19 Minimalny zbiór generatorów $E(\alpha)$

Lemat 19.1 *Jeżeli M jest podpółgrupą $\Xi^* \times \Xi^*$ i $X = (M \setminus \{\varepsilon\}) \setminus (M \setminus \{\varepsilon\})^2$, to X jest najmniejszym zbiorem generatorów M.*

Dowód. Lemat ten dowodzimy tak, jak lemat 6.1. $\square$

Powyższy lemat sugeruje następującą konstrukcję. Dla danego układu równań $U \subseteq \Xi^* \times \Xi^*$ bierzemy półgrupę U^* i jej najmniejszy zbiór generatorów X. W ten sposób znajdujemy pewien „mały” zbiór równań równoważny danemu układowi. Niestety, zbiór X nie zawsze jest mały. pokażemy,że nawet w prostych przypadkach może być nieskończony.

Najmniejszy zbiór genaratorów półgrupy $E(\alpha)$ będziemy oznaczać symbolem $E_{red}(\alpha)$.

Lemat 19.2 *Niech G będzie grafem akceptującym $E(\alpha)$ zdefiniowanym w dowodzie twierdzenia 18.1, a S – ścieżką w G akceptująca równanie $u = v$. Jeżeli α jest rozwiązaniem równania $u' = v'$ takiego, że $u' \leqslant u$ i $v' \leqslant v$, to pewien fragment ścieżki S zakończony $[\varepsilon, \varepsilon]$ wyznacza $u' = v'$.*

Dowód. Przypuśćmy, że $[\varepsilon, \varepsilon] = w_0, w_1, \ldots, w_n = [\varepsilon, \varepsilon]$ jest ciągiem wierzchołków, przez które przechodzi ścieżka S. Niech (u_i, v_i) będzie równaniem wyznaczonym przez fragment ścieżki S od w_0 do w_i. Z postaci etykiet w grafie G wynika, że $u' = u_a$ oraz $v' = v_b$ dla pewnych $a, b \leqslant n$.

Zdefiniujmy funkcje $f, g : \{k \in N : k \leqslant n\} \to N$ przyjmując, że

$$f(i) = |\,\alpha(u_i)\,| \quad \text{oraz} \quad g(i) = |\,\alpha(v_i)\,|.$$

Funkcje f i g są niemalejące oraz dla $i < n$ spełniają następujące warunki

1. jeżeli $f(i) < g(i)$, to $g(i) = g(i+1)$,
2. jeżeli $g(i) < f(i)$, to $f(i) = f(i+1)$.

Zauważmy, że

$$f(a) = |\,\alpha(u')\,| = |\,\alpha(v')\,| = g(b).$$

Przyjmijmy, że $a_{max} = \max\{k : f(k) = f(a)\}$ oraz $a_{min} = \min\{k : f(k) = f(a)\}$ i analogiczne definicje dla b i funkcji g. Przypuśćmy, że $a_{min} \leqslant b_{min}$. Jeżeli $a_{max} < b_{min}$, to $g(a_{max}) < g(b) = f(a) = f(a_{max})$. Wtedy $f(a_{max}) = f(a_{max} + 1)$, a to nie jest możliwe. Mamy więc $a_{max} \geqslant b_{min}$. Zauważmy, że $f(b_{min}) = f(a) = g(b) = g(b_{min})$. Dalej pokazujemy, że fragment ścieżki S od w_0 do $w_{b_{min}}$ wyznacza równanie $u' = v'$ i dlatego kończy się w wierzchołku $[\varepsilon, \varepsilon]$. $\square$

Wniosek 19.3 *Niech S będzie ścieżką w grafie G z twierdzenia 18.1 akceptującą równanie $u = v$. Równanie $u = v$ jest nierozkładalne wtedy i tylko wtedy, gdy S nie zawiera wewnątrz wierzchołka $[\varepsilon, \varepsilon]$.* $\square$

Wniosek 19.4 *Minimalny zbiór generatorów $E(\alpha)$ (czyli $E_{red}(\alpha)$) jest regularny.* $\square$

Przykład 19.5 Weźmy homomorfizm α taki, że $\alpha(x) = a$, $\alpha(y) = ba$ i $\alpha(z) = ab$. Zauważmy, że α jest rozwiązaniem układu U złożonego z równań $xy^i = z^i x$ dla $i = 1, 2, \ldots$. Co więcej, układ U jest najmniejszym zbiorem generatorów półgrupy U^* oraz $E(\alpha)$ jest najmniejszą półgrupą zawierającą U oraz relację identyczności, i taką, że warunek $(u, v) \in E(\alpha)$ implikuje, że $(v, u) \in E(\alpha)$. Zauważmy też, że układ U jest równoważny równaniu $xy = zx$.

20 Zwartość dla układów regulanych

Lemat 20.1 *Jeżeli $U \subseteq \Xi^* \times \Xi^*$ jest regularnym układem równań, to w sposób efektywny można znaleźć pewien skończony, równoważny podukład U.*

Dowód. Przypuśćmy, że układ U jest akceptowany przez graf G o n wierzchołkach. Niech U' będzie zbiorem zawierającym te równania, które są wyznaczone w grafie G przez akceptujące ścieżki długość $\leqslant 2n$.

Niech α będzie dowolnym rozwiązaniem układu U'. Pokażemy, że α spełnia każde równanie należące go U i zrobimy to przez indukcję ze względu na długość ścieżki wyznaczającej równanie. Przypuśćmy, że równanie $u = v$ jest wyznaczone przez ścieżkę S. Możemy założyć, że S ma długość $> 2n$. Ponieważ graf G ma n wierzchołków, w pierwszej i drugiej połowie ścieżki pewien wierzchołek występuje dwukrotnie. Ścieżka S ma więc postać

$$w_p \xrightarrow[(u_1,v_1)]{*} w_1 \xrightarrow[(u_2,v_2)]{*} w_1 \xrightarrow[(u_3,v_3)]{*} w_2 \xrightarrow[(u_4,v_4)]{*} w_2 \xrightarrow[(u_5,v_5)]{*} w_k,$$

a równanie $u = v$ rozpada się na pięć części i jest równe $u_1u_2u_3u_4u_5 = v_1v_2v_3v_4v_5$.

Zauważmy, że do U należą także równania

$$u_1u_3u_4u_5 = v_1v_3v_4v_5, \quad u_1u_2u_3u_5 = v_1v_2v_3v_5 \ \text{ oraz } \ u_1u_3u_5 = v_1v_3v_5$$

i są to równania wyznaczone prze krótsze ścieżki

$$w_p \xrightarrow[(u_1,v_1)]{*} w_1 \xrightarrow[(u_3,v_3)]{*} w_2 \xrightarrow[(u_4,v_4)]{*} w_2 \xrightarrow[(u_5,v_5)]{*} w_k,$$

$$w_p \xrightarrow[(u_1,v_1)]{*} w_1 \xrightarrow[(u_2,v_2)]{*} w_1 \xrightarrow[(u_3,v_3)]{*} w_2 \xrightarrow[(u_5,v_5)]{*} w_k,$$

oraz

$$w_p \xrightarrow[(u_1,v_1)]{*} w_1 \xrightarrow[(u_3,v_3)]{*} w_2 \xrightarrow[(u_5,v_5)]{*} w_k.$$

Z założenia indukcyjnego, równania te są spełnione przez α. Wywnioskujemy stąd, że także $u = v$ jest spełnione przez α.

Wiemy, że

$$\alpha(u_1)\alpha(u_3)\alpha(u_4)\alpha(u_5) = \alpha(v_1)\alpha(v_3)\alpha(v_4)\alpha(v_5), \tag{4}$$

$$\alpha(u_1)\alpha(u_2)\alpha(u_3)\alpha(u_5) = \alpha(v_1)\alpha(v_2)\alpha(v_3)\alpha(v_5), \tag{5}$$

$$\alpha(u_1)\alpha(u_3)\alpha(u_5) = \alpha(v_1)\alpha(v_3)\alpha(v_5), \tag{6}$$

Jeżeli $\alpha(u_1)$ jest krótsze od $\alpha(v_1)$, to z (6) dla pewnego słowa x mamy

$$\alpha(u_1)x = \alpha(v_1) \ \text{ oraz } \ \alpha(u_3)\alpha(u_5) = x\alpha(v_3)\alpha(v_5). \tag{7}$$

Stąd i z (7) wynika na przykład (są możliwe dwa przypadki), że istnieje słowo y takie, że

$$x\alpha(v_3)y = \alpha(u_3) \ \text{ oraz } \ y\alpha(u_5) = \alpha(v_5) \tag{8}$$

Teraz, korzystając z (5) i (7), otrzymujemy, że

$$\alpha(u_2)x = x\alpha(v_2). \tag{9}$$

Podobnie, korzystając z (4), (7) i (8), otrzymujemy, że

$$y\alpha(u_4) = \alpha(v_4)y. \tag{10}$$

Zauważmy, że

$$\alpha(v_1)\alpha(v_2)\alpha(v_3)\alpha(v_4)\alpha(v_5) \overset{(7),(8)}{=} \alpha(u_1)x\alpha(v_2)\alpha(v_3)\alpha(v_4)\alpha(u_5) \overset{(9),(10)}{=}$$

$$= \alpha(u_1)\alpha(u_2)x\alpha(v_3)\alpha(u_4)\alpha(u_5) \overset{(8)}{=} \alpha(u_1)\alpha(u_2)\alpha(u_3)\alpha(u_4)\alpha(u_5).$$

W pozostałych przypadkach postępujemy podobnie. □