ' powstają z Φ i Ψ przez dopisanie w odpowiednich miejscach słów U.

W przypadku 2) rozważamy równanie

$$\Phi((uA)^ku, (uA)^lu) = \Psi((uA)^ku, (uA)^lu) \tag{20}$$

z pomocniczą zmienną słowową u i dwoma zmiennymi naturalnymi k i l.

W przypadku 2(a) szukamy rozwiązań U równania (20) takich, że $U = S^tS'$ dla pewnego słowa S, $|\,S\,| \leqslant M$ i pewnych t i $S' < S$. Ponieważ takich trójek słów S, S' i S'' jest skończenie wiele, więc rozwiązań szukamy osobno dla każdej z tych trójek. Przyjmijmy, że $T = S'A$. Tym razem zadanie sprowadza się do rozwiązania dwupiętrowego równania wykładniczego

$$\Phi'((S^tT)^kS^t, (S^tT)^lS^t) = \Psi'((S^tT)^kS^t, (S^tT)^lS^t)$$

z trzema zmiennymi t, k i l, gdzie S i T są stałymi słowami (Φ' w porównaniu z Φ zawiera też niektóre wystąpienia słowa T). Dla takiego równania jest istotne, czy słowa S i T komutują. Możemy rozpatrywać tylko takie słowa U, że UA jest proste. Nietrudno zauważyć, że warunek ten implikuje, że słowa S i T nie komutują.

W przypadku 2(b) przydatny będzie następujący lemat:

Lemat 33.1 *Niech U będzie rozwiązaniem równania*

$$A_0[uA_i]_{i=1}^n = B_0[uB_i]_{i=1}^m$$

oraz

$$M = \max\{|A_0|, \ldots, |A_n|, |B_0|, \ldots, |B_m|\}.$$

Jeżeli strony tego równania są różne, to słowo U jest postaci S^tS' dla pewnego słowa S długości $\leqslant M$ i pewnych t i $S' < S$.

Dowód. Najpierw usuwamy wspólny prefiks obu stron rozważanego równania. Ponieważ równanie ma rozwiązanie, więc $UX = SUY$ dla pewnego niepustego sufiksu jednego ze słów $A_0, \ldots, A_n$ lub $B_0, \ldots, B_m$. Oczywiście, $|S| \leqslant M$ i $U = S^tS'$ dla pewnych t i $S' < S$. □

Słowa Φ i Ψ traktujemy jako konkatenację zmiennych i rozdzielających je słów stałych (tzw. współczynników). Niech teraz M oznacza maksimum długości współczynników słów Φ i Ψ. Rozwiązywanie równania (19) w przypadku 2(b) wykorzystuje z następujący wniosek:

Wniosek 33.2 *Niech k i l będą dowolnymi liczbami. Istnieje słowo U, które wraz z liczbami k i l tworzy rozwiązanie równania* (20) *i nie jest postaci S^tS' dla pewnego słowa S długości $\leqslant M$ i pewnych t i $S' < S$, wtedy i tylko wtedy, gdy liczby k i l są rozwiązaniem równania wykładniczego* (20)*, w którym symbol u jest stałą literą.*

Wniosek ten, pozwala sprowadzić szukanie rozwiązań trzeciego rodzaju dla zdefiniowanej wyżej liczby M do szukania rozwiązań jednopiętrowego równania wykładniczego z dwoma zmiennymi (nad alfabetem z dodatkową stałą).

34 Równania $xAy \to yBx$

34.1 Kodowanie ciągów liczb naturalnych

Zakładamy, że dowolna liczba naturalna n koduje pewien nieskończony ciąg DODATNICH liczb naturalnych $n_0, n_1, n_2, \ldots$ i ten sposób kodowania ma następującą własność: dla każdego skończonego ciągu $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ dodatnich liczb naturalnych istnieje liczba n taka, że $a_i = n_i$ dla wszystkich $i < k$.

34.2 Funkcje f i g

Niech f oznacza funkcję zdefiniowaną dla słów X i Y oraz liczb całkowitych $k \geqslant -1$ i $n \geqslant 0$ wzorem

$$f(X, Y, k, n) = \begin{cases} Y & \text{jeżeli } k = -1 \\ X & \text{jeżeli } k = 0 \\ (f(X, Y, k-1, n))^{n_{k-1}} f(X, Y, k-2, n) & \text{dla } k \geqslant 1. \end{cases}$$

Zauważmy, że dla $k \leqslant 0$ definicja $f(X, Y, k, n)$ nie zależy od n, a dla $k > 0$ – zależy od $n_0, n_1, \ldots, n_{k-1}$. W szczególności, mamy

$$f(X, Y, 1, n) = (f(X, Y, 0, n))^{n_0} f(X, Y, -1, n) = X^{n_0} Y$$

oraz

$$f(X, Y, 2, n) = (f(X, Y, 1, n))^{n_1} f(X, Y, 0, n) = (X^{n_0} Y)^{n_1} X.$$

Z podanych wzorów wynika, że jeżeli $k \geqslant 1$ jest nieparzyste, to

$$f(X, Y, k, n) = \ldots f(X, Y, k-2, n) = \ldots = \ldots f(X, Y, 1, n) = \ldots XY,$$

a dla parzystych $k \geqslant 2$ zachodzi

$$f(X, Y, k, n) = \ldots f(X, Y, k-2, n) = \ldots = \ldots f(X, Y, 2, n) = \ldots YX.$$

Przyjmijmy, że

1) $g(X, Y, k, n)$ powstaje z ciągu $f(X, Y, k, n)$ przez usunięcie ostatnich $\mid XY \mid$ liter,

2) $\langle X, Y \rangle_k$ jest słowem takim, że $f(X, Y, k, n) = g(X, Y, k, n)\langle X, Y \rangle_k$.

Mamy więc $\langle X, Y \rangle_k = YX$ dla parzystych $k \geqslant 2$, $\langle X, Y \rangle_k = XY$ dla nieparzystych $k \geqslant 1$, $\langle X, Y \rangle_0 = X$ oraz $\langle X, Y \rangle_{-1} = Y$.

34.3 Interpretacja funkcji f

Zdefiniowaliśmy już homomorfizmy

$$\varphi_{xy}(z) = \begin{cases} xy & \text{jeżeli } z = y \\ z & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

oraz – analogicznie – φ_{yx}. Przypuśćmy, że wędrujemy po grafie równania $\mathcal{G}_V$. Wtedy jest naturalne, że chcemy opisać złożenie

$$F = \varphi_{xy}^{n_0} \varphi_{yx}^{n_1} \cdots \varphi_{xy}^{n_k} \varphi_{yx}^{n_{k+1}}.$$

Przyjmijmy, że

$$F_1 = \varphi_{xy}^{n_0} \varphi_{yx}^{n_1} \cdots \varphi_{xy}^{n_k}$$

oraz

$$F_2 = \varphi_{xy}^{n_0}\varphi_{yx}^{n_1}\dots\varphi_{yx}^{n_{k-1}}.$$

Zauważmy, że $F(y) = F_1(y)$, $F_1(x) = F_2(x)$ oraz

$$F(x) = F_1\varphi_{yx}^{n_{k+1}}(x) = F_1((y)^{n_{k+1}}x) = (F_1(y))^{n_{k+1}}F_1(x) = (F_1(y))^{n_{k+1}}F_2(x).$$

Funkcja F zależy od x i y, oraz ciągu $n_0, \dots, n_{k+1}$, który uważamy za ciąg o długości $k+2$ wyznaczony przez liczbę n. Przyjmijmy, że $F = \varphi_{x,y,k+2,n}$. Zauważmy, że $F_1 = \varphi_{x,y,k+1,n}$, $F_2 = \varphi_{x,y,k,n}$ oraz, że definicja F wymaga założenia, że k jest parzyste. Można też podać analogiczne definicje dla nieparzystych liczb k i dowieść analogiczne wzory. Wobec tego, dla parzystych k

$$\varphi_{x,y,k+2,n}(x) = (\varphi_{x,y,k+1,n}(y))^{n_{k+1}}\varphi_{x,y,k,n}(x), \tag{21}$$

$$\varphi_{x,y,k+1,n}(y) = (\varphi_{x,y,k,n}(x))^{n_k}\varphi_{x,y,k-1,n}(y), \tag{22}$$

$$\varphi_{x,y,k+2,n}(y) = \varphi_{x,y,k+1,n}(y), \tag{23}$$

$$\varphi_{x,y,k+1,n}(x) = \varphi_{x,y,k,n}(x), \tag{24}$$

oraz

$$\varphi_{x,y,0,n} = id \ \text{ oraz } \ \varphi_{x,y,1,n} = \varphi_{xy}^{n_0}. \tag{25}$$

Podane równości są rekurencyjną definicją homomorfizmów $\varphi_{x,y,k,n}$ dla $k \geqslant 0$.

Wprowadźmy jeszcze oznaczenia wartości tych homomorfizmów. Niech f będzie ciągiem słów występujących w obliczeniu $F(x)$, a więc zawierającym $F_1(y)$, $F_2(x)$ itd. Podobnie, niech f_1 pozwala obliczać $F(y)$. Przyjmijmy więc, że

$$f(x,y,k,n) = \begin{cases} \varphi_{x,y,k,n}(x) & \text{jeżeli } k \text{ jest liczbą parzystą} \\ \varphi_{x,y,k,n}(y) & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

oraz

$$f_1(x,y,k,n) = \begin{cases} \varphi_{x,y,k,n}(y) & \text{jeżeli } k \text{ jest liczbą parzystą} \\ \varphi_{x,y,k,n}(x) & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Najpierw zauważmy, że z wzorów (23) i (24) wynika dla $k \geqslant 0$ równość

$$f_1(x,y,k+1,n) = f(x,y,k,n).$$

Dodatkowo mamy

$$f_1(x,y,0,n) = y,$$

co sugeruje rozszerzenie definicji f tak, aby poprzednia równość była prawdziwa również dla $k+1=0$, a więc tak, aby

$$f(x,y,-1,n) = y.$$

Po takim roszerzeniu definicji f, funkcja f_1 jest niepotrzebna i można dowieść, że f jest funkcją zdefiniowaną już w rozdziale 34.2. Mamy bowiem bezpośrednio z definicji $f(x,y,-1,n) = y$. Z wzoru (25) wynika, że

$$f(x,y,0,n) = \varphi_{x,y,0,n}(x) = x.$$

Dla parzystych $k \geqslant 1$ z wzoru (21) wynika, że

$$f(x,y,k,n) = \varphi_{x,y,k,n}(x) = (\varphi_{x,y,k-1,n}(y))^{n_{k-1}}\varphi_{x,y,k-2,n}(x) =$$
$$(f(x,y,k-1,n))^{n_{k-1}} f(x,y,k-2,n)$$

i podobnie z wzoru (22) dla k nieparzystych.

Znając funkcję f można wyliczyć homomorfizmy $\varphi_{x,y,k,n}$. Zauważmy, że dla $k \geqslant 0$

$$\varphi_{x,y,k,n}(x) = \begin{cases} f(x,y,k,n) & \text{jeżeli } k \text{ jest liczbą parzystą} \\ f(x,y,k-1,n) & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

oraz

$$\varphi_{x,y,k,n}(y) = \begin{cases} f(x,y,k-1,n) & \text{jeżeli } k \text{ jest liczbą parzystą} \\ f(x,y,k,n) & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Niech $\zeta(x) = y$ i $\zeta(y) = x$. Wtedy $\zeta\varphi_{xy} = \varphi_{yx}\zeta$. Dzięki temu wzorowi możemy również analizować złożenia postaci

$$\varphi_{y,x,k,n} = \varphi_{yx}^{n_0}\varphi_{xy}^{n_1}\dots\varphi_{..}^{n_{k-1}}.$$

Zachodzą bowiem równości, $\zeta\varphi_{x,y,k,n} = \varphi_{y,x,k,n}\zeta$ oraz $\zeta\varphi_{x,y,k,n}\zeta = \varphi_{y,x,k,n}$.

Zauważmy też, że dla dowolnego homomorfizmu α określonego w zbiorze $\{x,y\}^*$ zachodzi równość

$$\alpha f(x,y,k,n) = f(\alpha(x),\alpha(y),k,n).$$

Można ją łatwo dowieść przez indukcję.

34.4 Składanie homomorfizmów $\varphi_{x,y,k,n}$

Właściwie podamy opis złożeń takich homomorfizmów za pomocą funkcji f.

Lemat 34.1 *Przypuśćmy, że dla liczby n kodującej ciąg długości $k+l$ liczba m koduje ciąg $n_k, n_{k+1}, \dots, n_{l-1}$. Wtedy*

$$f(x,y,k+l,n) = f(f(x,y,k,n), f(x,y,k-1,n), l, m).$$

Dowód. Wynika to ze związku między słowami $f(x,y,k,n)$ i homomorfizmami $\varphi_{x,y,k,n}$. Zauważmy, że dla odpowiedniego z

$$f(x,y,k+l,n) = \varphi_{x,y,k+l,n}(z) = \begin{cases} \varphi_{x,y,k,n}\varphi_{x,y,l,m}(z) & \text{jeżeli } k \text{ jest liczbą parzystą} \\ \varphi_{x,y,k,n}\varphi_{y,x,l,m}(z) & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Stąd, analizując wszystkie możliwości, otrzymujemy tezę. □

Lemat 34.2 *Przypuśćmy, że mamy liczby $k, l > 0$ oraz n, m i p takie, że liczba n koduje ciąg $p_0, p_1, \dots, p_{k-2}, p_{k-1} + m_0, m_1, \dots, m_{l-1}$ długości $k+l-1$. Wtedy*

$$f(x,y,k+l-1,n) = f(f(x,y,k-1,p), f(x,y,k,p), l, m).$$

Dowód. Wynika to ze związku między słowami $f(x,y,k,n)$ i homomorfizmami $\varphi_{x,y,k,n}$. Na podstawie założeń o liczbach kodujących mamy

$$\varphi_{x,y,k+l-1,n} = \begin{cases} \varphi_{x,y,k,p}\varphi_{y,x,l,m} & \text{jeżeli } k \text{ jest liczbą parzystą} \\ \varphi_{x,y,k,n}\varphi_{x,y,l,m} & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Przypadek 1: $k+l-1$ jest liczbą parzystą. Wtedy

$$f(x,y,k+l-1,n) = \varphi_{x,y,k+l-1,n}(x).$$

Przypadek 1.1: k jest liczbą nieparzystą. Tak więc l jest parzysta oraz

$$\begin{aligned} &\varphi_{x,y,k+l-1,n}(x) = \varphi_{x,y,k,p}\varphi_{x,y,l,m}(x) = \varphi_{x,y,k,p}f(x,y,l,m) = \\ &= f(\varphi_{x,y,k,p}(x), \varphi_{x,y,k,p}(y), l, m) = f(f(x,y,k-1,p), f(x,y,k,p), l, m). \end{aligned}$$

Przypadek 1.2: k jest liczbą parzystą. Teraz l jest nieparzysta oraz

$$\begin{aligned} &\varphi_{x,y,k+l-1,n}(x) = \varphi_{x,y,k,p}\varphi_{y,x,l,m}(x) = \varphi_{x,y,k,p}f(y,x,l,m) = \\ &= f(\varphi_{x,y,k,p}(y), \varphi_{x,y,k,p}(x), l, m) = f(f(x,y,k-1,p), f(x,y,k,p), l, m). \end{aligned}$$

Przypadek 2: $k+l-1$ jest liczbą nieparzystą. Wtedy

$$f(x,y,k+l-1,n) = \varphi_{x,y,k+l-1,n}(y).$$

Przypadek 2.1: k jest liczbą nieparzystą. Tak więc l jest nieparzysta oraz

$$\begin{aligned} &\varphi_{x,y,k+l-1,n}(y) = \varphi_{x,y,k,p}\varphi_{x,y,l,m}(y) = \varphi_{x,y,k,p}f(x,y,l,m) = \\ &= f(\varphi_{x,y,k,p}(x), \varphi_{x,y,k,p}(y), l, m) = f(f(x,y,k-1,p), f(x,y,k,p), l, m). \end{aligned}$$

Przypadek 2.2: k jest liczbą parzystą. Teraz l jest parzysta oraz

$$\begin{aligned} &\varphi_{x,y,k+l-1,n}(y) = \varphi_{x,y,k,p}\varphi_{y,x,l,m}(y) = \varphi_{x,y,k,p}f(y,x,l,m) = \\ &= f(\varphi_{x,y,k,p}(y), \varphi_{x,y,k,p}(x), l, m) = f(f(x,y,k-1,p), f(x,y,k,p), l, m). \quad \square \end{aligned}$$

34.5 Postać rozwiązań równania $xay = ybx$

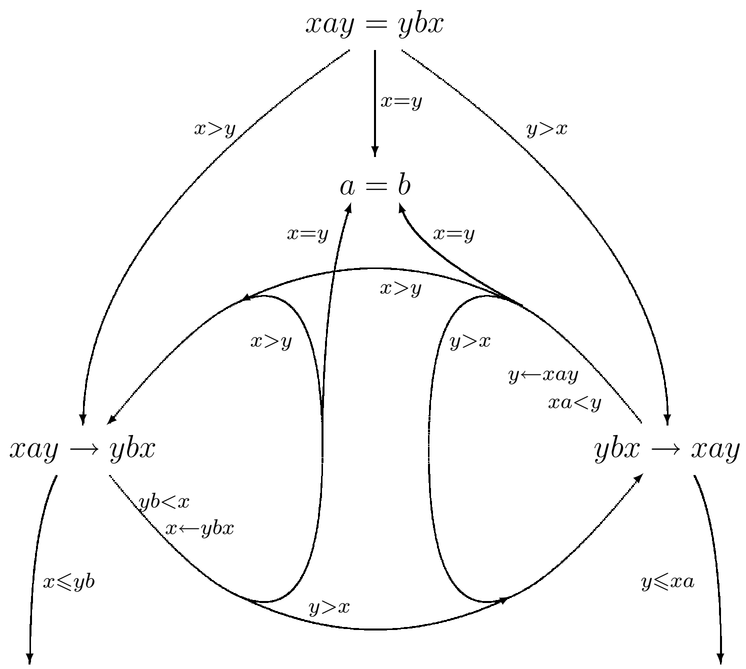
Fragment grafu wyznaczonego przez równanie $xay = ybx$ (a i b to zmienne lub słowa) jest przedstawiony na rysunku 2.

Zauważmy, że krawędzie w tym grafie są etykietowane homomorfizmami

$$\varphi_{xay}(z) = \begin{cases} xay & \text{jeżeli } z = y, \\ z & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

oraz – analogicznie zdefiniowanym– φ_{ybx}. Istotne więc są złożenia takich homomorfizmów. Przyjmijmy, że homomorfizm ξ spełnia równości $\xi(x) = xa$ oraz $\xi(y) = yb$. Dla tych homomorfizmów mamy

$$\varphi_{xay}\xi = \xi\varphi_{xy} \text{ oraz } \varphi_{ybx}\xi = \xi\varphi_{yx}.$$



Rysunek 2: Graf równania $xay = ybx$

Aby to dowieść, wystarczy wyliczyć obie strony tych równości dla argumentów x i y. Wprowadźmy oznaczenia takich złożeń i zauważmy, że

$$\varphi_{xa,yb,k,n}\xi = \varphi^{n_0}_{xay}\varphi^{n_1}_{ybx}\cdots\varphi^{n_{k-1}}_{\dots}\xi = \xi\varphi_{x,y,k,n}.$$

Lemat 34.3 *Przypuśćmy, że wędrujemy po grafie równania $xay \to ybx$ (albo $xay\ldots = ybx\ldots$) wzdłuż ścieżki wyznaczonej przez rozwiązanie (A, B, X_0, Y_0) i po wykonaniu kolejno $n_{k-1}, n_{k-2}, \ldots, n_0$ razy odpowiednich pętli wyznaczyliśmy rozwiązanie (A, B, X, Y) równania z odpowiedniego wierzchołka. Wtedy*

1) jeżeli k jest liczbą parzystą, to

$$X_0A = f(XA, YB, k, n) \;\; i \;\; Y_0B = f(XA, YB, k-1, n),$$

2) jeżeli k jest liczbą nieparzystą, to

$$X_0A = f(YB, XA, k, n) \;\; i \;\; Y_0B = f(YB, XA, k-1, n).$$

Dowód. Przypuśćmy, że α to dane rozwiązanie równania $xay \to ybx$ (czyli $\alpha(x) = X_0$ i $\alpha(y) = Y_0$), a α' to rozwiązanie końcowego równania ($\alpha'(x) = X$ i $\alpha'(y) = Y$).

Załóżmy, że liczba k jest parzysta. W tym przypadku przejście od pierwszego do ostatniego równania odbywa się wzdłuż ścieżki etykietowanej $\varphi_{xa,yb,k,n}$. Wobec tego,

$$\alpha = \alpha' \varphi_{xa,yb,k,n}.$$

Stąd

$$X_0 A = \alpha(xa) = \alpha' \varphi_{xa,yb,k,m} \xi(x) = \alpha' \xi \varphi_{x,y,k,m}(x) =$$
$$= \alpha'(\xi(f(x,y,k,n))) = \alpha'(f(xa,yb,k,n)) = f(XA, YB, k, n).$$

Podobnie,

$$Y_0 B = \alpha(yb) = \alpha' \varphi_{xa,yb,k,m}(yb) = \alpha'(f(xa,yb,k-1,n)) = f(XA, YB, k-1, n).$$

W drugim przypadku dowód jest analogiczny. □

Lemat 34.4 *Przypuśćmy, że rozważamy równanie $xay \to ybx$ i rozwiązanie (X,Y,A,B) tego równania takie, że $YB \geqslant X > Y$. Wtedy istnieją słowa P, Q i R, oraz liczba t takie, że $A = PQR \neq Q$, $B = RQP$, $Y = (QR)^t Q$ oraz $X = (QR)^{t+1} Q$.*

Dowód. Weźmy X' takie, że $X = YX'$. Dla tego X' mamy $B \geqslant X'$ oraz $BYX' = X'AY$. Przyjmijmy, że $B = X'P$. Wtedy także $PYX' = AY$. Ponieważ długości A i B są identyczne, więc $A = PS$ dla pewnego S. Zauważmy, że $YX' = SY$. Ponieważ $X' \neq \varepsilon$, więc $Y = S^t Q$ dla pewnego $Q < S$. Niech $S = QR$. Od razu zauważmy, że $R \neq \varepsilon$. Wtedy $S^t Q X' = S S^t Q$. Tym bardziej, $QX' = SQ = QRQ$. Tak więc $X' = RQ$. W ten sposób otrzymujemy, że $A = PQR$, $B = RQP$, $Y = (QR)^t Q$ oraz $X = YX' = (QR)^t Q X' = (QR)^t QRQ = (QR)^{t+1} Q$. □

Wniosek 34.5 *Jeżeli (X,Y,A,B) jest rozwiązaniem równania $xay \to ybx$ takim, że $YB \geqslant X > Y$, to istnieją słowa P, Q i R oraz liczba $n \in N$ taka, że $A = PQR \neq Q$, $B = RQP$, $XA = f(QR, QP, 2, n)$ i $YB = f(QR, QP, 1, n)$.*

Dowód. Korzystając z lematu 34.4 znajdujemy słowa P, Q i R i liczbę t taką, że $A = PQR \neq Q$, $B = RQP$, $Y = (QR)^t Q$ oraz $X = (QR)^{t+1} Q$. Niech n będzie liczbą taką, że $n_0 = t+1$ i $n_1 = 1$. Wtedy

$$f(QR, QP, 1, n) = (f(QR, QP, 0, n))^{n_0} f(QR, QP, -1, n) = (QR)^{t+1} QP = YB.$$

Podobnie obliczamy X:

$$f(QR, QP, 2, n) = (f(QR, QP, 1, n))^{n_1} f(QR, QP, 0, n) = (QR)^{t+1} QPQR = XA. \ \square$$

Wniosek 34.6 *Jeżeli (X,Y,A,B) jest rozwiązaniem równania $ybx \to xay$ takim, że $XA \geqslant Y > X$, to istnieją słowa P, Q i R oraz liczba $n \in N$ taka, że $A = PQR \neq Q$, $B = RQP$, $YB = f(QP, QR, 2, n)$ i $XA = f(QP, QR, 1, n)$.* □

Lemat 34.7 *Przypuśćmy, że (X_0, Y_0, A, B) jest rozwiązaniem równania $xay \to ybx$ i $A \neq B$. Wtedy istnieją słowa P, Q i R takie, że $A = PQR \neq Q$ i $B = RQP$, liczba n oraz liczba $k \geqslant 2$ spełniające*

1) k jest liczbą parzystą,

$$X_0A = f(QR, QP, k, n) \ \ \textit{oraz} \ \ Y_0B = f(QR, QP, k-1, n)$$

lub też

2) k jest liczbą nieparzystą,

$$X_0A = f(QP, QR, k, n) \ \ \textit{oraz} \ \ Y_0B = f(QP, QR, k-1, n).$$

Dowód. Analizując graf równania $xay \to ybx$ łatwo zauważyć, że jeżeli A i B są różnymi słowami, to są dwa rodzaje ścieżek wyznaczonych przez rozwiązanie i prowadzących do wierzchołka równania $\varepsilon = \varepsilon$. Przyjmijmy, że ścieżka wyznaczona przez dane rozwiązanie przechodzi przez wierzchołek W odpowiadający równaniu $xay \to ybx$ i wyznacza rozwiązanie (X, Y, A, B) tego równania takie, że $YB \geqslant X > Y$. W tym przypadku otrzymujemy rozwiązania spełniające pierwszą część tezy. Drugi przypadek (przechodzimy przez wierzchołek równania $ybx \to xay$ w sytuacji, gdy $XA \geqslant Y > X$) jest analogiczny i zostanie pominięty. Drugi przypadek daje rozwiązania spełniające drugą część tezy.

Zauważmy, że takie ścieżki dochodząc po raz ostatni do W mogą biec różnymi krawędziami (albo krawędzią zaczynającą się w wierzchołku równania $xay \to ybx$, albo równania $ybx \to xay$). Odpowiada to założeniu o parzystości liczby k z lematu 34.3.

Wniosek 34.5 opisuje X i Y. Zgodnie z tym wnioskiem

$$XA = f(QR, QP, 2, p) \ \ \text{oraz} \ \ YB = f(QR, QP, 1, p).$$

Natomiast lemat 34.3 pozwala wyrazić X_0 i Y_0 przez X i Y.

Przypadek 1: Pierwsza możliwość z lematu 34.3. Musimy zmienić oznaczenia: zamiast k i n z lematu 34.3 piszemy k' i n'. Wtedy dla pewnej liczby parzystej k'

$$X_0A = f(XA, YB, k', n') \ \ \text{oraz} \ \ Y_0B = f(XA, YB, k'-1, n').$$

Z lematu 34.1 otrzymujemy, że odpowiednio zdefiniowanej liczby n zachodzą wzory

$$X_0A = f(XA, YB, k', n') = f(f(QR, QP, 2, p), f(QR, QP, 1, p), k', n') = f(QR, QP, k'+2, n)$$

oraz

$$Y_0B = f(f(QR, QP, 2, p), f(QR, QP, 1, p), k'-1, n') = f(QR, QP, k'+1, n).$$

Przypadek 2: Druga możliwość z lematu 34.3. Tym razem dla nieparzystej liczby k'

$$X_0A = f(YB, XA, k', n') \ \ \text{oraz} \ \ Y_0B = f(YB, XA, k'-1, n')$$

Tak więc zachodzą wzory

$$X_0A = f(YB, XA, k', n') = f(f(QR, QP, 1, p), f(QR, QP, 2, p), k', n')$$

oraz

$$Y_0B = f(XA, YB, k' - 1, n') = f(f(QR, QP, 1, p), f(QR, QP, 2, p), k' - 1, n').$$

Z lematu 34.2 wynika, że dla odpowiedniej liczby n

$$X_0A = f(QR, QP, k' + 1, n') \text{ oraz } Y_0B = f(QR, QP, k', n). \ \square$$

Twierdzenie 34.8 *Przypuśćmy, że (X_0, Y_0, A, B) jest rozwiązaniem równania $xay \to ybx$ i $A \neq B$. Wtedy istnieją słowa P, Q i R takie, że $PR \neq \varepsilon$, liczby n i $k \geqslant 2$ spełniające $QA = \langle QR, QP\rangle_k$, $QB = \langle QR, QP\rangle_{k-1}$,*

$$X_0 = g(QR, QP, k, n)Q \ \textit{ oraz } \ Y_0 = g(QR, QP, k-1, n)Q. \ \square$$

Wniosek 34.9 (Markow) *Równanie $xAy = yBx$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją słowa P, Q i R takie, że $A = PQR$ i $B = RQP$.* $\square$

34.6 Sprawdzenie rozwiązania

Lemat 34.10 *Dla każdej liczby $k \geqslant 2$, jeżeli*

$$f(x, y, k, n)\ g(x, y, k-1, n) = f(x, y, k-1, n)\ g(x, y, k, n),$$

to

$$f(x, y, k, n)\ g(x, y, k+1, n) = f(x, y, k+1, n)\ g(x, y, k, n).$$

Dowód. Przyjmijmy, że $s = \langle x, y\rangle_{k+1}$. Wtedy

$$g(x, y, k+1, n)s = f(x, y, k+1, n).$$

Zauważmy, że także (dla $k \geqslant 2$)

$$g(x, y, k-1, n)s = f(x, y, k-1, n).$$

Wobec tego

$$\begin{aligned}
&f(x, y, k, n)\ g(x, y, k+1, n)\ s = f(x, y, k, n)\ f(x, y, k+1, n) = \\
&= f(x, y, k, n)\ (f(x, y, k, n))^{n_k} f(x, y, k-1, n) = (f(x, y, k, n))^{n_k}\ f(x, y, k, n)\ f(x, y, k-1, n) = \\
&= (f(x, y, k, n))^{n_k}\ f(x, y, k, n)\ g(x, y, k-1, n)\ s = \\
&= (f(x, y, k, n))^{n_k}\ f(x, y, k-1, n)\ g(x, y, k, n)\ s = f(x, y, k+1, n)\ g(x, y, k, n)\ s. \ \square
\end{aligned}$$

Lemat 34.11 *Jeżeli*

$$f(x, y, 2, n)\ g(x, y, 1, n) = f(x, y, 1, n)\ g(x, y, 2, n),$$

to dla każdej liczby $k \geqslant 2$ zachodzi równość

$$f(x, y, k, n)\ g(x, y, k-1, n) = f(x, y, k-1, n)\ g(x, y, k, n).$$

Dowód. Dowód przez indukcję ze względu na k. Najpierw pokażemy, że

$$f(x,y,2,n)\ g(x,y,1,n) = f(x,y,1,n)\ g(x,y,2,n).$$

Z porzedniego lematu dla $k = 2$ mamy

$$f(x,y,2,n)\ g(x,y,3,n) = f(x,y,3,n)\ g(x,y,2,n),$$

a po przestawieniu stron otrzymujemy

$$f(x,y,3,n)\ g(x,y,2,n) = f(x,y,2,n)\ g(x,y,3,n).$$

Zakładamy więc, że

$$f(x,y,k,n)\ g(x,y,k-1,n) = f(x,y,k-1,n)\ g(x,y,k,n).$$

Z porzedniego lematu mamy

$$f(x,y,k,n)\ g(x,y,k+1,n) = f(x,y,k+1,n)\ g(x,y,k,n).$$

Po przestawieniu stron otrzymujemy

$$f(x,y,k+1,n)\ g(x,y,k,n) = f(x,y,k,n)\ g(x,y,k+1,n).\ \square$$

Lemat 34.12 *Dla dowolnych słów P, Q i R zachodzi równość*

$$f(QR,QP,2,n)\ g(QR,QP,1,n) = f(QR,QP,1,n)\ g(QR,QP,2,n).$$

Dowód. Zauważmy, że

$$f(QR,QP,1,n) = (QR)^{n_0}QP \ \text{ oraz }\ g(QR,QP,1,n) = (QR)^{n_0-1},$$

$$f(QR,QP,2,n) = ((QR)^{n_0}QP)^{n_1}QR \ \text{ oraz }\ g(QR,QP,2,n) = ((QR)^{n_0}QP)^{n_1-1}(QR)^{n_0}.$$

Korzystając z tych wzorów otrzymujemy, że

$$f(QR,QP,2,n)\ g(QR,QP,1,n) = ((QR)^{n_0}QP)^{n_1}QR\ (QR)^{n_0-1} = ((QR)^{n_0}QP)^{n_1}\ (QR)^{n_0} =$$
$$= (QR)^{n_0}QP\ ((QR)^{n_0}QP)^{n_1-1}(QR)^{n_0} = f(QR,QP,1,n)\ g(QR,QP,2,n).\ \square$$

Lemat 34.13 *Dla każdej liczby $k \geqslant 2$ zachodzi równość*

$$f(QR,QP,k,n)\ g(QR,QP,k-1,n) = f(QR,QP,k-1,n)\ g(QR,QP,k,n).\ \square$$

Lemat 34.14 *Dla każdej parzystej liczby $k \geqslant 2$ zachodzi równość*

$$g(QR,QP,k,n)Q\ PQR\ g(QR,QP,k{-}1,n)Q = q(QR,QP,k{-}1,n)Q\ RQP\ g(QR,QP,k,n)Q.\ \square$$

Lemat 34.15 *Dla każdej nieparzystej liczby $k \geqslant 2$ zachodzi równość*

$$g(QR,QP,k,n)Q\ RQP\ g(QR,QP,k{-}1,n)Q = q(QR,QP,k{-}1,n)Q\ PQR\ g(QR,QP,k,n)Q.\ \square$$

Twierdzenie 34.16 *Przypuśćmy, że mamy słowa P, Q, R oraz liczby $k \geqslant 2$ i n. Jeżeli*

$$X = g(QR,QP,k,n)Q, \quad Y = g(QR,QP,k-1,n)Q,$$

słowa A i B spełniają równości

$$QA = \langle QR,QP\rangle_k \ \textit{ oraz }\ QB = \langle QR,QP\rangle_{k-1},$$

to $XAY = YBX$ oraz $Y < X$. $\square$