Wskazówka do ostatniego zadania z listy 1

Antoni Kościelski

1 Treść zadania

Należy wykazać, że

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \Gamma(a)\Gamma(b),$$

gdzie

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx \ \text{ oraz } \ \Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx.$$

2 Idea rozwiązania

Bierzemy lewą stronę wzoru

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\right) \cdot \left(\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy\right) = \ldots$$

i przekształcamy ją tak długo, aż otrzymamy prawą stronę. Kłopot polega na tym, że nie bardzo wiadomo co zrobić z taką lewą stroną. Żadnej z tych całek nie potrafimy wyliczyć. Mopżemy zastosować jednak bardziej skomplikowaną technikę polegającą na przejściu do całek podwójnych.

3 Przejście do całek podwójnych

Jeżeli przekszałcamy wyrażenie postaci

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy\right),$$

to każdą z tych całek możemy potraktować jako ustaloną liczbę C i możemy skorzystać z wzoru

$$C \cdot \int_a^b h(z)dz = \int_a^b C \cdot h(z)dz.$$

Po dwukrotnym skorzystaniu z powyższego wzoru otrzymujemy

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy\right) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot g(y)dy =$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x) \cdot g(y)dx\right) dy = \int_c^d \int_a^b f(x) \cdot g(y)dxdy.$$

Analogicznie pokazujemy, że

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right) \cdot \left(\int_c^d g(y)dy\right) = \int_a^b \int_c^d f(x) \cdot g(y)dydx.$$

Przy okazji pokazaliśmy, że wzór

$$\int_a^b \int_c^d k(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b k(x,y)dxdy$$

zachodzi przynajmniej dla niektórych funkcji dwóch zmiennych. W rzeczywistości wzór ten jest słuszny dla właściwie wszystkich funkcji i będziemy z tego korzystać.

4 Pierwszy krok

Mamy więc

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx\right) \cdot \left(\int_0^\infty y^{a+b-1}e^{-y}dy\right) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^1 \left(x^{a-1}(1-x)^{b-1}y^{a+b-1}e^{-y}dx\right) dy$$

i możemy wewnętrzną całkę scałować przez podstawienie $t = x \cdot y$ (wprowadzamy nową zmienną t, która jest iloczynem stałej y i zmiennej x, po której całkujemy).

Dalej powinniśmy przestawić całki i zmienić kolejność całkowania. Niestety, wykonane przekształcenie (podstawianie) uzmiennia granicę całkowania wewnętrznej całki, a to powoduje dalsze komplikacje. Podany wzór na przestawianie całek wymaga bowiem stałych granic całkowania.

5 Ciąg dalszy

Jeżeli mamy już wzór postaci

$$B(a,b)\Gamma(a+b) = \int_0^\infty \int_0^y k(t,y)dtdy,$$

to bierzemy pomocniczą funkcję

$$p(t,y) = \begin{cases} 0 & t > y \\ 1 & t \leqslant y \end{cases}.$$

Wtedy

$$\int_0^y k(t,y)dt = \int_0^y p(t,y)\cdot k(t,y)dt = \int_0^y p(t,y)\cdot k(t,y)dt + \int_y^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)dt =$$

$$= \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)dt$$

oraz

$$\int_0^\infty \int_0^y k(t,y)dtdy = \int_0^\infty \int_0^y p(t,y)\cdot k(t,y)dtdy = \int_0^\infty \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)dtdy.$$

Teraz już można przestawić całki. Trzeba jeszcze zauważyć, że

$$\int_0^\infty \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)dtdy = \int_0^\infty \int_0^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)dydt = \int_0^\infty \int_t^\infty p(t,y)\cdot k(t,y)dydt.$$

Dalsze rachunki nie powinny sprawiać trudności.