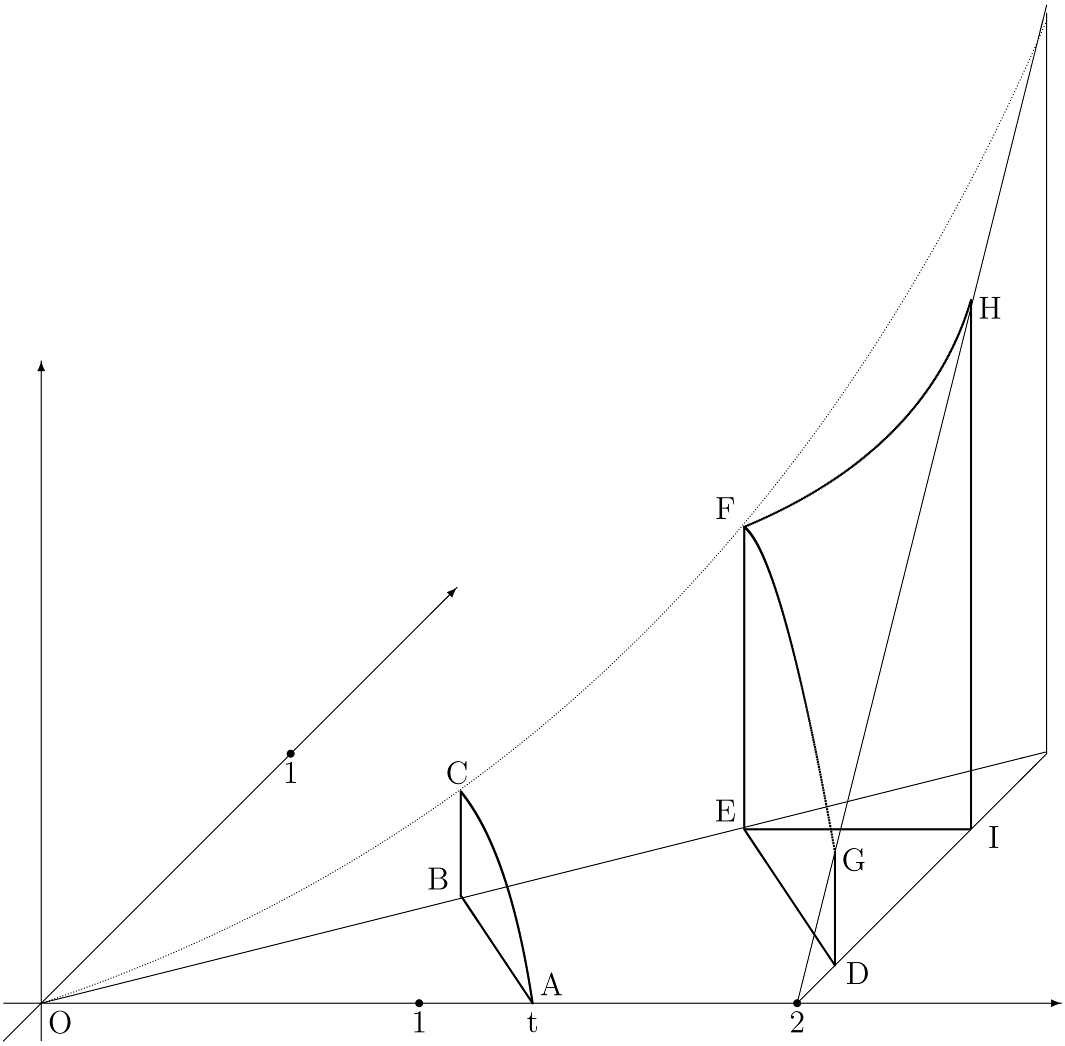
O zadaniach 7 – 9 z listy nr 5 (2016)

Antoni Kościelski

1 Treść zadania

W rozwiązywanym zadaniu zajmujemy się parą X, Y zmiennych losowych przyjmujących wartości w zbiorze $\mathcal{D} = \{(x, y) \in R^2 : 0 < y < \frac{x}{2} < 1\}$, i mających łączny rozkład prawdopodobieństwa o gęstości danej na tym zbiorze wzorem $f(x, y) = \frac{5}{4} \cdot x^2 y$. Zbiór wartości tej pary i gęstość jej rozkładu zostały zobrazowane na poniższym rysunku.



Rysunek 1.

Rysunek ten dość dobrze oddaje sytuację, choć nie zachowuje skali. Ma oddawać wygląd wykresu funkcji $f(x, y)$ na jej dziedzinie $\mathcal{D}$ (trójkąt o wierzchołkach $O = (0, 0)$, $(2, 0)$ oraz $(2, 1)$). Kształt (przebieg) poszczególnych linii jest zbliżony do rzeczywistego. Na rysunku zostały przedstawione przekroje bryły ograniczonej z góry wykresem funkcji $f(x, y)$ płaszczyznami o równaniach $x+y = t$ (figury ABC w przypadku $t \in (1, 2)$ oraz $DEFG$ dla $t \in (2, 3)$) oraz płaszczyzną o równaniu $y = c$ (figura $EFHI$ dla c równego rzędnej punktu I).

Mamy wyznaczyć gęstości zmiennych Y, $U = X + Y$ i $T = X/Y$.

2 Gęstość rozkładu

W rachunku prawdopodobieństwa mając zmienną losową Y chcemy znać jej rozkład, czyli prawdopodobieństwa $P(Y \in A)$ tego, że zmienna ta przyjmuje wartość należącą do zbioru A. Bardzo ogólny sposób definiowania rozkładów (pojedyńczej zmiennej o wartościach rzeczywistych, łatwy do uogólnienia na przypadek wielu zmiennych) polega na wskazaniu funkcji f i skorzystaniu z wzoru

$$P(Y \in A) = \int_A f(x)dx.$$

Ten wzór gwarantuje spełnianie najważniej własności wymaganej od rozkładów prawdopodobieństw, czyli σ-addytywności. Jeżeli f będzie przyjmować wartości nieujemne, to prawdopodobieństwa dowolnych zbiorów też będę nieujemne. Musimy jeszcze brać funkcje f takie, że

$$\int_R f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Funkcję f wyznaczającą w ten sposób rozkład nazywamy gęstością tego rozkładu. Gęstość rozkładu zmiennej losowej Y będziemy oznaczać symbolem f_Y.

Zachowując pewną ostrożność można rozważać gęstości, które nie są określone dla wszystkich liczb rzeczywistych (a są określone np. na odcinkach lub półprostych). Nawet wtedy nie otrzymujemy w ten sposób wszystkich możliwych rozkładów. Zmienne losowe o tak definiowanych rozkładach mają specyficzną własność, która na ogół nie zachodzi: każdą wartość przyjmują z prawdopodobieństwem 0, a więc $P(Y = a) = 0$ bez względu na a.

Mając rozkład (na przykład zmiennej Y) możemy wyliczyć jego dystrubuantę

$$F_Y(t) = P(Y < t).$$

Dystrybuanta jednoznacznie wyznacza rozkład: można dowieść następujący

Lemat 2.1 *Każde dwa rozkłady o identycznych dystrybuantach są identyczne.* □

Zwykle zakłada się o gęstości, że jest funkcją ciągłą, przynajmniej na swojej dziedzinie. Wtedy mówi się o rozkładach ciągłych. W pierwszym rzędzie założenie to pozwala odwoływać się do całki Riemanna, znanej z podstawowych wykładów analizy matematycznej, definiowanej dla funkcji ciągłych. Poza tym pozwala w prosty i elegancki sposób wyznaczyć gęstość danego rozkładu. Dla zmiennych z rozkładami o ciągłej gęstości można dowieść, że ich dystrybuanta jest różniczkowalna, a pochodna dystrybuanty jest gęstością, czyli słuszny jest wzór

$$F'_Y(t) = f_Y(t). \tag{1}$$

Czasem wzór ten pozwala wyliczyć gęstość. Jego dowód jest prosty i warto mu się przyjrzeć. Pochodną dystrybuanty liczymy bezpośrednio z definicji. Mamy więc

$$\frac{F_Y(t+h) - F_Y(t)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h} f_Y(x)dx$$

przynajmniej dla $h > 0$, (dla $h < 0$ jest nieco inaczej, ale podobnie). Aby zobaczyć powody prawdziwości wzoru, wystarczy zauważyć, że powyższa całka jest w przybliżeniu równa $f_Y(t) \cdot h$, a iloraz różnicowy niewiele różni się od $f_Y(t)$. Precyzyjny dowód wymaga spostrzeżenia, że

$$h \cdot \min_{x \in (t,t+h)} f_Y(x) \leqslant \int_t^{t+h} f_Y(x)dx \leqslant h \cdot \max_{x \in (t,t+h)} f_Y(x).$$

Stąd mamy

$$\min_{x \in (t,t+h)} f_Y(x) \leqslant \frac{F_Y(t+h) - F_Y(t)}{h} \leqslant \max_{x \in (t,t+h)} f_Y(x).$$

Ponieważ wraz z h dążącym do 0, dla ciągłej funkcji f_Y, skrajne wyrażenia zbiegają do $f_Y(t)$, więc z twierdzenia o trzech funkcjach otrzymujemy dowodzoną równość.

3 Gęstość rozkładu zmiennej Y

Znamy łączny rozkład dwóch zmiennych X i Y, a więc właściwie znamy rozkład zmiennej Y. Aby w tej sytuacji znaleźć gęstość zmiennej Y można wyliczyć jej dystrybuantę. Zdarzenie polegające na tym, że zmienna Y ma wartość $< t$, czyli $\{\omega : Y(\omega) < t\}$, jest właściwie zdarzeniem $\{\omega : X(\omega) \in R \wedge Y(\omega) < t\}$. Stąd mamy

$$P(Y < t) = P((X,Y) \in R \times (-\infty, t)) = \iint_{R \times (-\infty,t)} f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

Przechodząc do całek podwójnych otrzymujemy, że

$$F_Y(t) = P(Y < t) = \int_{-\infty}^{t} \left(\int_R f_{X,Y}(x,y)dx \right) dy.$$

Spróbujmy ten wzór odpowiednio przeczytać. Po lewej stronie wzoru mamy dystrybuantę rozkładu zmiennej Y. Natomiast po prawej stronie mamy dystrybuantę rozkładu o gęstości

$$f(y) = \int_R f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Tak więc rozkład zmiennej Y i rozkład o gęstości f mają identyczne dystrybuanty. Z lematu 2.1 wynika, że rozkład zmiennej Y jest rozkładem o gęstości f, albo inaczej, f jest gęstością rozkładu zmiennej, czyli

$$f_Y(y) = f(y) = \int_R f_{X,Y}(x,y)dx.$$

Teraz wystarczy dokonać stosowne obliczenia:

$$f_Y(y) = \int_{\{x \in R : (x,y) \in \mathcal{D}\}} \frac{5}{4} x^2 y \, dx = \int_{2y}^{2} \frac{5}{4} x^2 y \, dx = \frac{5y}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{2y}^{2} = \frac{10(y - y^4)}{3}.$$

Wzór ten jest słuszny dla $y \in (0,1)$. Wtedy bowiem $\{x \in R : (x,y) \in \mathcal{D}\} = (2y, 2)$. Dla pozostałych y mamy $\{x \in R : (x,y) \in \mathcal{D}\} = \emptyset$ i albo $f_Y(y) = 0$, albo przyjmujemy, że dla takich y gęstość f_Y nie jest określona.

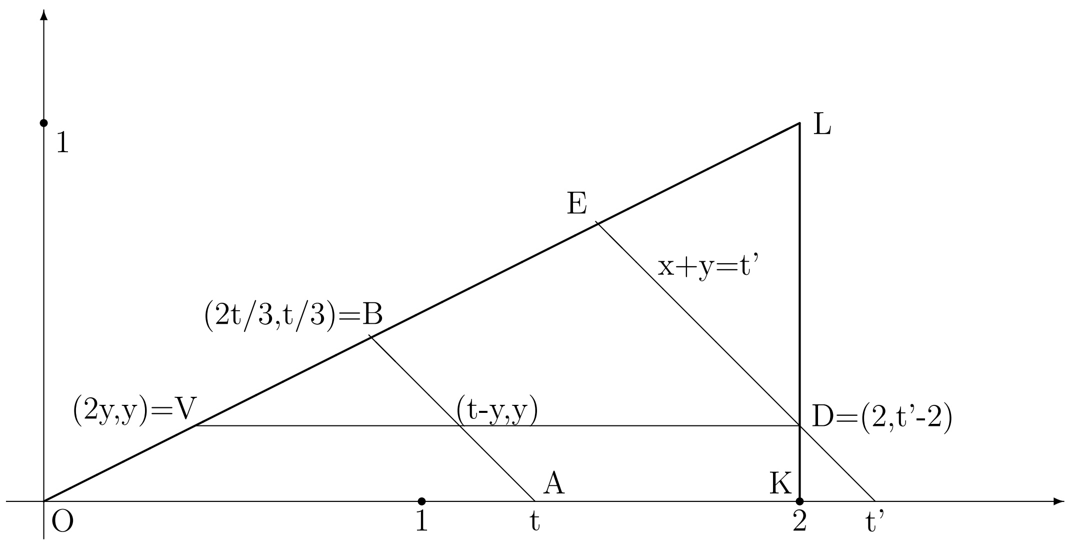
Jeżeli popatrzymy na rysunek i przyjmiemy, że y jest rzędną punktu I, to zobaczymy, że $f_Y(y)$ jest równe polu figury $IEFH$.

4 Rozkład zmiennej U, pierwsze podejście

Znowu zaczynamy od wyliczenia dystrybuanty rozkładu zmiennej U. Tym razem mamy

$$F_U(t) = P(X + Y < t) = P((X, Y) \in \{(x, y) \in \mathcal{D} : x + y < t\}) =$$
$$= \iint_{\{(x,y)\in\mathcal{D}:x+y<t\}} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy.$$

Wobec tego, najpierw trzeba wyliczyć zbiór $\{(x, y) \in \mathcal{D} : x + y < t\}$, po którym całkujemy. Zbiór ten jest widoczny na rysunku 1, dokładniej został przedstawiony na rysunku 2. Patrząc na ten rysunek można zaobserwować, że ma jedną z dwóch postaci. Dla $t \in (0, 2]$ jest to trójkąt, na przykład OAB, a dla $t \in (2, 3)$ – czworokąt, mający na przykład wierzchołki $OEDK$.



Rysunek 2. Podstawa bryły z rys. 1

Łatwo sprawdzić, że nierówności

$$0 < y < \frac{x}{2} < 1 \text{ oraz } x + y < t \quad (\text{ albo } (x, y) \in \mathcal{D} \text{ oraz } x + y < t),$$

definiujące interesujący nas zbiór, są dla $t \in (0, 2]$ równoważne z nierównościami

$$0 < y < \frac{t}{3} \text{ oraz } 2y < x < t - y, \tag{2}$$

(patrz: figura OAB na rys. 2) zaś dla $t \in (2, 3)$ – są równoważne z alternatywą

$$(x, y) \in \mathcal{D} \text{ i } 0 < y < t - 2 \text{ lub też } t - 2 \leqslant y < \frac{t}{3} \text{ i } 2y < x < t - y. \tag{3}$$

Przyjmijmy, że $t \in (0, 2]$. Dla takiego t, po przejściu do całek podwójnych, na podstawie wzoru (2), otrzymujemy

$$F_U(t) = \int_0^{t/3} \int_{2y}^{t-y} \frac{5}{4} x^2 y \, dxdy.$$

Wyliczmy sobie najpierw całkę wewnętrzną:

$$\int_{2y}^{t-y} \frac{5}{4}x^2y\ dx = \frac{5y}{4} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_{2y}^{t-y} = \frac{5}{12} \cdot (y(t-y)^3 - 8y^4).$$

W dalszych obliczeniach przyda nam się także całka

$$\int_0^u \frac{5}{12}(y(t-y)^3 - 8y^4)\ dy = \int_0^u \frac{5}{12}y(t-y)^3\ dy - \frac{2}{3}u^5 = \int_t^{t-u} \frac{5}{12}(s-t)s^3\ ds - \frac{2}{3}u^5 =$$

$$= \left(\frac{s^5}{12} - \frac{5ts^4}{3 \cdot 16}\right)\bigg|_t^{t-u} - \frac{2}{3}u^5 = \frac{(t-u)^5}{12} - \frac{5t(t-u)^4}{3 \cdot 16} + \frac{t^5}{3 \cdot 16} - \frac{2}{3}u^5.$$

Przeprowadzone obliczenia pozwalają bez trudu znaleźć dystrybuantę $F_U(t)$ dla $t \in (0, 2]$. Mamy bowiem

$$F_U(t) = \int_0^{t/3} \frac{5}{12}(y(t-y)^3 - 8y^4)\ dy = t^5(\frac{8}{3^6} - \frac{5}{3^5} + \frac{1}{3 \cdot 16} - \frac{2}{3^6}) = \frac{11}{6^4}t^5.$$

Teraz obliczymy dystrybuantę $F_U(t)$ dla $t \in (2, 3)$. Dla $t = t'$ jest to całka po figurze $OEDK$ z rysunku 2, która, zgodnie z wzorem (3), jest sumą mnogościową figur $OVDK$ oraz VDE. Zauważmy, że całka po pierwszej figurze jest równa $P(Y < t' - 2)$, czyli jest wartością dystrybuanty rozkładu zmiennej Y. Tak więc (biorąc t zamiast t') z wzoru (3) wynika, że

$$F_U(t) = F_Y(t-2) + \int_{t-2}^{t/3} \int_{2y}^{t-y} \frac{5}{4}x^2y\ dxdy.$$

Wyżej zostało już przeprowadzone wiele potrzebnych obliczeń. Korzystając z nich otrzymujemy

$$F_U(t) = F_Y(t-2) + \frac{11}{6^4}t^5 - \frac{8}{3} + \frac{5t}{3} - \frac{t^5}{3 \cdot 16} + \frac{2(t-2)^5}{3}.$$

W końcu korzystając z wzoru (1) możemy wyliczyć gęstość zmiennej U. Dla $t \in (2, 3)$ zrobimy to wykorzystując ponownie wzór (1) i wyliczoną w rozdziale 3 gęstość zmiennej Y. Tak postępując otrzymujemy

$$f_U(t) = \frac{10t - 20 - 10(t-2)^4}{3} + \frac{55t^4}{6^4} + \frac{5}{3} - \frac{5t^4}{3 \cdot 16} + \frac{10(t-2)^4}{3} = \frac{10t}{3} - 5 - \frac{5t^4}{3^4}.$$

Ostatecznie, gęstość $f_U(u)$ zmiennej U wyraża się wzorem

$$f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{55u^4}{6^4} & \text{jeżeli } 0 < u \leqslant 2, \\ \dfrac{10u}{3} - 5 - \dfrac{5u^4}{3^4} & \text{gdy } 2 < u < 3, \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

5 Drobne uwagi o zastosowanej metodzie

Często obliczenia można prowadzić na wiele sposobów. W poprzednim rozdziale liczyliśmy gęstość rozkładu zmiennej U w oparciu wzór (1). Jednocześnie staraliśmy się nie przeprowadzać wielokrotnie tych samych obliczeń, raczej wykorzytywaliśmy znane już rezultaty. Takie zasady dały przedstawione efekty.

Być może obliczenia byłyby łatwiejsze, gdyby inaczej liczyć prawdopodobieństwa $P((X,Y) \in A)$ dla A takich, jak figura $OEDK$. To prawdopodobieństwo jest równe $1 - P((X,Y) \in \mathcal{D} \setminus A)$ (chyba, że $f_{X,Y}$ nie jest gęstością). Obliczenie tego ostatniego prawdopodobieństwa wymaga całkowania po trójkątach takich, jak EDW, i nie powinno to sprawiać kłopotów, gdy po przejściu do całek podwójnych będziemy najpierw całkować po y, a następnie po x.

Warto też zwrócić uwagę na fakt, że szukając gęstości zmiennych Y i U najpierw znajdowaliśmy dystrybuanty ich rozkładów, ale w pierwszym przypadku nie była nam potrzebna jawna postać dystrybuanty, w drugim – liczyliśmy ją i chyba musieliśmy to zrobić. Bardziej zaawansowane metody w wielu przypadkach pozwalają liczyć gęstości tak, jak w przypadku rozkładu zmiennej Y.

6 Szkic kolejnego rozwiązania

Gęstość rozkładu zmiennej U możemy próbować wyliczyć stosując rozumowanie wykorzystane do dowodu wzoru (1). Aby wyliczyć gęstość, liczyliśmy granicę

$$\frac{F_U(t+h) - F_U(t)}{h}.$$

Licznik tego wyrażenia możemy zinterpretować jako objętość plastra bryły definiującej prawdopodobieństwa zawartego między płaszczyznami o równaniach $x + y = t + h$ i $x + y = t$. Podstawą tego plastra może być przekrój rozważanej bryły płaszczyzną $x + y = t$. Na rysunku 1 takim przekrojem jest figura ABC, i ewentualnie figura $DEFG$ dla odpowiednio zmienionego t. Grubość takiego plastra tym razem wynosi jednak $h/\sqrt{2}$. Stąd objętość plastra jest w przybliżeniu równa

$$pole(ABC) \cdot h/\sqrt{2},$$

a po podzieleniu przez h zmierza wraz h dążącym do 0 do wartości $pole(ABC)/\sqrt{2}$. Stąd

$$f_U(t) = \frac{pole(ABC)}{\sqrt{2}} \quad \text{albo} \quad pole(ABC) = \sqrt{2} \cdot f_U(t).$$

Ponieważ w tej chwili znamy już gęstość, więc ostatni ze wzorów pozwala wyliczać pola odpowiednich przekrojów takich, jak ABC lub $DEFG$.

7 Obliczanie gęstości przez obrót

Można spostrzeć, że obliczanie gęstości rozkładu w przypadku zmiennej Y było łatwiejsze niż w przypadku U, ponieważ dla Y rozważaliśmy przecięcia bryły definiującej prawdopodobieństwa płaszczyznami prostopadłymi do osi. Daje to nadzieję, że łatwiej będzie obliczać rozkład zmiennej U po odpowiednim obróceniu bryły z rysunku 1.

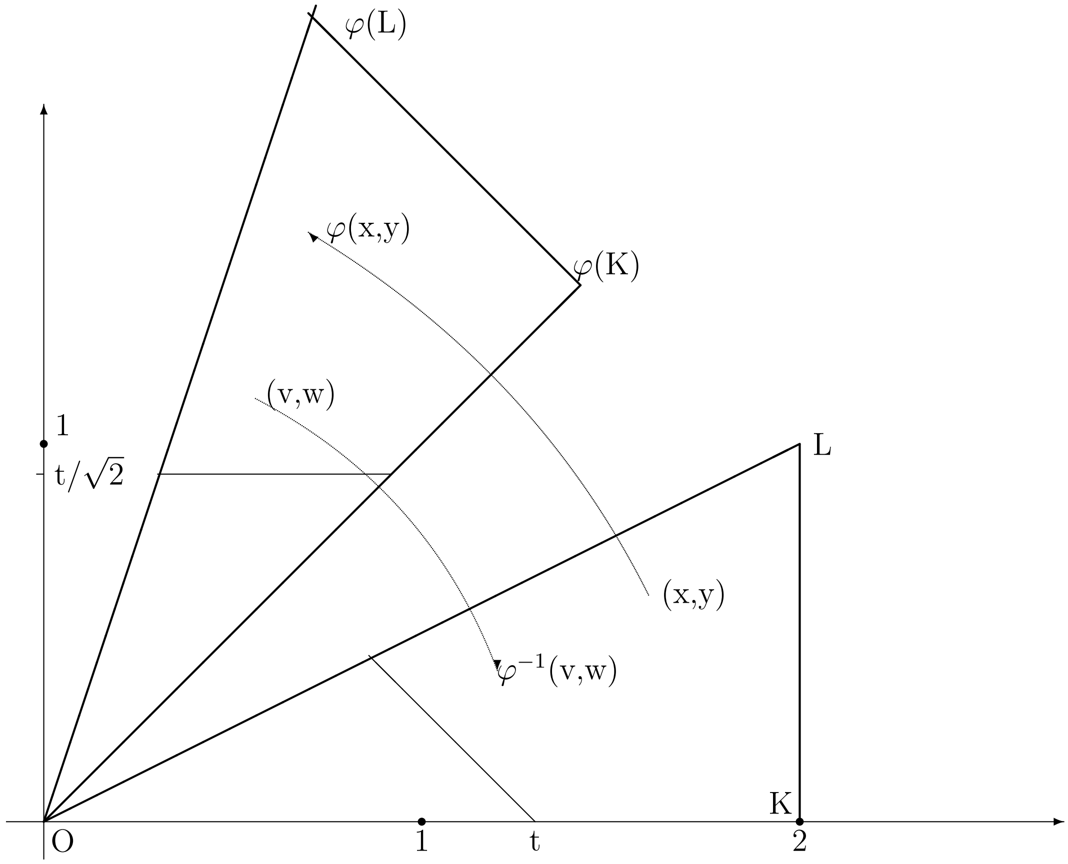
Przyjmijmy, że

$$\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) = (\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}}). \tag{4}$$

Można przekonać się, także doświadczalnie, że jeżeli punkt o współrzędnych $(x, y) \in R^2$ obrócimy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara o kąt 45° (o kąt $\pi/4$), to otrzymamy punkt o współrzędnych $(\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) \in R^2$, czyli punkt $\varphi(x, y)$.

Przekształcenie odwrotne do φ, czyli obrót φ^{-1} o kąt 45° w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara jest definiowane wzorami

$$\varphi^{-1}(v, w) = (\varphi_1^{-1}(v, w), \varphi_2^{-1}(v, w)) = (\frac{v + w}{\sqrt{2}}, \frac{w - v}{\sqrt{2}}).$$



Rysunek 3. Obrót podstawy z rys. 1

Mając parę zmiennych losowych (X, Y) przyjmującą wartości w zbiorze $\mathcal{D}$ możemy rozważać inną parę zmiennych

$$(V, W) = \varphi(X, Y) = (\varphi_1(X, Y), \varphi_2(X, Y))$$

przyjmującą wartości w obrazie $\varphi[\mathcal{D}]$. Własności probabilistyczne pary (X, Y) są opisane przez gęstość $f_{X,Y}$. Chcielibyśmy, aby para (V, W) miała analogiczne własności. Można to uzyskać definiując gęstość rozkładu pary (V, W) wzorem

$$f_{V,W}(v, w) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(v, w)) = f_{X,Y}(\varphi_1^{-1}(v, w), \varphi_2^{-1}(v, w)). \tag{5}$$

Jeżeli odwołamy się do intuicji związanych z rozkładami dyskretnymi, to wzór ten możemy zinterpretować jako stwierdzenie, że prawdopodobieństwo przyjęcia przez parę (V, W) wartości (v, w) jest takie samo, jak prawdopodobieństwo przyjęcia przez parę (X, Y) wartości $\varphi^{-1}(v, w)$, odpowiadającej parze (v, w). Bardziej precyzyjniej można to wyrazić w następujący sposób: prawdopodobieństwo

$P((V,W)\in\varphi[A])$ jest zdefiniowane jako całka $\iint_{\varphi[A]} f_{V,W}(v,w)\,dvdw$. Całka ta może zostać zinterpretowana jako objętość pewnej bryły, wyobraźmy sobie, że budowli o postawie $\varphi[A]$, której dach znajduje się na wysokości $f_{V,W}(v,w)$ nad punktem (v,w). Zbiór $\varphi[A]$ otrzymujemy w wyniku pewnego przesunięcia (tak naprawdę obrotu, czyli pewnego przekształcenia zachowującego wymiary) zbioru A. Na tym zbiorze jako podstawie, też jest umieszczona pewna budowla. Dach tej budowli nad punktem $(x,y)=\varphi^{-1}(v,w)$, odpowiadającym punktowi (v,w), znajduje się na wysokości $f_{X,Y}(x,y)$, a więc na wysokości $f_{V,W}(v,w)$, takiej samej jak nad punktem (v,w) w budowli postawionej na podstawie A. Wobec tego, budowle postawione na A i na $\varphi^{-1}[A]$ mają takie same wymiary, i w związku z tym, takie same objętości. Tak więc całki wyrażające te objętości powinny być równe i powinien zachodzić wzór

$$\iint_{\varphi[A]} f_{V,W}(v,w)\,dvdw=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy, \tag{6}$$

oznaczający, że

$$P((V,W)\in\varphi[A])=P((X,Y)\in A).$$

Przedstawione wyżej rozumowanie uzasadnia intuicyjnie także ogólny wzór

$$\iint_{\varphi[A]} f(\varphi^{-1}(v,w))\,dvdw=\iint_A f(x,y)\,dxdy$$

słuszny dla dowolnych (całkowalnych) funkcji f i wszelkich przekształceń izometrycznych φ. Jeżeli w tym wzorze f zastąpimy przez złożenie f z φ, to otrzymamy inną jego postać

$$\iint_A f(\varphi(x,y))\,dxdy=\iint_{\varphi[A]} f(v,w)\,dvdw, \tag{7}$$

znaną jako wzór na całkowanie przez podstawianie izometrii.

Spróbujmy teraz wykorzystać poczynione spostrzeżenia. Weźmy $t\in(0,2)$. Dla takich t mamy w szczególności, $\varphi(t,0)=(t/\sqrt{2},t/\sqrt{2})$ oraz $\varphi(2t/3,t/3)=(t/\sqrt{2},t/(3\sqrt{2}))$. Jeżeli weźmiemy teraz zbiór $A=\{(x,y)\in\mathcal{D}:x+y<t\}$ i wyliczymy $\varphi[A]$, to otrzymamy

$$\varphi[A]=\{(v,w)\in\varphi[\mathcal{D}]:w<\frac{t}{\sqrt{2}}\}$$

(dobrze to widać na rysunku 3). Stąd i z wzoru (6) otrzymujemy, że

$$F_U(t)=F_{X+Y}(t)=\iint_A f_{X,Y}(x,y)\,dxdy=\iint_{\varphi[A]} f_{V,W}(v,w)\,dvdw=F_W\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Różniczkując otrzymaną zależność znajdujemy, że

$$f_U(t)=F_U'(t)=\left(F_W\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right)'=\frac{1}{\sqrt{2}}f_W\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right),$$

a więc obliczanie gęstości rozkładu zmiennej U sprowadziliśmy do obliczania gęstości rozkładu zmiennej W. Te obliczenia są jednak tak proste, jak szukanie gęstości rozkładu zmiennej Y w rozdziale 3 (i dają się tak samo uzasadnić):

$$f_W(w)=\int_{w/3}^{w}\frac{5}{4}(\varphi_1^{-1}(v,w))^2\varphi_2^{-1}(v,w)\,dv=\int_{w/3}^{w}\frac{5}{8\sqrt{2}}(v+w)^2(w-v)\,dv=$$

$$\overset{z=v+w}{=}\frac{5}{8\sqrt{2}}\int_{4w/3}^{2w}(2wz^2-z^3)dz=\frac{5}{8\sqrt{2}}\left(\frac{2wz^3}{3}-\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_{4w/3}^{2w}=$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - \frac{16}{3^4} + \frac{8}{3^4}\right) w^4 = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6} - \frac{8}{3^4}\right) w^4 = \frac{440w^4}{6^4\sqrt{2}}.$$

Teraz już łatwo wyliczyć gęstość rozkładu zmiennej U:

$$f_U(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{440}{6^4\sqrt{2}} \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{55t^4}{6^4}.$$

Przedstawione obliczenia były prowadzone przy założeniu, że $t \in (0, 2]$. Analogiczne obliczenia dla $t \in (2, 3)$ są niewiele trudniejsze i pozostawiam je do wykonania przez zainteresowanych Czytelników.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że po raz drugi, w inny sposób, uzasadniliśmy wzór, który pojawił się w rozdziale 5, a mianowicie, że pole przekroju bryły definiującej rozkład pary (X, Y) płaszczyzną $x + y = t$, a więc pole figury takiej, jak ABC z rysunku 1, po obróceniu bryły, jest równe polu przekroju bryły definiującej rozkład pary (V, W) płaszczyzną $w = t/\sqrt{2}$, czyli gęstości $f_W(\frac{t}{\sqrt{2}})$ zmiennej W (w podanym punkcie, patrz też rozważania z rozdziału 3). Stąd mamy równości takie, jak

$$pole(ABC) = f_W(\frac{t}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2} \cdot f_U(t).$$

8 Całkowanie przez podstawianie

Dla całek funkcji dwóch zmiennych zachodzi następujące uogólnienie znanego wzoru na całkowanie przez podstawianie:

$$\iint_A f(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) \cdot |\varphi'(x,y)| \; dxdy = \iint_{\varphi[A]} f(u,v) \; dudv, \qquad (8)$$

gdzie

$$\varphi : \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}^2 \;\text{ oraz }\; \varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y))$$

jest przekształceniem płaszczyzny $\mathcal{R}^2$ w siebie, spełniającym długą listę założeń gwarantujących m.in. wykonalność potrzebnych obliczeń, różnowartościowym w dostatecznym stopniu, $\varphi[A] = \{(\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) \in \mathcal{R}^2 : (x,y) \in A\}$ jest obrazem zbioru A wyznaczonym przez przekształcenie φ, a

$$\varphi'(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi_2(x,y)}{\partial y} \end{vmatrix}$$

jest tzw. jakobianem przekształcenia φ, czyli wyznacznikiem (funkcyjnej w ogólnym przypadku) macierzy pochodnych składowych przekształcenia φ, gdzie

$$\frac{\partial\varphi_1(x,y)}{\partial x} = \text{pochodna } \varphi_1(x,y) \text{ ze względu na } x \text{ przy ustalonym } y$$

itd. Zauważmy jeszcze, że $|\varphi'(x,y)|$ to wartość bezwzględna jakobianu.

Nietrudno przekonać się, że z wzoru (8) dla przekształcenia φ zdefiniowanego wzorem (4) wynika wzór (7). W tym przypadku mamy bowiem

$$\varphi'(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1.$$

9 Pewne twierdzenie

Mając parę zmiennych losowych (X, Y) i jej rozkład często szukamy rozkładu prawdopodobieństwa innej pary zmiennych $(W, V) = \varphi(X, Y)$ dla pewnego przekształcenia φ. Z tego powodu podaje się różne zależności między tymi rozkładami lub ich gęstościami.

W literaturze (np. Mirosław Krzyśko, Statystyka matematyczna, wyd. nauk. UAM) można znaleźć następujące twierdzenie:

Twierdzenie 9.1 *Przypuśćmy, że para zmiennych losowych (X, Y) ma gęstość $f_{X,Y} : R^2 \to R^2$, $\mathcal{D} = \{(x, y) \in R^2 : f_{X,Y}(x, y) > 0\}$, a jest $\varphi : R^2 \to R^2$ przekształceniem, które zbiór $\mathcal{D}$ przeprowadza wzajemnie jednoznacznie na zbiór $\varphi[\mathcal{D}]$. Jeżeli funkcja odwrotna φ^{-1} ma ciągły i niezerowy jakobian, to funkcja $f_{W,V}$ dana wzorem*

$$f_{W,V}(w, v) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(w, v)) \cdot |(\varphi^{-1})'(w, v)|$$

na zbiorze $\varphi[\mathcal{D}]$ (przyjmująca ewentualnie wartość 0 poza $\varphi[\mathcal{D}]$) jest gęstością pary zmiennych $(W, V) = \varphi(X, Y)$.

Twierdzenie to łatwo wyprowadza się z wzoru (8). Oczywiście, mamy

$$P((W, V) \in A) = P(\varphi(X, Y) \in A) = P((X, Y) \in \varphi^{-1}[A]) = \iint_{\varphi^{-1}[A]} f_{X,Y}(x, y)\, dxdy.$$

Tę ostatnią całkę liczymy z wzoru (8). Zamiast A w tym wzorze musi wziąć $\varphi^{-1}[A]$ i musimy funkcji podcakowej nadać odpowiednią postać:

$$P((W, V) \in A) = \iint_{\varphi^{-1}[A]} f_{X,Y}(\varphi^{-1}(\varphi(x, y))) \cdot \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(\varphi(x, y)))|} \cdot |\varphi'(x, y)|\, dxdy.$$

Teraz z wzoru (8) otrzymujemy

$$P((W, V) \in A) = \iint_{A} f_{X,Y}(\varphi^{-1}(w, v)) \cdot \frac{1}{|\varphi'(\varphi^{-1}(w, v))|}\, dwdv.$$

Oznacza to, ze funkcja podcałkowa z powyższego wzoru jest gęstością rozkładu pary (W, V). Trzeba jeszcze zauważyć, że obie gęstości, ta z powyższego wzoru i ta ze sformułowania twierdzenia są identyczne. Dla pojedyńczej zmiennej losowej odpowiednia równość wynika z wzoru na pochodną funkcji odwrotnej: różniczkując stronami oczywistą równość $h(h^{-1}(x)) = x$ otrzymujemy

$$h'(h^{-1}(x)) \cdot (h^{-1})'(x) = 1, \quad \text{czyli} \quad (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))}.$$

Dla funkcji dwóch lub wielu zmiennych jest podobnie, w szczególności mamy

$$(\varphi^{-1})'(w, v) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(w, v))}.$$

Dowód tego faktu jest analogiczny do przedstawionego i nie jest trudny. Wymaga za to znajomości zasad różniczkowania funkcji wielu zmiennych.

W przypadku pojedyńczych zmiennych losowych dowodzi się podobnego

Twierdzenie 9.2 *Przypuśćmy, że zmienna losowa X ma gęstość $f_X : R \to R$, $D = \{x \in R : f_X(x) > 0\}$, a jest $h : R \to R$ funkcją, która zbiór D przeprowadza wzajemnie jednoznacznie na zbiór $h[D]$. Jeżeli funkcja odwrotna h^{-1} ma ciągłą i niezerową pochodną, to funkcja f_W dana wzorem*

$$f_W(w) = f_X(h^{-1}(w)) \cdot |(h^{-1})'(w)|$$

na zbiorze $h[D]$ i przyjmująca wartość 0 poza $h[D]$ jest gęstością zmiennej losowej $h(X)$.

10 Wyznaczanie gęstości przez przekształcanie

Zamiast obrotów do obliczania gęstości możemy wykorzytywać najróżniejsze przekształcenia. Jeżeli zostaną dobrze dobrane, to mogą znacznie uprościć potrzebne obliczenia.

Weźmy więc przekształcenie

$$\varphi(x,y) = (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) = (x+y, x).$$

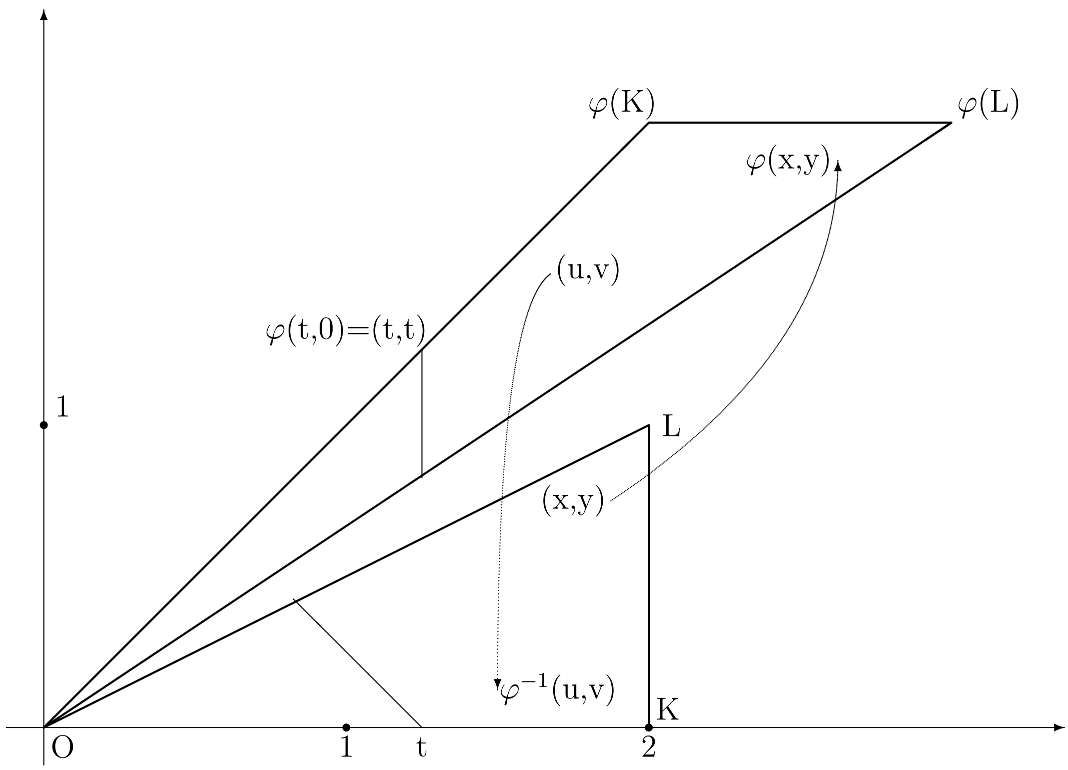
Będziemy zajmować się parą zmiennych

$$(U,V) = \varphi(X,Y) = (X+Y, X),$$

gdzie U jest zmienną ze sformułowania zadania. Przekształceniem odwrotnym do φ jest

$$\varphi^{-1}(u,v) = (\varphi_1^{-1}(u,v), \varphi_2^{-1}(u,v)) = (v, u-v).$$

Działanie przekształcenia φ zostało pokazane na rysunku 4 na przykładzie dziedziny $\mathcal{D}$.



Rysunek 4. Przekształcenie zbioru $\mathcal{D}$ przez $\varphi(x,y) = (x+y, x)$.

Jakobian przekształcenia φ^{-1} jest równy

$$(\varphi^{-1})'(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

Podstawmy zatem co trzeba do wzoru z twierdzenia 9.1. Otrzymujemy, że

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(u,v)) \cdot |(\varphi^{-1})'(u,v)| = \frac{5}{4}v^2(u-v).$$

Dalej wystarczy wyliczyć rozkład brzegowy zmiennej U. Wymaga to znajomości zbioru $\varphi[\mathcal{D}]$. Musimy teraz zauważyć, że dla $u \in (0,2)$ warunek $(u,v) \in \varphi[\mathcal{D}]$ jest równoważny z nierównością $\frac{2u}{3} < v < u$. Stąd – przy założeniu $u \in (0,2)$ – otrzymujemy, że

$$f_U(u) = \int_{2u/3}^{u} \frac{5}{4} v^2 (u-v)\, dv = \frac{5}{4}\left(\frac{v^3 u}{3} - \frac{v^4}{4}\right)\Bigg|_{2u/3}^{u} = \frac{5u^4}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{8}{3^4} + \frac{16}{4\cdot 3^4}\right) = \frac{55}{6^4} u^4.$$

11 Splot

12 Dystrybuanta zmiennej T

Obliczenia dla zmiennej T nie sprawiają kłopotów, nawet technicznych. Najpierw znajdziemy gęstość tej zmiennej licząc jej dystrybuntę. Nieco łatwiejsze obliczenia otrzymamy, gdy skorzystamy z wzoru

$$F_T(a) = 1 - \iint_{\{(x,y)\in\mathcal{D}: x/y \geqslant a\}} f_{X,Y}(x,y)\, dxdy.$$

Zbiorowi, po którym mamy całkować, dla $a > 2$ można nadać postać

$$A = \{(x,y) \in R^2 : 0 < x < 2 \ \wedge\ x/a \geqslant y > 0\}.$$

Ponadto, dla $a \in (0,2]$ mamy $A = \mathcal{D}$, oraz $A = \emptyset$ dla $a < 0$. W głównym przypadku

$$1 - F_T(a) = \int_0^2 \int_0^{x/a} \frac{5}{4} x^2 y\, dydx = \int_0^2 \frac{5}{8} x^2 y^2 \Big|_0^{x/a} = \int_0^2 \frac{5}{8a^2} x^4\, dx = \frac{1}{8a^2} x^5 \Big|_0^2 = \frac{4}{a^2}.$$

Ostatecznie, gęstość T jest określona dla $a \in (2,\infty)$ i jest dana wzorem

$$f_T(a) = F_T'(a) = \left(1 - \frac{4}{a^2}\right)' = \frac{8}{a^3}.$$

13 Inna metoda obliczania gęstości T

Gęstość zmiennej T wyliczymy jeszcze korzystając z twierdzenia 9.1. Przyjmijmy więc, że

$$\varphi(x,y) = (x/y, y) \ \text{ oraz } \ (T,S) = \varphi(X,Y).$$

Wtedy

$$\varphi^{-1}(t,s) = (ts, s).$$

Wobec tego, jakobian φ^{-1} jest równy

$$(\varphi^{-1})'(t,s) = \begin{vmatrix} s & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = s.$$

Musimy jeszcze wyliczyć $\varphi[\mathcal{D}]$. Zauważmy, że nierówności $0 < y < x/2 < 1$ definiujące $\mathcal{D}$ można zapisać w postaci

$$2 < \frac{x}{y} < \frac{2}{y} \ \text{ oraz } \ 0 < y < 1.$$

Stąd

$$\varphi[\mathcal{D}] = \{(t,s) \in R^2 : 2 < t < \frac{2}{s} \ \wedge\ 0 < s < 1\} = \{(t,s) \in R^2 : 2 < t \ \wedge\ 0 < s < \frac{2}{t}\}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 9.1, gęstość $f_{T,S}$ pary zmiennych T, S jest określona na $\varphi[\mathcal{D}]$ i jest dana wzorem

$$f_{T,S}(t,s) = f_{X,Y}(\varphi^{-1}(t,s)) \cdot (\varphi^{-1})'(t,s) = \frac{5}{4}(ts)^2 s \cdot s = \frac{5}{4}t^2 s^4.$$

Dla $t > 2$ z wzoru na $\varphi[\mathcal{D}]$ gęstość brzegowa f_T jest równa

$$f_T(t) = \int_0^{2/t} \frac{5}{4}t^2 s^4 \, ds = \frac{1}{4}t^2 s^5 \Big|_0^{2/t} = \frac{8}{t^3}$$

i jest określona na półprostej $(2, \infty)$.