28 Równania ze stałymi

Przypuśćmy, że rozważamy alfabet V i równanie $u = v$ takie, że $u, v \in V^*$. Zakładamy też, że alfabet V ma dwa rodzaje elementów. Elementy pierwszego rodzaju nazywamy zmiennymi, drugiego – stałymi. W takiej sytuacji mówimy o równaniach ze stałymi. Rozwiązaniem równania ze stałymi nazywamy rozwiązanie $\alpha : V^* \to V^*$ tego równania (w dotychczasowym sensie) takie, że $\alpha(a) = a$ dla wszystkich stałych a.

W przypadku równań ze stałymi pozostaje prawdziwy lemat 23.1 charakteryzujący rozwiązania równoważne. Definicja grafu $\mathcal{G}_V$ wymaga drobnych zmian, które zostały opisane na stronie 26. Pozostają też prawdziwe lematy 27.1 o rozwiązaniu wyznaczonym przez scieżke, 27.3 o scieżce wyznaczonej przez rozwiazanie, 27.4 o ścieżce wyznaczanej przez porównywalne rozwiazania (w tym lemacie dla równań ze stałymi homomorfizm γ dodatkowo powinien zachowywać stałe, dopiero wtedy $\gamma\alpha$ jest rozwiązaniem) oraz 27.5 o tym, że ścieżka jest wyznaczana przez rozwiazanie zwiazane z tą ścieżką.

29 Równania kwadratowe

Równanie (także ze stałymi) nazywamy kwadratowym, jeżeli każda zmienna występuje w nim najwyżej w dwóch miejscach.

Lemat 29.1 *Jeżeli równanie $u = v$ $(u, v \in V^*)$ jest kwadratowe i w grafie $\mathcal{G}_V$ jest krawędź od wierzchołka wyznaczonego przez $u = v$ do wierzchołka wyznaczonego przez $u' = v'$, to równanie $u' = v'$ jest kwadratowe.* $\square$

Lemat 29.2 *Dla danego alfabetu V istnieje skończenie wiele równań kwadratowych.* $\square$

Twierdzenie 29.3 *Niech $\mathcal{G}'_V$ oznacza podgraf grafu $\mathcal{G}_V$ zawierający wierzchołki wyznaczone przez równania kwadratowe. Wtedy graf $\mathcal{G}'_V$ jest skończony i równanie kwadratowe $u = v$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie $\mathcal{G}'_V$ wierzchołek wyznaczony przez $\varepsilon = \varepsilon$ jest osiągalny z wierzchołka wyznaczonego przez $u = v$.* $\square$

30 Opis rozwiązań głównych

Niech $\mathcal{S}$ oznacza zbiór ścieżek rozpoczynających się w ustalonym wierzchołku grafu $\mathcal{G}_V$, wyznaczonym przez ustalone równanie $u = v$, i zakończonych w wierzchołku wyznaczonym przez $\varepsilon = \varepsilon$, a $\mathcal{R}$ zbiór rozwiązań tego równania. Lemat 27.1 definiuje funkcję

$$r : \mathcal{S} \to \mathcal{R} \tag{13}$$

przyporządkowującą ścieżce z $\mathcal{S}$ jedno z rozwiązań należących do $\mathcal{R}$, a lemat 27.3 definiuje funkcję

$$s : \mathcal{R} \to \mathcal{S} \text{ taką, że } \alpha = \theta r(s(\alpha)) \tag{14}$$

dla pewnego niewymazującego homomorfizmu θ. Z lematu 27.4 wynika, że dla dowolnego $\alpha \in \mathcal{R}$ i dowolnego γ zachodzi wzór

$$s(\alpha) = s(\gamma\alpha). \tag{15}$$

Treść lematu 27.5 implikuje, że

$$s(r(d)) = d \tag{16}$$

dla dowolnej ścieżki $d \in \mathcal{S}$.

Pokażemy, że

Lemat 30.1 *Rozwiązania należące do obrazu $r(\mathcal{S})$ są głównymi rozwiązaniami równania $u = v$. Każde rozwiązanie główne równania $u = v$ jest równoważne rozwiązaniu z obrazu $r(\mathcal{S})$.*

Dowód. Weźmy ścieżkę $d \in \mathcal{S}$ i odpowiadające jej rozwiązanie $r(d)$. Przyjmijmy, że $\beta \leqslant r(d)$. Wtedy $r(d) = \gamma\beta$ dla pewnego γ. Wzóry (16) i (15) implikują, że

$$d = s(r(d)) = s(\gamma\beta) = s(\beta).$$

Z (14) otrzymujemy, że dla pewnego θ

$$\beta = \theta r(s(\beta)) = \theta r(d).$$

Wobec tego, $r(d) \leqslant \beta$ oraz $r(d) \sim \beta$. Dowiedliśmy więc, że elementy $r(\mathcal{S})$ są rozwiązaniami głównymi.

Niech α będzie rozwiązaniem głównym. Weźmy odpowiadającą mu ścieżkę $s(\alpha)$ i odpowiadające tej ścieżce równanie $r(s(\alpha))$. z (13) wynika, że $\alpha = \theta r(s(\alpha))$ dla pewnego θ. To oznacza, że $r(s(\alpha)) \leqslant \alpha$. Ponieważ α jest rozwiązaniem głównym, więc $r(s(\alpha)) \sim \alpha$. $\square$

Lemat 30.2 *Różne rozwiązania należące do $r(S)$ nie są równoważne.*

Dowód. Załóżmy, że $d_1, d_2 \in S$ oraz $r(d_1) \sim r(d_2)$. Z definicji relacji $\sim$ wynika, że $r(d_1) = \theta r(d_2)$ dla pewnego θ. Korzystając z (15) i (16) otrzymujemy, że

$$d_1 = sr(d_1) = s(\theta r(d_2)) = sr(d_2) = d_2.$$

Tym bardziej, $r(d_1) = r(d_2)$. $\square$

Lemat 30.3 *Każde rozwiązanie równania $u = v$ jest mniej ogólne od jednoznacznie wyznaczonego rozwiązania należącego do $r(S)$.*

Dowód. Z wzoru (14) wynika, że rozwiązanie $r(s(\alpha)) \in r(S)$ jest bardziej ogólne od α (czyli rozwiązanie α jest mniej ogólne od $r(s(\alpha))$).

Przypuśćmy, że α jest mniej ogólne od rozwiązań $r(d_1)$ i $r(d_2)$. Wtedy $\alpha = \theta_1 r(d_1) = \theta_2 r(d_2)$. Z wzoru (15) wynika, że $s(\alpha) = sr(d_1) = sr(d_2)$. Po skorzystaniu z (16) otrzymujemy, że $d_1 = d_2$. $\square$

31 Wstępna informacja o pracy Chmielewskiego

W pracy Chmielewskiego *Równania w półgrupach wolnych* zostało w pierwszym rzędzie dowiedzione twierdzenie

Twierdzenie 31.1 *Istnieje algorytm rozstrzygający, czy dane równanie z trzema zmiennymi i stałymi ma rozwiązanie.*

Przypuśćmy, że V jest ustalonym alfabetem i dodatkowo mamy zmienne naturalne (przebiegające liczby naturalne). Zbiór P słów parametrycznych jest najmniejszym zbiorem takim, że

1. $V^* \subseteq P$,
2. jeżeli $s_1, s_2 \in P$, to $s_1 s_2 \in P$,
3. jeżeli $s \in P$ i n jest zmienną naturalną, to $s^n \in P$.

Wartościowaniem zmiennych naturalnych nazywamy funkcję przyporządkowującą tym zmiennym liczby naturalne nazywane wartościami tych zmiennych. Dla wartościowania v zmiennych naturalnych definiujemy wartość $s[v]$ słowa parametrycznego s przy wartościowaniu v przyjmując, że $s[v] = s$ dla $s \in V^*$, $(s_1 s_2)[v] = s_1[v] s_2[v]$ oraz $(s^n)[v] = (s[v])^{v(n)}$. Dla słów parametrycznych $s_1, \ldots, s_n \in P$ zbiory postaci

$$\{(s_1[v], \ldots, s_n[v]) : v \text{ jest wartościowaniem}\}$$

nazywamy prostymi zbiorami parametryzowalnymi. Zbiór $X \subseteq (V^*)^n$ jest parametryzowalny, jeżeli jest skończoną sumą prostych zbiorów parametryzowalnych. Rozwiązanie równania ze zmiennymi $x_1, \ldots, x_n \in V$ będziemy teraz utożsamiać z ciągiem n słów $(w_1, \ldots, w_n) \in (V^*)^n$ spełniającym oczywiste warunki. Równanie $u = v$ w słowach ($u, v \in V^*$, V może też zawierać stałe) jest parametryzowalne, jeżeli dla pewnego zbioru parametryzowalnego X każde rozwiązanie tego równania (spełniające podaną wyzęj definicję) należy do X.

We wspomnianej pracy zostały także dowiedzione

Twierdzenie 31.2 *Każde równanie z trzema zmiennymi i bez stałych jest parametryzowalne.*

Twierdzenie 31.3 *Równanie $xyz = zvx$ (z czterema zmiennymi) nie jest parametryzowalne.*

Tak więc parametryzowalne są równania z jedną zmienną i dwoma stałymi, oraz równania z dwoma zmiennymi i jedną zmienną (te wyniki są chyba oczywiste i można je trochę wzmocnić). Już być może równanie $xaby = ybax$ (z dwoma zmiennymi x i y i dwoma stałymi a i b) nie jest parametryzowalne (wrócimy do tego problemu). Kłopoty z opisaniem zbioru rozwiązań mogą więc już wystąpić dla równania z dwoma zmiennymi.