21 Zastosowania twierdzeń o zwartości

Twierdzenie 21.1 *Niech $X, Y \subseteq A^+$ będą dwoma skończonymi zbiorami słów. Można rozstrzygnąć, czy półgrupy X^* i Y^* są izomorficzne.*

Dowód. Jeżeli zbiór X jest skończony, to obliczenie minimalnego zbioru generatorów X^* jest efektywne. Możemy więc założyć, że X i Y są minimalnymi zbiorami generującymi X^* i Y^*. Minimalne zbiory generatorów półgrup izomorficznych są równoliczne, więc możemy założyć, że X i Y mają tyle samo elementów.

Dalej, dla każdej bijekcji φ przekształcającej X na Y sprawdzamy, czy rozszerza się do izomorfizmu. W tym celu weźmy zbiór zmiennych V równoliczny z X i wzajemnie jednoznaczną funkcję α przekształcającą V na X. Zauważmy, że φ jest izomorfizmem wtedy i tylko wtedy, jest wzajemnie jednoznaczna, a to z kolei jest równoważne temu, że $E(\alpha) = E(\varphi\alpha)$.

Aby sprawdzić, czy $E(\alpha) \subseteq E(\beta)$ znajdujemy korzystając z lematu 20.1 skończony podukład $E \subseteq E(\alpha)$ równoważny z $E(\alpha)$, a następnie sprawdzamy, czy β jest rozwiązaniem układu E. $\square$

22 Hipoteza Ehrenfeuhta

Przypuśćmy, że mamy zbiór słów $L \subseteq A^*$. Zbiór $X \subseteq L$ nazywamy testowym dla L, jeżeli dla każdej pary homomorfizmów $\alpha, \beta : A^* \to B^*$ takich, że $\alpha(w) = \beta(w)$ dla wszystkich $w \in X$ równość $\alpha(w) = \beta(w)$ zachodzi także dla wszystkich $w \in L$. W latach 70 Ehrenfeuht wyraził przekonanie, że każdy zbiór słów zawiera skończony podzbiór testowy. Hipoteza Ehrenfeuhta jest równoważna stwierdzeniu, że każdy układ równań w słowach zawiera skończony podukład równoważny.

Niech A' będzie kopią alfabetu A (każdej literze $a \in A$ odpowiada wzajemnie jednoznacznie litera $a' \in A'$). Przypuśćmy, że słowo u' nad A' powstaje ze słowa $u \in A^*$ przez zastąpienie liter $a \in A$ literami $a' \in A'$. Weźmy dowolny język $L \subseteq A^*$. Utwórzmy układ U równań ze zmiennymi z $A \cup A'$ złożony z równań $u = u'$ dla $u \in L$. Zauważmy, że jeżeli układ $U_0 \subseteq U$ jest równoważny U, to zbiór L_0 lewych stron równań z U_0 jest zbiorem testowym dla L. Aby się o tym przekonać, weźmy dwa homomorfizmy $\alpha, \beta : A^* \to B^*$ takie, że $\alpha(u) = \beta(u)$ dla $u \in L_0$. Wtedy homomorfizm $\gamma : (A \cup A')^* \to B^*$ taki, że $\gamma(a) = \alpha(a)$ dla $a \in A$ oraz $\gamma(a) = \beta(a)$ dla $a \in A'$ jest rozwiązanie układu U_0. Wobec tego, γ jest rozwiązaniem układu U. Jeżeli γ jest rozwiązaniem równania $u = u'$, to $\alpha(u) = \gamma(u) = \gamma(u') = \beta(u)$. W ten sposób dowiedliśmy, że L_0 jest zbiorem testowym dla L.

Twierdzenie 22.1 *Każdy zbiór słów zawiera skończony zbiór testowy.*

Dowód. Jest to wniosek z twierdzenia 15.3. $\square$

Także hipoteza Ehrenfeuhta implikuje twierdzenie o zwartości. Jeżeli U jest układem równań ze zmiennymi należącymi do A, to tworzymy zbiór $L = \{uw' : u = w \in U\}$. Oczywiście, mając słowo należące do L możemy jednoznacznie odtworzyć równanie, z kórego powstało.

Weźmy zbiór L_0 testowy dla L. Wtedy układ $U_0 = \{u = w : uw' \in L_0\}$ jest równoważny układowi U. Tak jest, ponieważ rozwiązanie γ układu U_0 wyznacza parę homomorfizmów $\alpha, \beta : (A \cup A')^* \to B^*$ zdefiniowanych wzorami

$$\alpha(a) = \begin{cases} \gamma(a) & \text{jeżeli } a \in A \\ \varepsilon & \text{jeżeli } a \in A' \end{cases}$$

oraz

$$\beta(a) = \begin{cases} \gamma(a') & \text{jeżeli } a \in A' \\ \varepsilon & \text{jeżeli } a \in A \end{cases}$$

(symbol a' dla $a \in A'$ oznacza tę literą $b \in A$, dla której $b' = a$). Dla tych homomorfizmów prawdziwa jest równoważność: $\gamma(u) = \gamma(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha(uw') = \beta(uw')$. Posługując się tą równoważnością bez trudu dowodzimy, że układy U_0 i U są równoważne.

23 Porównywanie rozwiązań

Przypuśćmy, że V jest zbiorem zmiennych (i stałych) oraz $\alpha : V^* \to A^*$ jest homomorfizmem (potencjalnym rozwiązaniem jakiegoś równania). Przekształcenie α nazywamy kompletnym (?, ang. total), jeżeli każda litera z alfabetu A występuje słowie postaci $\alpha(v)$ dla pewnego $v \in V$. Przekształcenie α nazywamy niewymazującym, jeżeli wszystkie słowa postaci $\alpha(v)$ dla $v \in V$ są niepuste.

Będziemy porównywać przekształcenia (rozwiązania) kompletne. Jeżeli $\alpha_i : V \to A_i$ są kompletne, to $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ oznacza, że istnieje homomorfizm niewymazujący $\theta : A_1^* \to A_2^*$ taki, że $\alpha_2 = \theta\alpha_1$. Jeżeli $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$, to mówimy, że rozwiązanie α_1 jest bardziej ogólne od α_2. Rozwiązania α_1 i α_2 są równoważne ($\alpha_1 \sim \alpha_2$), jeżeli $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$ i $\alpha_2 \leqslant \alpha_1$.

Relacja $\leqslant$ jest zwrotna i przechodnia, ale nie jest antysymetryczna. Relacja $\sim$ jest relacją równoważności. Dzieląc zbiór (?) rozwiązań przez relację $\sim$ (wykonując odpowiednią konstrukcję ilorazową) otrzymujemy pewien porządek na rozwiązaniach, a właściwie na klasach abstrakcji rozwiązań.

Lemat 23.1 *Jeżeli dla $i = 1, 2$ homomorfizmy $\alpha_i : V^* \to A_i^*$ są kompletne, to α_1 i α_2 są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej różnowartościowej funkcji θ przekształcającej A_1 na A_2 (po rozszerzeniu jej do homomorfizmu $\theta : A_1^* \to A_2^*$) zachodzi równość $\alpha_2 = \theta\alpha_1$.*

Dowód. Oczywiście, podany warunek jest wystarczający. Równość $\alpha_2 = \theta\alpha_1$ implikuje, że $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. a ponieważ przekształcenie $\theta : A_1^* \to A_2^*$ jest izomorfizmem, więc także zachodzi równość $\alpha_1 = \theta^{-1}\alpha_2$, która implikuje nierówność $\alpha_2 \leqslant \alpha_1$.

Dowód konieczności podanego warunku jest bardziej skomplikowany. Niech $alph(u)$ oznacza alfabet niezbędny do zapisania słowa u (czyli zbiór liter występujących w u).

Przypuśćmy, że $\alpha_2 = \theta_1\alpha_1$ i $\alpha_2 = \theta_1\alpha_1$ dla niewymazujących θ_1 i $theta_2$. Jeżeli $\alpha_2 = \theta_1\alpha_1$ i θ_1 nie wymazuje liter, to

$$|\,\alpha_2(s)\,| = |\,\theta_1(\alpha_1(s))\,| \geqslant |\,\alpha_1(s)\,|$$

dla dowolnego słowa $s \in V^*$. Analogicznie dowodzimy przeciwną nierówność między skrajnymi długościami, więc

$$|\,\alpha_2(s)\,| = |\,\theta_1(\alpha_1(s))\,| = |\,\alpha_1(s)\,|.$$

Stąd i z kompletności α_1 wynika, że $\theta_1 : A_1 \to A_2$ (θ_1 przyporządkowuje literom litery).

Przypuśćmy, że dla pewnych liter $a, b \in A_1$, $a \neq b$ zachodzi równość $\theta_1(a) = \theta_1(b)$. Weźmy zmienne $x, y \in V$ takie, że $a \in alph(\alpha_1(x))$ oraz $b \in alph(\alpha_1(y))$. Zauważmy, że $a, b \in alph(\alpha_1(xy))$ oraz $\theta_1(alph(u)) = alph(\theta_1(u))$ dla dowolnego słowa $u \in A_1^*$. Ponieważ θ_1 „zlepia" a i b, więc

$$|\,alph(\alpha_2(xy))\,| = |\,alph(\theta_1\alpha_1(xy))\,| < |\,alph(\alpha_1(xy))\,|.$$

Mamy także

$$|\,alph(\alpha_1(xy))\,| = |\,alph(\theta_2\alpha_2(xy))\,| \leqslant |\,alph(\alpha_2(xy))\,|.$$

Nietrudno zauważyć, że dowiedzione nierówności są sprzeczne. Sprzeczność ta dowodzi, że funkcja $\theta_1 : A_1 \to A_2$ jest różnowartościowa. Podobnie dowodzimy, że także funkcja $\theta_2 : A_2 \to A_1$ i jest różnowartościowa.

Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że zbiory A_1 i A_2 są równoliczne i funkcja θ_1 przekształca A_1 wzajemnie jednoznacznie na A_2. $\square$

24 Rozwiązania główne

Kompletne rozwiązanie α równania $u = v$ nazywamy głównym, jeżeli dla dowolnego kompletnego rozwiązania β tego równania warunek $\beta \leqslant \alpha$ implikuje, że $\beta \sim \alpha$.

Lemat 24.1 *Każde kompletne rozwiązanie równania w słowach można zmiejszyć do rozwiązania głównego.*

Dowód. Przypuśćmy, że $\alpha : V \to A^*$ jest kompletnym rozwiązania interesującego nas równania. Lemat będziemy dowodzić przez indukcję ze względu na porządek leksykograficzny w zbiorze par liczb naturalnych. Rozwiązania α wyznacza parę $(\sum_{v\in V}|\alpha(v)|, \sum_{v\in V}|\alpha(v)| - |A|)$. Zakładamy więc, że lemat zachodzi dla rozwiązań wyznaczającąh mniejsze pary.

Możemy dodatkowo założyć, że α nie jest rozwiązaniem głównym. Wtedy istnieje inne rozwiązanie kompletne $\beta : V \to B$, nierównoważne z α, i niewymazujący homomorfizm $\theta : B^* \to A^*$ taki, że $\alpha = \theta\beta$. Ponieważ β i α nie są równoważne, więc z lematu 23.1 wynika, że θ nie przekształca B wzajemnie jednoznacznie na A. Wiemy jednak, że $\theta : B \to A^*$. Dalej rozważamy dwa przypadki.

Przypadek 1: $|\,\theta(b)\,| > 1$ dla pewnego $b \in B$. Weźmy $x \in V$ takie, że $b \in alph(\beta(x)$. Ponieważ β nie wymazuje liter, więc

$$|\,\beta(x)\,| < |\,\theta\beta(x)\,| = |\,\alpha(x)\,|.$$

Dla liter (pozostałych) $v \in V$ mamy

$$|\,\beta(v)\,| \leqslant |\,\theta\beta(v)\,| = |\,\alpha(v)\,|.$$

Implikuje to, że

$$\sum_{v\in V} |\,\beta(v)\,| < \sum_{v\in V} |\,\alpha(v)\,|.$$

Wobec tego, dla β możemy skorzystać z załozęnia indukcyjnego i stwierdzić, że $\beta = \theta_1\gamma$ dla pewnego rozwiązania głównego γ. W ten sposób otrzymujemy, że $\alpha = \theta\beta = \theta\theta_1\gamma$ i znajdujemy potrzebne przedstawienie α.

Przypadek 2: $|\,\beta(b)\,| = 1$ dla wszystkich $b \in B$. W tym przypadku, $\beta : B \to A$. Dla takich β mamy

$$\sum_{v\in V} |\,\beta(v)\,| = \sum_{v\in V} |\,\alpha(v)\,|.$$

Ponieważ β jest kompleksowe, więc przekształca B na A. Ale nie przekształca wzajemnie jednoznacznie, więc nie jest różnowartościowe. W ten sposób otrzymujemy, że $|\,A\,| < |\,B\,|$ oraz

$$\sum_{v\in V} |\,\beta(v)\,| - |\,B\,| < \sum_{v\in V} |\,\alpha(v)\,| - |\,A\,|.$$

Także w tym przypadku możemy skorzystać dla β z założenia indukcyjnego i – jak poprzednio – pokazać, że teza lematu zachodzi dla α. $\square$

25 Transformacje Nielsena

Dla danego i $x, y \in V$ definiujemy homomorfizmy $\varphi_{xy}, \varepsilon_{x,y} : V^* \to V^*$ przyjmując, że

$$\varphi_{xy}(z) = \begin{cases} z & \text{jeżeli } z \neq y, \\ xy & \text{jeżeli } z = y \end{cases}$$

oraz

$$\varepsilon_{xy}(z) = \begin{cases} z & \text{jeżeli } z \neq y, \\ x & \text{jeżeli } z = y \end{cases}$$

(i rozszerzając podane definicje na V^*). Funkcje φ_{xy} nazywamy transformacjami Nielsena.

26 Graf $\mathcal{G}_V$

Dla zbioru (uporządkowanego) V zmiennych (i ewentualnie stałych) definiujemy teraz graf skierowany $\mathcal{G}_V$. Wierzchołki tego grafu będą (etykietowane) równaniami $u = v$, gdzie $u, v \in V^*$ są słowami różniącymi się pierwszymi literami (w szczególności równaniami $\varepsilon = u$ i $\varepsilon = \varepsilon$).

Przypuśćmy, że mamy równanie postaci $xu = yv$, gdzie $x, y \in V$ są różnymi zmiennymi i $u, v \in V^*$. Równanie to wyznacza trzy funkcje: φ_{xy}, φ_{yx} i ε_{xy} (z funkcji ε_{yx} i ε_{xy} wybieramy jedną, np. tę, która jest wyznaczona przez parę xy z mniejszą zmienną na początku).

Jeżeli równanie $u = v$ wyznacza funkcję φ, to w grafie $\mathcal{G}_V$ umieszczamy krawędź z etykietą φ od wierzchołka $u = v$ do wierzchołka etykietowanego równaniem, które otrzymujemy z $\varphi(u) = \varphi(v)$ przez usunięcie z obu stron wspólnego prefiksu.

To już jest pełna definicja $\mathcal{G}_V$ w przypadku, gdy V zawiera tylko zmienne. W szcególności, z wierzchołków postaci $\varepsilon = \varepsilon$ i $\varepsilon = u$ nie wychodzą żadne krawędzie.

Jeżeli dopuścimy używanie zmiennych, to w grafie $\mathcal{G}_V$ pojawią się wierzchołki wyznaczone przez równania postaci $xu = av$ (lub $au = xv$) oraz $au = bv$, gdzie x jest zmienną, a a i b są (różnymi) stałymi. Pierwsze z równań wyznacza funkcje tylko φ_{ax} i ε_{ax} (z wierzchołka $xu = av$ wychodzą dwie krawędzie), a drugie z tych równań nie wyznacza żadnych funkcji (z wierzchołka $au = bv$ nie wychodzą żadne krawędzie).

27 Własności grafu $\mathcal{G}_V$ (jeżeli V nie zawiera stałych)

Lemat 27.1 *Jeżeli*

$$(u_0 = v_0) \xrightarrow[\varphi_1]{} (u_1 = v_1) \xrightarrow[\varphi_2]{} \ldots \xrightarrow[\varphi_{n-1}]{} (u_{n-1} = v_{n-1}) \xrightarrow[\varphi_n]{} (u_n = v_n)$$

jest ścieżką w grafie $\mathcal{G}_V$ *i* $\varphi = \varphi_n\varphi_{n-1}\ldots\varphi_1$, *to istnieje słowo* s *takie, że* $\varphi(u_0) = su_n$ *oraz* $\varphi(v_0) = sv_n$.

Dowód. Przez indukcję ze względu na długość ścieżki. Przypuśćmy, że rozważamy ścieżkę długości n i po przejściu $n-1$ krawędzi mamy $\varphi'(u_0) = su_{n-1}$ i $\varphi'(v_0) = sv_{n-1}$, a następnie przechodzimy krawędzią etykietowaną φ_n do wierzchołka wyznaczonego przez równanie $u_n = v_n$. Wobec tego, $\varphi_n(u_{n-1}) = tu_n$ oraz $\varphi_n(v_{n-1}) = tv_n$. Zauważmy, że

$$\varphi_n\varphi'(u_0) = \varphi_n(su_{n-1}) = \varphi_n(s)\varphi_n(u_{n-1}) = \varphi_n(s)tu_n$$

i

$$\varphi_n\varphi'(v_0) = \varphi_n(sv_{n-1}) = \varphi_n(s)\varphi_n(v_{n-1}) = \varphi_n(s)tv_n. \ \square$$

Wniosek 27.2 *Jeżeli z wierzchołka wyznaczonego przez równanie* $u = v$ *istnieje ścieżka wzdłuż krawędzi etykietowanych przekształceniami* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *prowadząca do wierzchołka wyznaczonego przez równanie* $\varepsilon = \varepsilon$ *i* $\varphi = \varphi_n \ldots \varphi_1$, *to* φ *jest rozwiązaniem równania* $u = v$. $\square$

Lemat 27.3 *Jeżeli* α *jest niewymazującym rozwiązaniem nieskracalnego równania* $u = v$, *to istnieją scieżka prowadząca z wierzchołka wyznaczonego przez* $u = v$ *do wierzchołka wyznaczonego przez* $\varepsilon = \varepsilon$ *wzdłuż krawędzi etykietowanych przekształceniami* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *i niewymazujący homomorfizm* θ *takie, że* $\alpha = \theta\varphi_n \ldots \varphi_1$.

W dowodzie lematu 27.3 zostanie podana konstrukcja pewnej ścieżki wyznaczonej przez rozwiązanie równania w słowach. Dalsze własności tej konstrukcji zostaną sformułowane w kolejnych lematach z dowodami bardzo podobnymi do dowodu lematu 27.3. Wszytkie te lematy udowodnimy jednocześnie.

Lemat 27.4 *Przypuśćmy, że* $\alpha : V^* \to A^*$ *i* $\gamma : A^* \to B^*$ *są niewymazującymi homomorfizmami. Jeżeli* α *jest rozwiązaniem równania* $u = v$, *to* $\gamma\alpha$ *też jest rozwiązaniem tego równania i oba te rozwiązania wyznaczają (zgodnie z metodą z dowodu lematu 27.3) tę samą ścieżkę.*

Lemat 27.5 *Przypuśćmy, że dana jest ścieżka S od wierzchołka wyznaczonego przez $xu = yv$ do wyznaczonego przez $\varepsilon = \varepsilon$ przechodząca wzdłuż krawędzi etykietowanych przekształceniami $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Niech $\varphi = \varphi_n \ldots \varphi_1$ (zgodnie z lematem 27.1 przekształcenie φ jest rozwiązaniem równania $xu = yv$). Rozwiązanie φ zgodnie z metodą opisaną w dowodzie lematu 27.3 wyznacza ścieżkę S.*

Dowód. Długością rozwiązania α równania $u = v$ nazywamy długość słowa $\alpha(u)$.

Będziemy jednocześnie dowodzić lematy 27.3, 27.4 i 27.5. Wszystkie dowody będą indukcyjne. Dwa pierwsze lematy dowodzimy przez indukcję ze względu na długość rozwiązania α, ostatni – ze względu na długość ścieżki S.

Przypuśćmy, że mamy nieskracalne równanie $xu = yv$ i rozwiązanie α tego równania. Będziemy konstruować ścieżkę zaczynającą się w wierzchołku wyznaczonym przez $xu = yv$. Krawędź, wzdłuż której idziemy z tego wierzchołka jest wyznaczona przez wynik porównania długości słów $\alpha(x)$ i $\alpha(y)$. Teraz będziemy rozważać przypadek, w którym $|\,\alpha(x)\,| < |\,\alpha(y)\,|$. W tym przypadku z wierzchołka wyznaczonego przez $xu = yv$ idziemy wzdłuż krawędzi etykietowanej transformacją φ_{xy}.

Dla dowodu lematu 27.4 powinniśmy zauważyć, że nierówność $|\alpha(x)| < |\alpha(y)|$ implikuje, że $|\gamma\alpha(x)| < |\gamma\alpha(y)|$. Jeżeli α jest rozwiązaniem $xu = yv$, to nierówność $|\alpha(x)| < |\alpha(y)|$ oznacza, że $\alpha(x)s = \alpha(y)$ dla niepustego słowa s. Stąd $\gamma\alpha(x)\gamma(s) = \gamma(\alpha(x)s) = \gamma\alpha(y)$. Ponieważ γ jest niewymazujące i s jest niepuste, więc $|\,\gamma\alpha(x)\,| < |\,\gamma\alpha(y)\,|$. Tak więc w rozważanym przypadku pierwsze krawędzie ścieżek wyznaczonych przez α i przez $\gamma\alpha$ są identyczne.

Teraz spróbujemy ustalić pierwszą krawędź ścieżki badanej w dowodzie lematu 27.5. Przyjmijmy, że $\varphi = \varphi'\varphi_1$. Zauważmy, że φ' nie wymazuje. Wiemy, że φ_1 jest równe φ_{xy}, φ_{yx} lub ε_{xy}. Wybór początku ścieżki zależy od wyniku porównywania długości słów $\varphi(x)$ i $\varphi(y)$. Jeżeli $\varphi_1 = \varphi_{xy}$, to

$$|\,\varphi(y)\,| = |\,\varphi'\varphi_1(y)\,| = |\,\varphi'\varphi_{xy}(y)\,| = |\,\varphi'(xy)\,| = |\,\varphi'(x)\varphi'(y)\,|$$

oraz

$$|\,\varphi(x)\,| = |\,\varphi'\varphi_1(x)\,| = |\,\varphi'\varphi_{xy}(x)\,| = |\,\varphi'(x)\,|.$$

Tak więc $|\,\varphi(x)\,| < |\,\varphi(y)\,|$. W tej sytuacji wybieramy krawędź etykietowaną φ_{xy}, a więc pierwszą krawędź ścieżki S. Co więcej, w pozostałych przypadkach nie zachodzi nierówność $|\,\varphi(x)\,| < |\,\varphi(y)\,|$. Jak wyżej pokazuje, że jeżeli $\varphi_1 = \varphi_{yx}$, to $|\,\varphi(y)\,| < |\,\varphi(x)\,|$. Jeżeli $\varphi_1 = \varepsilon_{xy}$, to

$$\varphi(y) = \varphi'\varphi_1(y) = \varphi'\varepsilon_{xy}(y) = \varphi'(x) = \varphi'\varepsilon_{xy}(x) = \varphi'\varphi_1(x) = \varphi(x).$$

Przyjmijmy, że z wierzchołka wyznaczonego przez $xu = yv$ przechodzimy wzdłuż krawędzi etykietowanej φ_{xy} do wierzchołka wyznaczonego przez równanie $u' = v'$. Mamy więc $\varphi(xu) = su'$ oraz $\varphi(yv) = sv'$ dla pewnego słowa s. Zauważmy, że słowo s jest niepuste (zaczyna się literą x).

Wracamy do dowodu lematu 27.3. Zdefiniujmy teraz homomorfizm α' przyjmując, że $\alpha'(z) = \alpha(z)$ dla wszystkich $z \neq y$ oraz $\alpha'(y)$ jest słowem spełniającym równość $\alpha(x)\alpha'(y) = \alpha(y)$. Zauważmy, że w rozważanym przypadku taka niezerowa wartość $\alpha'(y)$ istnieje. Co więcej, porównując wartości obu stron dla poszczególnych elementów V stwierdzamy, że zachodzi równość

$$\alpha = \alpha' \varphi_{xy}. \tag{11}$$

Wynika z niej, że α' jest rozwiązaniem równania $u' = v'$. Mamy bowiem

$$\alpha(xu) = \alpha'\varphi(xu) = \alpha'(su') = \alpha'(s)\alpha'(u')$$

oraz (podobnie) $\alpha(yv) = \alpha'(s)\alpha'(v')$. Ponieważ $\alpha(xu) = \alpha(yv)$, więc $\alpha'(s)\alpha'(u') = \alpha'(s)\alpha'(v')$ oraz – po skróceniu – $\alpha'(u') = \alpha'(v')$.

Równość $\alpha(xu) = \alpha'(s)\alpha'(u')$ implikuje, że długość rozwiązania α' równania $u' = v'$ jest mniejsza od długości rozwiązania α równania $u = v$ (zauważmy, że s zaczyna się w tym przypadku literą x), a więc

$$|\ \alpha(xu)\ | > |\ \alpha'(u')\ |. \tag{12}$$

Nierówność (12) pozwala skorzystać z założenia indukcyjnego dla równania $u' = v'$ i rozwiązania α' tego równania.

W dowodzie lematu 27.4, dodatkowo dla rozwiązania $\gamma\alpha$ zdefiniujemy rozwiązanie α'' przyjmując $\alpha''(z) = \gamma\alpha(z)$ dla $z \neq y$ oraz, że $\alpha''(y)$ spełnia $\gamma\alpha(x)\alpha''(y) = \gamma\alpha(y)$. Zauważmy, że $\alpha''(z) = \gamma\alpha'(z)$ dla wszystkich $z \in V$. Funkcja α'' jest rozwiązaniem równania $u' = v'$. Dowodzimy to tak, jak tę samą własność α'. Wiedząc, że α' i $\alpha'' = \gamma\alpha'$ są rozwiązaniami równania $u' = v'$ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego.

W dowodzie lematu 27.5, jeżeli $\varphi_1 = \varphi_{xy}$, to dalej rozważamy rozwiązanie α' równania $u' = v'$ zdefiniowane wzorami $\alpha'(z) = \varphi(z)$ dla $z \neq y$ i takie, że $\alpha'(y)$ spełnia równość $\varphi(x)\alpha'(y) = \varphi(y)$. Pokażemy, że $\alpha'(z) = \varphi'(z)$ dla wszystkich $z \in V$. Dla $z \neq y$ mamy $\alpha(z) = \varphi(z) = \varphi'\varphi_{xy}(z) = \varphi'(z)$. Mamy też $\varphi(y) = \varphi'\varphi_{xy}(y) = \varphi'(xy) = \varphi'(x)\varphi'(y) = \varphi(x)\varphi'(y)$. Stąd wynika, że $\alpha'(y) = \varphi'(y)$.

W pozostałach przypadkach (gdy $|\ \alpha(x)\ | > |\ \alpha(y)\ |$ lub $|\ \alpha(x)\ | = |\ \alpha(y)\ |$), postępujemy podobnie i w ten sposób dowodzimy, że własności (11) i (12) są prawdziwe dla pewnego rozwiązania α' równania $u' = v'$, do którego można dojść wzdłuż krawędzi etykietowanej przekształceniem φ.

Jeżeli po przejściu wzdłuż jednej krawędzi znajdziemy się wierzchołku wyznaczonym przez równanie $\varepsilon = \varepsilon$, to teza lematu wynika z własności (11).

Przypuśćmy więc, że równanie $u' = v'$ nie jest równaniem $\varepsilon = \varepsilon$. Przekształcenie niewymazujące α' jest rozwiązaniem tego równania, które – na podstawie (12) – jest krótsze od rozwiązania α równania $xu = yv$. Wobec tego, równanie $u' = v'$ nie jest postaci $\varepsilon = w$. Dla równania $u' = v'$ i przekształcenia α' możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Istnieje więc ścieżka od $u' = v'$ do $\varepsilon = \varepsilon$ etykietowana przekształceniami $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ i niewymazujący homomorfizm θ takie, że $\alpha' = \theta\varphi_n \ldots \varphi_1$. Dopisując do tej ścieżki na początku krawędź z etykietą φ otrzymujemy ścieżkę etykietowaną przekształceniami $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Z własności (11) wynika, że

$$\alpha = \alpha'\varphi = \theta\varphi_n \ldots \varphi_1\varphi.\ \square$$

Wniosek 27.6 *Równanie w słowach $u = v$ ma niewymazujące rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy w grafie $\mathcal{G}_V$ istnieje ścieżka od wierzchołka wyznaczonego przez $u = v$ do wierzchołka $\varepsilon = \varepsilon$.* $\square$