Zadanie o totolotku

Antoni Kościelski

1 Kilka oczywistych własności sumowania

Często korzystamy z operatora sumowania i piszemy wyrażenia tkie, jak

$$\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \sum_{i=1}^{n} f(i), \quad \text{lub} \quad \sum_{i\in I} f(i).$$

Tego typu wyrażeń nawet nie definiuje się. Zakłada się, że wszyscy doskonale wiedzą, co te wyrażenia znaczą. W ostatnim wzorze dobrze jest założyć, że zbiór I jest skończony. W polskiej literaturze matematycznej chyba jest książka wybitnego matematyka, zasłużonego dla informatyki, zawierająca definicje takich operatorów i dowody ich podstawowych własności, która została krytycznie zrecenzowana przez innego wybitnego matematyka. Główny zarzut sprowadzał się stwierdzenia, że książka zawiera wiele niepotrzebnych rzeczy, a za mało potrzebnych.

Wyrażenia $\sum_{j=1}^{n} f(j)$ definiuje się zwykle przez indukcję przyjmując

$$\sum_{j=1}^{0} f(j) = 0 \ \text{ oraz } \sum_{j=1}^{n+1} f(j) = \left(\sum_{j=1}^{n} f(j)\right) + f(n+1).$$

Można dowieść, że takie sumy nie zależą od kolejności sumowania. Wiedząc to można rozszerzyć stosowalność operatora sumowania na dowolne, skończone zbiory indeksów. Mając dowolny n elementowy zbiór indeksów I, funkcję $f : I \to R$ i bijekcję $h : \{1, \ldots, n\} \to I$ można przyjąć, że

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{j=1}^{n} f(h(j)).$$

W szczególności, mamy

$$\sum_{i\in\emptyset} f(i) = 0.$$

1.1 Zmiana zbioru indeksów

Bardzo często stosujemy przekształcenia takie, jak

$$\sum_{j=2}^{13} x_i = \sum_{j=0}^{11} x_{i+2}.$$

Można dowieść bardzo ogólnie następujący fakt o zmianie zbioru indeksów:

Fakt 1.1 Jeżeli $h : J \to I$ jest bijekcją, to

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{j\in J} f(h(j)). \ \Box \tag{1}$$

Można z niego wywnioskować kolejny:

Fakt 1.2 Jeżeli $h : I \to I$ jest permutacją zbioru I, to

$$\sum_{i\in I} f(i) = \sum_{i\in I} f(h(i)). \ \Box$$

1.2 Sumowanie zbiorów indeksów

Kolejny bardzo prosty i oczywisty fakt jest następujący:

Fakt 1.3 Jeżeli zbiory $I_1, I_2, \ldots, I_m$ są parami rozłączne, to

$$\sum_{k=1}^{m} \sum_{i \in I_k} f(i) = \sum_{i \in \bigcup_{i=1}^{m} I_k} f(i). \quad \square$$

1.3 Pary jako indeksy

Teraz będziemy rozważać zbiory indeksów zawarte w skończonym iloczynie kartezjańskim $A \times B$.

Przyda się nam następująca umowa notacyjna: napis

$$\sum_{i:\varphi(i)} f(i) \quad \text{oznacza} \quad \sum_{i \in \{i:\varphi(i)\}} f(i).$$

Fakt 1.4 Przyjmijmy, że zbiory A i B są skończone oraz $I \subseteq A \times B$. Wtedy

$$\sum_{(i,j)\in I} f(i,j) = \sum_{i \in A} \sum_{j:(i,j)\in I} f(i,j) = \sum_{j \in B} \sum_{i:(i,j)\in I} f(i,j). \quad \square$$

Ten fakt możemy wykorzystać do sumowania wyrazów $m_{i,j}$ macierzy M o wymiarach $m \times n$. Oczywiście, zachodzą następujące wzory

$$\sum_{i,j} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} m_{i,j}.$$

2 Wartość oczekiwana sumy wylosowanych liczb

Co prawda w oryginalnym zadaniu należało wyliczyć wartość oczekiwaną średniej wylosowanych liczb, ale wszystkie istotne trudności już występują, gdy liczymy wartość oczekiwaną sumy wylosowanych liczb. Przyjmijmy więc, że

$$\Omega = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, 49\} : |\, A \,| = 6\},$$
$$S : \Omega \to R \quad \text{oraz} \quad S(A) = \sum A = \sum_{i \in A} i.$$

Na przestrzeni Ω jest określone prawdopodobieństwo P takie, że

$$P(\{A\}) = p_0 = \frac{1}{\binom{49}{6}}.$$

Będziemy obliczać $E(S)$. Rachunki zależą trochę od przyjętej definicji wartości oczekiwanej.

2.1 Pierwsza metoda

Korzystamy z podstawowej definicji wartości oczekiwanej, trudnej do praktycznego zastosowania (często nie znamy przestrzeni Ω), i przez to unikanej.

$$E(S) = \sum_{A \in \Omega} S(A) \cdot P(\{A\}) = p_0 \sum_{A \in \Omega} \sum_{i \in A} i = p_0 \sum_{i=1}^{49} \sum_{A:\, i \in A} i = p_0 \sum_{i=1}^{49} i \sum_{A:\, i \in A} 1 =$$
$$= p_0 \sum_{i=1}^{49} i \cdot |\, \{A :\; i \in A\} \,| = p_0 \binom{48}{5} \sum_{i=1}^{49} i = p_0 \binom{48}{5} \cdot 49 \cdot 25 = 150.$$

2.2 Metoda druga

Teraz skorzystamy z często używanej definicji wartości oczekiwanej wykorzystującej pojęcie rozkładu zmiennej. Zauważmy, że rozkład zmiennej S jest skupiony na zbiorze liczb od 21 do 279. Wobec tego

$$E(S) = \sum_{k=21}^{279} k \cdot P(\{A \in \Omega : S(A) = k\} = \sum_{k=21}^{279} k \cdot \sum_{A:S(A)=k} p_0 = p_0 \sum_{k=21}^{279} \sum_{A:S(A)=k} k =$$

$$= p_0 \sum_{k=21}^{279} \sum_{A:S(A)=k} S(A) = p_0 \sum_{A \in \bigcup_{k=21}^{279} \{A:S(A)=k\}} S(A) = p_0 \sum_{A\in\Omega} S(A) = p_0 \sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} i.$$

Wymagane teraz obliczenia zostały sprowadzone do obliczeń wymaganych w poprzednim rozwiązaniu.

2.3 Metoda trzecia, pomysłowa

Weźmy pomocniczą funkcję $h : \{1, 2, \ldots, 49\} \to \{1, 2, \ldots, 49\}$ zdefiniowaną wzorem $h(x) = 50 - x$. Oczywiście, jest to permutacja zbioru $\{1, 2, \ldots, 49\}$. Najpierw obliczymy

$$\sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} h(i).$$

Korzystając z wzoru (1) powyższe wyrażenie zapisujemy jako

$$\sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} h(i) = \sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in h[A]} i = \sum_{A\in\Omega} S(h[A])$$

(podstawiamy w (1) $f = id$, $J = A$ oraz $I = h[A]$). Jeżeli jeszcze raz skorzystamy z wzoru (1) i z tego, że operacja obrazu wyznaczona przez h jest permutacją zbioru Ω, to otrzymamy równość

$$\sum_{A\in\Omega} S(A) = \sum_{A\in\Omega} S(h[A]).$$

Ostatecznie dostajemy

$$\sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} h(i) = \sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} i.$$

Na koniec zauważmy, że

$$2 \sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} i = \sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} i + \sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} h(i) = \sum_{A\in\Omega} \sum_{i\in A} (i + h(i)) = \sum_{A\in\Omega} 6 \cdot 50 = 300 \cdot |\, \Omega \,|.$$