Całkowanie przez podstawianie i dwa zadania

Antoni Kościelski

1 Funkcje dwóch zmiennych i podstawianie

Dla funkcji dwóch zmiennych zachodzi następujący wzór na całkowanie przez podstawianie:

$$\iint_P f(x(a,b), y(a,b)) \cdot |\varphi'(a,b)| \; dadb = \iint_{\varphi(P)} f(x,y) \; dxdy, \tag{1}$$

gdzie

$$\varphi : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2 \;\text{ oraz }\; \varphi(a,b) = (x(a,b), y(a,b))$$

jest pewnym przekształceniem płaszczyzny $\mathcal{R}^2$ w siebie, spełniającym długą listę założeń, $\varphi(P) = \{(x(a,b), y(a,b)) \in \mathcal{R}^2 : (a,b) \in P\}$ jest obrazem zbioru P wyznaczonym przez przekształcenie φ, a

$$\varphi'(a,b) = \begin{vmatrix} x_a(a,b) & x_b(a,b) \\ y_a(a,b) & y_b(a,b) \end{vmatrix}$$

jest jakobianem przekształcenia φ, czyli wyznacznikiem (funkcyjnej w ogólnym przypadku) macierzy pochodnych składowych przekształcenia φ, czyli

$$x_a(a,b) = \frac{dx(a,b)}{da} = \text{pochodna } x(a,b) \text{ ze względu na } a \text{ przy ustalonym } b$$

itd. Zauważmy jeszcze, że $|\varphi'(a,b)|$ to wartość bezwzględna jakobianu.

Wśród założeń gwarantujących prawdziwość wzoru na całkowanie przez podstawiania, oprócz wymagań „regularności" podstawienia i wykonalności potrzebnych operacji (np. istnienia pochodnych występujących w jakobianie), jest też założenie o różnowartościowości podstawienia φ.

Na wykładzie z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki, twierdzenie o całkowaniu przez podstawianie jest przyjmowane jako rzecz dana, uzasadniona wcześniej.

2 Całka Poissona i zadanie 2 z listy 8

2.1 Plan rozwiązania

W zadaniu 2 z listy 8 należy obliczyć całkę Poissona (?)

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(lub równoważną całkę od 0 do ∞ z tej samej funkcji). Sens tego zadania polega na weryfikacji znanego wzoru, prezentacji metody obliczania całek tego rodzaju, ważnych, ale zwykle trudnych do wyliczenia, wymagających pomysłowych sposobów, a zwłaszcza na kolejnym ćwiczeniu stosowania wzoru na całkowanie przez podstawianie.

Zamiast wyżej podanej całki będziemy liczyć jej kwadrat

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\right) = \iint_{R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy.$$

Licząc będziemy korzystać z wzoru (1) na całkowanie przez podstawianie w sposób odwrotny niż zwykłe, „komplikując” (pozornie) wyrażenie, biorąc

$$f(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

Będziemy starać się dobrać P tak, aby $\varphi(P) = R^2$. W ten sposób prawa strona wzoru (1) będzie interesującą nas całką.

Podstawienie będzie polegać na zamianie współrzędnych biegunowych na kartezjańskie, a więc będzie dane wzorami

$$\varphi(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)), \quad \text{gdzie} \;\; x(r,\theta) = r\cos\theta \;\; \text{i} \;\; y = r\sin\theta.$$

Łatwo wyliczyć jakobian podstawienia φ

$$\varphi'(r,\theta) = \begin{vmatrix} x_r(r,\theta) & x_\theta(r,\theta) \\ y_r(r,\theta) & y_\theta(r,\theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Ponieważ $\varphi(P)$ ma być zbiorem wszystkich możliwych współrzędnych kartezjańskich, za P można wziąć zbiór wszystkich możliwych współrzędnych biegunowych, czyli chcielibyśmy przyjąć $P = [0,\infty) \times [0, 2\pi)$. Oczywiście, mamy $\varphi(P) \subseteq R^2$ (nawet dla dowolnego P). Zawieranie przeciwne jest znane i łatwo się je uzasadnia. Dla dowolnej pary $(x,y) \in R^2$ bierzemy $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Liczbę θ znajdujemy rozwiązując układ równań trygonometrycznych

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Z ogólnej teorii takich równań, która powinna być znana ze szkoły średniej (lub lepiej, z własności Darboux, która powinna być znana z podstawowego wykładu z analizy matematycznej), otrzymujemy, że ten układ równań ma rozwiązanie θ, dla którego mamy $\varphi(r,\theta) = (x,y)$. To dowodzi równości $\varphi(P) = R^2$.

Podstawiając wszystkie powyższe ustalenia do wzoru (1) otrzymujemy

$$\iint_{R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \iint_P e^{-\frac{x^2(r,\theta)+y^2(r,\theta)}{2}} \cdot |r| dr d\theta = \iint_P e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot |r| dr d\theta.$$

Jest jeszcze drobne pytanie, czy te równości na pewno są prawdziwe.

Zauważmy, że jeżeli zamiast P weźmiemy $P' = [0,\infty) \times [0, 4\pi)$, to właściwie wszystko, co do tej pory zostało powiedziane, pozostanie prawdziwe. Z drugiej strony, całka po prawej stronie powyższego wzoru dla P' (zamiast P) będzie dwa razy większa, a to raczej nie powinno mieć miejsca. Proponuję teraz ponowne przejrzenie powyższego tekstu w poszukiwaniu usterek, które mogą mieć wpływ na prawdziwość obliczeń.

Opisana wyżej sytuacja jest spowodowana tym, że nie sprawdziliśmy istotnego założenia, jakim jest różnowartościowość podstawienia φ. Na zbiorze P' przekształcenie φ nie jest różnowartościowe, mamy $\varphi(1,\pi) = \varphi(1, 3\pi)$ dla par $(1,\pi), (1,3\pi) \in P'$. Co więcej, tak jest również w wielu innych przypadkach.

Przekształcenie φ też nie jest różnowartościowe na zbiorze P, mamy $\varphi(0,\pi) = \varphi(0,\pi/2)$ dla par $(0,\pi),(0,\pi/2) \in P$.

Radą jest dalsze zmniejszenie zbioru P. Powinniśmy przyjąć, że $P = (0,\infty) \times [0,2\pi)$, lub nawet $P = (0,\infty) \times (0,2\pi)$. Nietrudno sprawdzić, że w pierwszym przypadku $\varphi(P) = R^2 \setminus \{(0,0)\}$. W drugim – $\varphi(P) = \{(x,y) \in R^2 :\ y \neq 0 \vee x < 0\}$ jest płaszczyzną R^2 bez początku układu współrzędnych i dodatniej częścu osi x-ów.

2.2 Rozwiązanie zadania 2 z listy 8

Weźmy podstawienie

$$\varphi(r,\theta) = (x(r,\theta), y(r,\theta)), \quad \text{gdzie} \ \ x(r,\theta) = r\cos\theta \ \ \text{i} \ \ y = r\sin\theta$$

oraz zbiór

$$P = (0,\infty) \times [0,2\pi).$$

Zauważmy, że zachodzi wzór

$$\varphi(P) = R^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Przystępujemy do obliczenia interesującej nas całki:

$$\iint_{R^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \overset{(1)}{=} \iint_{R^2\setminus\{(0,0)\}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \iint_{\varphi(P)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy =$$

$$\overset{(2)}{=} \iint_P e^{-\frac{x^2(r,\theta)+y^2(r,\theta)}{2}} \cdot |r|\ drd\theta \overset{(3)}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r\ d\theta dr = \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r \cdot \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) dr$$

$$= \pi \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot 2r\ dr \overset{(4)}{=} \pi \int_0^\infty e^{-\frac{t}{2}}\ dt = -2\pi e^{-\frac{t}{2}} \Big|_0^\infty = 2\pi.$$

Uzasadnienie niektórych przejść:

(1) całka (oznaczona) nie zależy od wartości funkcji całkowanej w pojedyńczym punkcie,

(2) wynika z twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie, $x^2(r,\theta)$ to kwadrat wartości $x(r,\theta)$ podstawianej za x, korzystamy też z wzoru $\varphi'(r,\theta) = r$ na jakobian podstawienia φ,

(3) przejście od całki podwójnej do iterowanej, całkujemy po zbiorze, w którym r przyjmuje wartości dodatnie, z definicji podstawienia φ wynika, że $x^2(r,\theta) + y^2(r,\theta) = r^2$,

(4) całkowanie przez podstawianie funkcji jednej zmiennej, podstawiane jest $t(r) = r^2$.

Z przeprowadzonych rachunków wynika, że

$$I = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

3 Zadanie 1 z listy 7

W zadaniu 1 z listy 7 mamy dwuwymiarową zmienną losową (X,Y), która ma rozkład jednostajny, o gęstości

$$f(x,y)=1 \text{ dla argumentów takich, że } 0<x,y\leqslant 1.$$

Mamy znaleźć gęstość zmiennej $Z=X/Y$. Rozwiązując to zadanie też możemy skorzystać z twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie. Dziedziną funkcji f niech będzie zbiór

$$P=\{(x,y)\in R^2 : 0<x,y\leqslant 1\}.$$

Najpierw trzeba wymyślić podstawienie. Oczywiście podstawiamy $z(x,y)=\frac{x}{y}$. Drugą funkcją niech będzie $t(x,y)=y$ (ta druga funkcja powinna umożliwiać przeprowadzanie łatwych rachunków). Będziemy więc posługiwać się podstawieniem

$$\varphi:\mathcal{R}^2\to\mathcal{R}^2 \text{ oraz } \varphi(x,y)=(z(x,y),t(x,y))=(\frac{x}{y},y).$$

Od razu wyliczmy jakobian

$$\varphi'(x,y)=\begin{vmatrix} z_x(x,y) & z_y(x,y)\\ t_x(x,y) & t_y(x,y)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{y}$$

i znajdźmy $\varphi(P)$. Jest to zbiór

$$\varphi(P)=\{(\frac{x}{y},y)\in R^2:\ 0<x,y\leqslant 1\}=\{(z,t)\in R^2:\ 0<t\leqslant 1\wedge 0<z\leqslant \frac{1}{t}\}.$$

Plan rozwiązania jest następujący: najpierw znajdujemy gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej (Z,T), a następnie, posługując się znalezioną gęstością znajdujemy gęstość zmiennej Z.

Aby w algorytmizowany sposób wyliczyć gęstość pary zmiennych (Z,T), bierzemy całkę

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy$$

(gęstości zmiennych (X,Y)) i całkujemy ją przez podstawianie podstawiając φ. Otrzymujemy w ten sposób całkę z pewnej funkcji $g(z,t)$, która jest gęstością dwuwymiarowej zmiennej (Z,T).

Metoda pierwsza. Biorę funkcję $f(x,y)$ i jakoś przekształcam tak, aby otrzymać wyrażenie postaci $g(z(x,y),t(x,y))|\varphi'(x,y)|$. Zwykle mnożę i dzielę $f(x,y)$ przez jakobian, a później coś kombinuję:

$$f(x,y)=\frac{f(x,y)}{|\varphi'(x,y)|}\cdot|\varphi'(x,y)|=g(z(x,y),t(x,y))|\varphi'(x,y)|.$$

W naszym zadaniu (ponieważ $y>0$)

$$f(x,y)=\frac{1}{\frac{1}{y}}\cdot\frac{1}{y}=y\cdot\frac{1}{y}=t(x,y)\cdot\frac{1}{y}.$$

Stąd na mocy twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie (wzór (1))

$$\iint_P f(x,y)\,dxdy=\iint_P t(x,y)\cdot\frac{1}{y}\,dxdy=\iint_{\varphi(P)} t\,dzdt$$

i gęstością zmiennych (Z,T) jest funkcja $g(z,t)=t$, określona na zbiorze $\varphi(P)$.

Metoda druga, jeszcze bardziej zalgorytmizowana. Wiedząc, jak zmienne Z i T zależą od X i Y, znajdujemy zależność odwrotną, wyrażamy X i Y przez Z i T. W naszym zadaniu, $Y=T$ i $X=ZT$ (albo $y=t$ i $x=zt$). Znajdujemy więc podstawienie odwrotne $\varphi^{-1}(z,t)=(zt,t)$. Piszemy $\varphi'(x,y)\ dxdy=dzdt$, a stąd, po formalnych przekształceniach otrzymujemy $dxdy=\frac{dzdt}{\varphi'(x,y)}$. Teraz bierzemy całkę

$$\iint_P f(x,y)\ dxdy$$

i podstawiamy w niej wyliczone wartości

$$\iint_P f(x,y)\ dxdy=\iint_{\varphi(P)} f(zt,t)\cdot\frac{dzdt}{\varphi'(zt,t)}=\iint_{\varphi(P)} 1\cdot\frac{dzdt}{\frac{1}{t}}=\iint_{\varphi(P)} t\ dzdt$$

po uwzględnieniu wzorów na f i φ'.

Aby teraz wyliczyć gęstość zmiennej $\frac{X}{Y}$ wystarczy gęstość pary (Z,T) scałkować po t. Aby to zrobić trzeba dobrze wyobrazić sobie zbiór $\varphi(P)$ (można go sobie narysować). Dla całki z gęstości (Z,T) mamy

$$\iint_{\varphi(P)} t\ dzdt=\int_0^1\int_0^1 t\ dtdz+\int_1^\infty\int_0^{\frac{1}{z}} t\ dtdz.$$

Stąd dla $z\in(0,1]$ gęstość f_Z zmiennej Z dana jest wzorem

$$f_Z(z)=\int_0^1 t\ dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2},$$

a dla pozostałych z – wzorem:

$$f_Z(z)=\int_0^{\frac{1}{z}} t\ dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{z}}=\frac{1}{2z^2}.$$

Ostatecznie, gęstością zmiennej Z jest funkcja f_Z taka, że

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2} & \text{jeżeli } 0<z\leqslant 1\\ \frac{1}{2z^2} & \text{jeżeli } 1<z.\end{cases}$$