

Rozwiązania wybranych zadań z listy 5

Antoni Kościelski

1 Dwie całki

Najpierw wyprowadzimy pewien wzór z rachunku całkowego. Weźmy funkcję $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, odwrotną do funkcji $\sin$, czyli funkcję $h(x) = \arcsin(x)$, która dla wszystkich $x \in [-1, 1]$ spełnia równość

$$\sin(h(x)) = x$$

Różniczkując tę ostatnią równość stronami otrzymujemy

$$1 = \cos(h(x)) \cdot h'(x) = \sqrt{1 - \sin^2(h(x))} \cdot h'(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot h'(x).$$

Stąd

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{oraz} \quad \int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx = h(x) = \arcsin(x).$$

Z powyższych ustaleń, całkując przez podstawianie $y = \sqrt{x}$, otrzymujemy, że

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int \frac{2}{\sqrt{1 - y^2}} dy = 2 \cdot \arcsin(\sqrt{x}).$$

Wobec tego

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = 2 \cdot \arcsin(\sqrt{x}) \Big|_0^1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.$$

Wobec tego funkcja $f : (0, 1) \rightarrow \mathcal{R}$ dana wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}$$

ma całkę

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx = 1$$

i jest gęstością pewnego rozkładu prawdopodobieństwa, w szczególności rozkładu pewnej zmiennej losowej X .

Uwaga. Całkę $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ można też wyliczyć podstawiając $t(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$. Nietrudno sprawdzić, że $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)} \cdot t'(x)} = \frac{1}{1+t^2(x)}$ (patrz rozdział 2). Stąd otrzymujemy, że $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \arctg\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)$.

2 Kolejna całka i wartość oczekiwana zmiennej z poprzedniego rozdziału

Teraz policzymy wartość oczekiwaną zmiennej losowej X z poprzedniego rozdziału, a więc całkę

$$E(X) = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$$

Całkę tę będziemy liczyć podstawiając

$$t(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}.$$

Dla funkcji $t(x)$ mamy

$$(1-x) \cdot t^2(x) = x,$$

a także mamy równości

$$x = \frac{t^2(x)}{t^2(x) + 1} \quad \text{oraz} \quad 1-x = \frac{1}{t^2(x) + 1}.$$

Oczywiście, mamy też

$$t'(x) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1-x}{x}} \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2t(x)} (t^2(x) + 1)^2.$$

Możemy teraz obliczyć całkę

$$\pi E(X) = \int_0^1 t(x) dx = \int_0^1 \frac{t(x)}{t'(x)} t'(x) dx = \int_0^1 \frac{2t^2(x)}{(t^2(x) + 1)^2} t'(x) dx = \int_0^\infty \frac{2t^2}{(t^2 + 1)^2} dt.$$

Tę ostatnią całkę będziemy całkować przez części. Jest ona równa

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t \cdot \frac{2t}{(t^2 + 1)^2} dt &= \int_0^\infty t \cdot \left(\frac{-1}{t^2 + 1} \right)' dt = t \cdot \frac{-1}{t^2 + 1} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{t^2 + 1} dt = \\ &= \left(\frac{-t}{t^2 + 1} + \arctg(t) \right) \Big|_0^\infty = \lim_{x \rightarrow 1} \arctg \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

(Pamiętajmy, że mamy do czynienia z całką niewłaściwą, która jest odpowiednią granicą. Jeżeli podane rachunki nie są jasne, to można spróbować najpierw wyliczyć odpowiednią całkę nieoznaczoną).

Ostatecznie otrzymujemy, że

$$\int \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \arctg \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} \right) - \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

oraz $E(X) = \frac{1}{2}$.

Uwaga. Łatwy, ale trudny do zauważenia sposób wyliczenia wartości oczekiwanej zmiennej X jest następujący: najpierw podstawiając $y = 1-x$ sprawdzamy, że $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} dx$.

Wobec tego, $2\pi E(X) = \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \pi$. Druga z równości zachodzi, gdyż równe są funkcje podcałkowe.

3 Gęstość

Teraz będziemy rozważać ciągle rozkłady prawdopodobieństwa, a także zmienne losowe (ciągłe?) o ciągłych rozkładach prawdopodobieństwa. Dla takich rozkładów, prawdopodobieństwa $P(X = a)$ tego, że zmienna X przyjmuje ściśle określoną wartość a jest równe 0. W konsekwencji, w przypadku takich zmiennych nie interesuje nas prawdopodobieństwo $P(X = a)$, za to interesują nas prawdopodobieństwa $P(a \leq X < b)$ tego, że zmienna X przyjmuje wartość przynajmniej równą a i mniejszą od b .

Mając dystrybuentę F_X te prawdopodobieństwa wyliczamy zgodnie ze wzorem

$$P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Nietrudno też zauważyć, że dla ciągłych zmiennych losowych mamy

$$P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b).$$

Rozkłady ciągłych zmiennych losowych można opisywać za pomocą gęstości. Jeżeli znamy gęstość f_X zmiennej losowej X , to prawdopodobieństwa $P(a \leq X < b)$ dla $a < b$ (!) obliczamy zgodnie z wzorem

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f_X(x) dx.$$

Także odwrotnie, właściwie każdą funkcję f_X spełniającą podane równości nazywamy gęstością. Dowodzi się ponadto, że znajomość prawdopodobieństw $P(a \leq X < b)$ pozwala wyliczyć wszystkie inne interesujące nas prawdopodobieństwa.

4 Gęstość $\sqrt{X}$

Wyznamy teraz gęstość zmiennej losowej $\sqrt{X}$, gdzie X jest zmienną losową o gęstości danej wzorem

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \quad \text{dla } x \in (0, 1)$$

i rozważanej w rozdziale 1.

Weźmy więc dwie liczby a i b takie, że $0 < a < b < 1$. Zauważmy, że

$$P(a \leq \sqrt{X} < b) = P(a^2 \leq X < b^2) = \int_{a^2}^{b^2} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx.$$

Tę ostatnią całkę będziemy całkować przez podstawianie, zgodnie z wzorem

$$\int_a^b g(y(x)) \cdot y'(x) dx = \int_{y(a)}^{y(b)} g(y) dy,$$

używając podstawienia $y(x) = \sqrt{x}$ (rosnącego!). Ponieważ

$$P(a \leq \sqrt{X} < b) = \int_{a^2}^{b^2} f(x) dx = \int_{a^2}^{b^2} \frac{f(x)}{y'(x)} \cdot y'(x) dx,$$

więc gdyby udało się wyrażenie

$$\frac{f(x)}{y'(x)}$$

przedstawić w postaci $g(y(x))$, to mielibyśmy

$$\int_{a^2}^{b^2} \frac{f(x)}{y'(x)} \cdot y'(x) dx = \int_{a^2}^{b^2} g(y(x)) \cdot y'(x) dx = \int_{y(a^2)}^{y(b^2)} g(y) dy = \int_a^b g(y) dy.$$

Oznaczałoby to, że funkcja $g(y)$ jest gęstością rozkładu zmiennej $\sqrt{X}$.

Liczmy więc

$$\frac{f(x)}{y'(x)} = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \cdot (2 \cdot \sqrt{x}) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x}} = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2(x)}}.$$

Z przedstawionych wyżej rachunków wynika, że dla funkcji

$$g(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}$$

zachodzi równość

$$P(a \leq \sqrt{X} < b) = \int_a^b \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} dy = \int_a^b g(y) dy.$$

Równość ta oznacza, że funkcja $g(y)$ jest gęstością zmiennej losowej $\sqrt{X}$.

5 Całkowanie funkcji dwóch zmiennych i podstawianie

Całka

$$\iint_P f(x, y) dx dy$$

funkcji $f(x, y)$ dwóch zmiennych na zbiorze P jest pewnym uogólnieniem całki oznaczonej funkcji jednej zmiennej na odcinku lub półprostej. Płaszczyzna ma jednak wiele różnorodnych podzbiorów, na przykład prostokąty $P = \{(x, y) \in \mathcal{R}^2 : a \leq x < b \wedge c \leq y < d\}$ lub koło K o promieniu 1 i środku w punkcie $(0, 0)$.

Całka funkcji dwóch zmiennych może zostać wyrażona jako całka podwójna (całka z całki). I tak dla całki po prostokącie P mamy

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy,$$

a na kole K –

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right) dx = \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right) dy,$$

gdzie np. $y(x) = \sqrt{1-x^2}$ jest równaniem górnego półokręgu ograniczającego koło K .

Dla całek funkcji dwóch zmiennych zachodzi też następujący wzór na całkowanie przez podstawianie:

$$\iint_P f(u(x, y), v(x, y)) \cdot |\varphi'(x, y)| dx dy = \iint_{\varphi(P)} f(u, v) du dv,$$

gdzie

$$\varphi : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2 \text{ oraz } \varphi(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

jest pewnym przekształceniem płaszczyzny $\mathcal{R}^2$ w siebie, spełniającym długą listę założeń, $\varphi(P) = \{(u(x, y), v(x, y)) \in \mathcal{R}^2 : ((x, y) \in P)\}$ jest obrazem zbioru P wyznaczonym przez przekształcenie φ , a

$$\varphi'(x, y) = \begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix}$$

jest jakobianem przekształcenia φ , czyli wyznacznikiem (funkcyjnej w ogólnym przypadku) macierzy pochodnych składowych przekształcenia φ , czyli

$$u_x(x, y) = \frac{du(x, y)}{dx} = \text{pochodna } u(x, y) \text{ ze względu na } x \text{ przy ustalonym } y$$

itd. Zauważmy jeszcze, że $|\varphi'(x, y)|$ to wartość bezwzględna jakobianu.

6 Zadanie 3 z listy 5

Mamy dwuwymiarową zmienną losową (X_1, X_2) o gęstości

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 2a^2 e^{-a(x_1+x_2)} & \text{jeżeli } 0 < x_1 < x_2, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

Chcemy znaleźć gęstość dwuwymiarowej zmiennej losowej $(X_1, X_2 - X_1)$.

Będziemy szukać gęstości tak, jak w rozdziale 4, wykorzystując wzór na całkowanie przez podstawianie. Tym razem będziemy podstawiać przekształcenie $\varphi : \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$ zdefiniowane wzorem

$$\varphi(x_1, x_2) = (u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)), \quad \text{gdzie } u(x_1, x_2) = x_1 \quad \text{oraz } v(x_1, x_2) = x_2 - x_1.$$

Od razu wyliczmy jakobian φ :

$$\varphi'(x, y) = \begin{vmatrix} u_x(x, y) & u_y(x, y) \\ v_x(x, y) & v_y(x, y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Aby całkować przez podstawianie w tej sytuacji, musimy znaleźć funkcję g taką, że

$$2a^2 e^{-a(x_1+x_2)} = 2a^2 e^{-a(2x_1+(x_2-x_1))} = g(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2))$$

(można też od razu próbować wyliczyć funkcję h , patrz dalej). Nietrudno zauważyć, że tę równość spełnia funkcja g dana wzorem

$$g(u, v) = 2a^2 e^{-a(2u+v)}.$$

Weźmy teraz trzy zbiory

$$P = \{(u, v) \in \mathcal{R}^2 : a \leq u < b \wedge c \leq v < d\}$$

(czyli dowolny prostokąt)

$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2 : a \leq u(x_1, x_2) < b \wedge c \leq v(x_1, x_2) < d\} = \varphi^{-1}(P)$$

(czyli przeciwobraz P wyznaczony przez φ) oraz

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathcal{R}^2 : 0 < x_1 < x_2\}.$$

Rozwiązując odpowiednie nierówności otrzymujemy, że

$$\begin{aligned} P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 - X_1 < d) &= P(a \leq u(X_1, X_2) < b, c \leq v(X_1, X_2) < d) = \\ &= P(a \leq X_1 < b, c + X_1 \leq X_2 < d + X_1) = P((X_1, X_2) \in A). \end{aligned}$$

Stąd

$$P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 - X_1 < d) = \int \int_A f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_a^b \left(\int_{c+x_1}^{d+x_1} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1,$$

a uwzględniając postać definicji funkcji f –

$$\begin{aligned} P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 - X_1 < d) &= \int \int_{A \cap D} 2a^2 e^{-a(x_1+x_2)} dx_1 dx_2 = \\ &= \int \int_{A \cap D} g(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) \cdot 1 dx dy. \end{aligned}$$

Jeżeli teraz skorzystamy z twierdzenia o podstawianiu i różnowartościowości φ , to otrzymamy

$$P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 - X_1 < d) = \int \int_{\varphi(\varphi^{-1}(A)) \cap \varphi(D)} g(u, v) dudv = \int \int_{P \cap \varphi(D)} g(u, v) dudv.$$

Teraz musimy wyliczyć obraz $\varphi(D)$. Mamy

$$\varphi(D) = \{(u(x_1, x_2), v(x_1, x_2)) \in \mathcal{R}^2 : 0 < x_1 < x_2\} = \{(u, v) \in \mathcal{R}^2 : 0 < u \wedge 0 < v\}.$$

Wobec tego dla funkcji

$$h(u, v) = \begin{cases} g(u, v) & \text{jeżeli } 0 < u \wedge 0 < v, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases} = \begin{cases} 2a^2 e^{-a(2u+v)} & \text{jeżeli } 0 < u \wedge 0 < v, \\ 0 & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

mamy

$$P(a \leq X_1 < b, c \leq X_2 - X_1 < d) = \int \int_P h(u, v) dudv.$$

Ta równość stwierdza, że funkcja H jest gęstością dwuwymiarowej zmiennej losowej $(X_1, X_2 - X_1)$.