Rozwiązania zadania 9 z listy 3

Antoni Kościelski

1 Pewna uwaga

Sformułowanie zadania ma usterkę lub może obowiązuje w nim założenie domyślne. Brakuje założenia, że dystrubuanta F_X jest funkcją ciągłą. Założenie to jest spełnione dla zmiennych o ciągłych rozkładach, dla których istnieje gęstość f_X. Wtedy proste prawdopodobieństwa można obliczać wykonując odpowiednie całkowania, w tym dystrybuanta wyraża się wzorem

$$F_X(a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx.$$

Jeżeli dystrybuana F_X nie jest ciągła, to korzystając z monotoniczności i lewostronnej ciągłości znajdujemy liczby a i b takie, że

$$F_X(a) < b = \lim_{x \leftarrow a^+} F_X(x).$$

Wtedy oczywiście

$$X \leqslant a \vee a < X.$$

Stąd

$$X \leqslant a \vee a + \frac{1}{n} < X$$

dla pewnego n. Teraz z monotoniczności F_X mamy

$$F_X(X) \leqslant F_X(a) \vee b \leqslant F_X(a + \frac{1}{n}) \leqslant F_X(X).$$

Wobec tego, funkcja $F_X(X)$ nie przyjmuje żadnych wartości w przedziale $(F_X(a), b]$ i

$$P(F_X(a) < F_X(X) \leqslant b) = 0.$$

Dla zmiennej Y o rozkładzie $U(0,1)$ mamy jednak

$$P(F_X(a) < Y \leqslant b) = b - F_X(a) > 0.$$

2 Rozwiązanie elementarne

Jeżeli dystrybuanta $F_X : R \to [0,1]$ jest ciągła, to istnieje coś w rodzaju funkcji do niej odwrotnej. Weźmy $a \in (0,1)$ i zajmijmy się przeciwobrazem

$$F_X^{-1}(\{a\}) = \{x \in R : F_X(x) = a\}.$$

Własność Darboux implikuje, że ten przeciwobraz jest niepusty, monotoniczność dystrybuanty (słaba „rosnącość”) – że jest odcinkiem, a jej ciągłość – że jest to odcinek domknięty. Przyjmijmy, że lewym końcem odcinka $F_X^{-1}(\{a\})$ jest $G(a) = \min F_X^{-1}(\{a\})$.

Oczywiście, $F_X(G(a)) = a$ dla wszytskich $a \in (0,1)$.

Wyliczymy teraz dystrybuantę zmiennej $Y = F_X(X)$. Dla $a \in (0,1)$ i $x \in R$ warunki $F_X(x) < a$ oraz $x < G(a)$ są równoważne. Stąd mamy

$$F_Y(a) = P(F_X(X) < a) = P(X < G(a)) = F_X(G(a)) = a,$$

a także

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{dla } a \leqslant 0 \\ a & \text{jeżeli } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Jest to oczywiście dystrybuanta rozkładu normalnego $U(0,1)$.

3 Pewne twierdzenie

Mając zmienną losową X i jej rozkład często szukamy rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Y = h(X)$ dla rzeczywistej funkcji h. Z tego powodu podaje się różne zależności między tymi rozkładami. W szczególności na ćwiczeniach pojawił się już wzór taki, jak

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|$$

podający zależność między gęstościami zmiennych X i $Y = h(X)$. Problemem jest tylko, czy ten wzór jest słuszny zawsze, czy tylko czasami, a jeżeli czasami, to jakie warunki muszą być spełnione, aby zachodził.

W literaturze (np. Mirosław Krzyśko, Statystyka matematyczna, wyd. nauk. UAM) można znaleźć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.1 *Przypuśćmy, że zmienna losowa X ma gęstość $f_X : R \to R$, $D = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$, a jest $h : R \to R$ przeksztaceniem, które zbiór D przeprowadza wzajemnie jednoznacznie na zbiór H. Wtedy jeżeli funkcja odwrotna h^{-1} ma ciągłą i niezerową pochodną, to funkcja f_Y dana wzorem*

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)|$$

na zbiorze H i przyjmująca wartość 0 poza H jest gęstością zmiennej losowej $h(X)$.

4 Drugie rozwiazanie

Będziemy korzystać z przytoczonego wyżej twierdzenia. Dodatkowo i nie wiadomo na jakiej podstawie będziemy zakładać, że gęstość f_X zmiennej X jest ciągła i dodatnia na całej prostej. Część przyjętych założeń jest mało istotna. Podobną trudność miałoby to zadanie przy założeniu, że gęstość jest dodatnia na pewnej półprostej lub na pewnym odcinku. Prawdę mówiąc, rzadko spotykamy się z gęstościami, które nie spełniają takich założeń.

W naszym przypadku h jest dystrybuantą F_X rozkładu zmiennej X (czyli $h = F_X$). Wiemy więc, że pochodna

$$h'(x) = (F_X)'(x) = f_X(x),$$

a więc funkcja h ma ciągłą i dodatnią pochodną. Ze znanych z analizy matematycznej twierdzeń (np. z twierdzenia o wartości średniej) wynika, że jest to funkcja rosnąca i w konsekwencji różnowartościowa. Niewątpliwie przekształca zbiór liczb rzeczywistych na odcinek $(0,1)$. Ma więc funkcję odwrotną h^{-1} określoną na odcinku $(0,1)$. Powołując się znowu na twierdzenia o ciągłości i różniczkowalności funkcji odwrotnej, które powinny być znane z analizy matematycznej, stwierdzamy, że funkcja h^{-1} spełnia założenia przytoczonej w poprzednim rozdzialiku twierdzenia. Możemy więc skorzystać z tego twierdzenia. W ten sposób otrzymujemy, że gęstość zmiennej $Y = h(X)$ wyraża się na odcinku $(0,1)$ wzorem

$$f_Y(y) = f_X(h^{-1}(y)) \cdot |(h^{-1})'(y)| = (F_X)'(F_X^{-1}(y)) \cdot (F_X^{-1})'(y)$$

(dodatniość pochodnej h^{-1} wynika np. z wzoru pochodną funkcji odwrotnej). Licząc dalej na podstawie wzoru na pochodną złożenia otrzymujemy, że

$$(F_X)'(F_X^{-1}(y)) \cdot (F_X^{-1})'(y) = (F_X(F_X^{-1}(y))' = y' = 1.$$

Ostatecznie, gęstość f_Y przyjmuje wartość 1 na odcinku $(0,1)$ i jest równa 0 dla pozostałych argumentów. Nie ulega wątpliwości, że jest to gęstość rozkładu jednostajnego $U(0,1)$.

5 Przypadek zmiennych dwuwymiarowych

Przypuśćmy, że mamy dane przekształcenie $\varphi : R^2 \to R^2$ takie, że $\varphi(a,b) = (u(a,b),\ w(a,b))$. Wtedy jakobianem tego przekształcenia nazywamy wyznacznik

$$\varphi'(a,b) = \mathcal{J}_\varphi(a,b) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u(a,b)}{\partial a} & \dfrac{\partial u(a,b)}{\partial b} \\ \dfrac{\partial w(a,b)}{\partial a} & \dfrac{\partial w(a,b)}{\partial b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_a(a,b) & u_b(a,b) \\ w_a(a,b) & w_b(a,b) \end{vmatrix}$$

zapisany tutaj na dwa sposoby przy użyciu różnych, stosowanych konwencji (dwóch sposobów zapisu jakobianów i dwóch sposobów wyrażania pochodnych cząstkowych).

W tych wzorach występują wyznaczniki (funkcyjnej w ogólnym przypadku) macierzy (cząstkowych) pochodnych funkcji składowych u i w przekształcenia φ, czyli na przykład

$$u_a(a,b) = \frac{\partial u(a,b)}{\partial a} = \text{pochodna } u(a,b) \text{ ze względu na } a \text{ przy ustalonym } b.$$

Zauważmy jeszcze, że napisy $|\varphi'(a,b)|$ i podobne występujące w dalszych wzorach oznaczają wartość bezwzględna jakobianu.

Dalej będziemy rozważać dwuwymiarową zmienną losową (X,Y) i przekształcenie h dane wzorem $h(x,y) = (a(x,y),\ b(x,y))$ dla pewnych funkcji $a, b : R^2 \to R$. Interesuje nas dwuwymiarowa zmienna $h(X,Y) = (a(X,Y),\ b(X,Y))$ i będziemy szukać jej gęstości $f_{h(X,Y)}$.

Twierdzenie 5.1 *Przypuśćmy, że dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma gęstość $f_{X,Y} : R^2 \to R$,*

$$D = \{(x,y) \in R^2 : f_{X,Y}(x,y) > 0\},$$

a $h(x, y) = (a(x, y),\ b(x, y))$ *jest przeksztaceniem, które zbiór* D *przeprowadza wzajemnie jednoznacznie na zbiór* H

$$H = \{(a(x, y),\ b(x, y)) \in R^2 : (x, y) \in D\}.$$

Przyjmijmy, że funkcja odwrotna h^{-1} *wyraża się wzorem*

$$h^{-1}(a, b) = (u(a, b),\ w(a, b)).$$

Jeżeli funkcje $u, w : R^2 \to R$ *mają na zbiorze* H *ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu i na zbiorze* H *jakobian*

$$(h^{-1})'(a, b) = \mathcal{J}_{h^{-1}}(a, b) = \begin{vmatrix} u_a(a, b) & u_b(a, b) \\ w_a(a, b) & w_b(a, b) \end{vmatrix}$$

jest różny od zera, to funkcja $f_{h(X,Y)}$ *dana na zbiorze* H *wzorem*

$$f_{h(X,Y)}(a, b) = f_{X,Y}(h^{-1}(a, b)) \cdot |(h^{-1})'(a, b)| = f_{X,Y}(h^{-1}(a, b)) \cdot |\mathcal{J}_{h^{-1}}(a, b)|$$

i przyjmująca wartość 0 poza H *jest gęstością zmiennej losowej* $h(X, Y)$.