8 Wstęp do nierówności liniowych

8.1 Rozwiązania bazowe układu nierówności liniowych

Wektor $\vec{x}_0 \in R^n$ jest bazowym rozwiązaniem układu nierówności $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A\vec{x}_0 \geqslant \vec{b}$ oraz $\vec{x}_0$ spełnia pewien układ złożony z n liniowo niezależnych równań należących do układu $A\vec{x} = \vec{b}$. Jest oczywiste, że układ nierówności ma skończenie wiele rozwiązań bazowych. Będziemy się też posługiwać analogicznie zdefiniowanym pojęciem rozwiązania bazowego układu złożonego zarówno z nierówności, jak i równań liniowych. Uwypukleniem zbioru $V \subseteq R^n$ nazywamy zbiór wszystkich kombinacji wypukłych wektorów ze zbioru V, czyli zbiór

$$\{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{v}_i \in R^n : \alpha_i \geqslant 0 \wedge \vec{v}_i \in V \text{ dla } i = 1, \ldots, m \text{ oraz } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1\}.$$

Twierdzenie 8.1 (znane na przełomie XIX i XX w.) *Niech $\mathcal{A}$ będzie układem nierówności (i równań) liniowych*

$$A_1\vec{x} \geqslant \vec{b}_1 \quad \textit{oraz } A_2\vec{x} = \vec{b}_2$$

z macierzą główną o liniowo niezależnych kolumnach (a więc takim, że warunek $A_1\vec{x} = \vec{0}$ i $A_2\vec{x} = \vec{0}$ zachodzi tylko dla wektora $\vec{x} = \vec{0}$). Niech V będzie uwypukleniem zbioru rozwiązań bazowych tego układu, a W – zbiorem rozwiązań układu $A_1\vec{x} \geqslant \vec{0}$ i $A_2\vec{x} = \vec{0}$. Wtedy każde rozwiązanie układu $\mathcal{A}$ daje się przedstawić w postaci sumy $\vec{v} + \vec{w}$ wektorów $\vec{v} \in V$ i $\vec{w} \in W$.

Dowód. Przyjmijmy oznaczenia wprowadzone w sformułowaniu twierdzenia. Dodatkowo, symbolem $\mathcal{A}_0$ będziemy oznaczać układ złożony z nierówności $A_1\vec{x} \geqslant \vec{0}$ i równości $A_2\vec{x} = \vec{0}$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na liczbę nierówności występujących w układzie $\mathcal{A}$ (liczbę wierszy macierzy A_1).

Jeżeli macierz A_1 ma zero wierszy, to układ $\mathcal{A}$ jest układem równań liniowych i z założenia o liniowej niezależności kolumn jego macierzy głównej wynika, że ma najwyżej jedno rozwiązanie, które jest także rozwiązaniem bazowym. Stąd teza twierdzenia wynika w sposób oczywisty. Dalej bedziemy zajmować się układami z niepustą macierzą A_1.

Niech $\mathcal{A}'$ będzie układem powstającym z układu $\mathcal{A}$ przez zastąpienie równościami kilku nierówności z tego układu (z zachowaniem obu stron nierówności, a więc w kilku nierównościach wymazujemy znak $\geqslant$ i w to miejsce wpisujemy znak $=$). Niech V' i W' oznaczają zbiory zdefiniowane dla układu $\mathcal{A}'$ w taki sposób, jak definiowaliśmy zbiory V i W dla układu $\mathcal{A}$. Zauważmy, że $V' \subseteq V$ i $W' \subseteq W$.

Zauważmy także, że zbior W jest zamknięty ze względu na sumowanie wektorów i mnożenie wektorów przez liczby dodatnie.

Niech $\vec{x}_0$ będzie ustalonym wektorem spełniającym układ $\mathcal{A}$. Będziemy konstruować odpowiednie przedstawienie $\vec{x}_0$. Oczywiście, wektor $\vec{x}_0$ jest także rozwiązaniem układu $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ (a więc zachodzi jeden z dwóch niżej analizowanych przypadków).

Przypadek 1: równanie $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Wtedy jedynym rozwiązaniem układu $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ jest wektor $\vec{x}_0$ i jest on rozwiązaniem bazowym układu $\mathcal{A}$. Tak więc $\vec{x}_0 + \vec{0}$ jest szukanym przedstawieniem wektora $\vec{x}_0$.

Przypadek 2: równanie $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ ma przynajmniej dwa rozwiązania. Istnieje więc wektor $\vec{y}_0 \neq 0$ taki, że $A_2\vec{y}_0 = \vec{0}$. Dla tego wektora zachodzi warunek $A_1\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, gdyż w przeciwnym razie $\vec{y}_0$ byłby wektorem zerowym. Jeżeli $\vec{a}$ jest wierszem macierzy A_1, a b jest odpowiadającym mu elementem wektora $\vec{b}_1$, to definiujmy zbiór

$$T_{\vec{a}} = \{t \in R : \vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geqslant b\}.$$

Oczywiście, $0 \in T_{\vec{a}}$. Będziemy badać zbiór

$$T = \{t \in R : A_1(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geqslant \vec{b}_1\} = \bigcap_{\vec{a}\,-\,\text{wiersz } A_1} T_{\vec{a}}.$$

Przypuśćmy, że $\vec{a}$ jest wierszem macierzy A_1 takim, że $\vec{a}\vec{y}_0 > 0$. Wtedy dla

$$t = t_{\vec{a}} = \frac{b - \vec{a}\vec{x}_0}{\vec{a}\vec{y}_0}$$

zachodzi równość $\vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) = b$, dla wszystkich $t > t_{\vec{a}}$ zachodzi nierówność $\vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) > b$, a dla wszystkich $t < t_a$ mamy $\vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) < b$. Wobec tego, $T_{\vec{a}} = [t_{\vec{a}}, \infty)$ oraz $t_{\vec{a}} \leqslant 0$. Podobnie dowodzimy, że jeżeli $\vec{a}\vec{y}_0 < 0$, to $T_{\vec{a}} = (-\infty, t_{\vec{a}}]$ dla $t_{\vec{a}} \geqslant 0$. Zauważmy jeszcze, że jeżeli $\vec{a}\vec{y}_0 = 0$, to $T_{\vec{a}} = (-\infty, \infty)$.

Przypadek 2.1: $A_1\vec{y}_0 \geqslant \vec{0}$. Wtedy $T = [t_{\vec{a}}, \infty)$ dla pewnego wiersza $\vec{a}$ macierzy A_1 takiego, że $t_{\vec{a}} \leqslant 0$. Rozważmy wektor $\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0$. Wektor ten spełnia nierówność z wiersza $\vec{a}$, czyli nierówność $\vec{a}\vec{x} \geqslant b$, w ten sposób, że po podstawieniu go za $\vec{x}$ obie strony nierówności stają się równe. Niech $\mathcal{A}'$ będzie układem powstającym przez usunięcie nierówności $\vec{a}\vec{x} \geqslant b$ z układu $A_1\vec{x} \geqslant \vec{b}_1$ i dołączenie do układu $A_2\vec{x} = \vec{b}_2$ równości $\vec{a}\vec{x} = b$. Jest oczywiste, że wektor $\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0$ spełnia układ $\mathcal{A}'$. Dla układu $\mathcal{A}'$ możemy skorzystać z założenia indukcyjnego. Tak więc $\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0 = \vec{v} + \vec{w}$ dla pewnych wektorów $\vec{v}$ i $\vec{w}$ takich, że $\vec{v}$ jest kombinacją wypukłą rozwiązań bazowych układu $\mathcal{A}'$, a $\vec{w}$ spełnia układ wszystkich nierówności $A_1\vec{w} \geqslant \vec{0}$ z wyjątkiem $\vec{a}\vec{w} \geqslant 0$, układ równości $A_2\vec{w} = \vec{0}$, a także równość $\vec{a}\vec{w} = 0$.

Jest oczywiste, że wektor $\vec{w}$ spełnia także układ $\mathcal{A}_0$, a $\vec{v}$ jest kombinacją wypukłą rozwiązań bazowych układu $\mathcal{A}$. Zachodzi też równość

$$\vec{x}_0 = \vec{v} + (\vec{w} - t_{\vec{a}}\vec{y}_0).$$

Jest to szukane przedstawienie wektora $\vec{x}_0$.

Przypadek 2.2: $A_1\vec{y}_0 \leqslant \vec{0}$. W tym przypadku $T = (-\infty, t_{\vec{a}}]$ dla pewnego wiersza $\vec{a}$ takiego, że $t_{\vec{a}} \geqslant 0$, i potrzebne przedstawienie wektora $\vec{x}_0$ znajdujemy tak, jak w poprzednim przypadku.

Przypadek 2.3: istnieją wiersze $\vec{a}$ i $\vec{a}'$ macierzy A_1 takie, że $\vec{a}\vec{y}_0 < 0 < \vec{a}'\vec{y}_0$. Tym razem $T = [t_{\vec{a}'}, t_{\vec{a}}]$ oraz $t_{\vec{a}'} \leqslant 0 \leqslant t_{\vec{a}}$. Tak jak w przypadku 2.1 znajdujemy wektory $\vec{v}$ i $\vec{v}'$ bedące kombinacjami wypukłymi rozwiązań bazowych oraz wektory $\vec{w}$ i $\vec{w}'$ spełniające układ $\mathcal{A}_0$, takie że

$$\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0 = \vec{v} + \vec{w} \quad \text{i} \quad \vec{x}_0 + t_{\vec{a}'}\vec{y}_0 = \vec{v}' + \vec{w}'.$$

Wobec tego, jeżeli dodatkowo przyjmiemy, że $t_{\vec{a}} \neq t_{\vec{a}'}$, to

$$\vec{x}_0 = \frac{t_{\vec{a}}(\vec{x}_0 + t_{\vec{a}'}\vec{y}_0) - t_{\vec{a}'}(\vec{x}_0 + t_{\vec{a}}\vec{y}_0)}{t_{\vec{a}} - t_{\vec{a}'}} = (\frac{t_{\vec{a}}}{t_{\vec{a}} - t_{\vec{a}'}}\vec{v}' + \frac{-t_{\vec{a}'}}{t_{\vec{a}} - t_{\vec{a}'}}\vec{v}) + (t_{\vec{a}}\vec{w}' + (-t_{\vec{a}'})\vec{w})$$

i mamy odpowiednie przedstawienie wektora $\vec{x}_0$. Jeżeli natomiast $t_{\vec{a}} = t_{\vec{a}'}$, to $t_{\vec{a}} = 0$ i szukanym przedstawieniem wektora $\vec{x}_0$ jest $\vec{v} + \vec{w}$. □

Wniosek 8.2 *Każdy niesprzeczny układ nierówności liniowych o liniowo niezależnych kolumnach ma rozwiązanie bazowe.* □

Wniosek 8.3 *Jeżeli układ nierówności liniowych ma ograniczony zbiór rozwiązań, to każde jego rozwiązanie jest kombinacją wypukłą rozwiązań bazowych.*

Dowód. Najpierw zauważmy, że jeżeli $\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, to zbiór $\{\vec{x}_0 + t\vec{y}_0 : t > 0\}$ zawiera dowolnie długie wektory i jest nieograniczony.

Przypuśćmy, że rozważamy układ $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ i wektor $\vec{x}_0$ jest rozwiązaniem tego układu.

Jeżeli kolumny macierzy A nie są liniowo niezależne, to istnieje niezerowy wektor $\vec{y}_0$ taki, że $A\vec{y}_0 = \vec{0}$. Wtedy wszystkie wektory postaci $\vec{x}_0 + t\vec{y}_0$ spełniają układ $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$, a więc zbiór rozwiązań takiego układu jest nieoraniczony.

Jeżeli układ $A\vec{x} \geqslant \vec{0}$ ma rozwiązanie $\vec{y}_0 \neq \vec{0}$, każdy wektor $\vec{x}_0 + t\vec{y}_0$ dla $t \geqslant 0$ jest rowiązaniem układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$. Także w tym przypadku zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ jest nieograniczony.

Wobec tego, jeżeli zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ jest ograniczony, to spełnione są założenia twierdzenia 8.1 i dodatkowo jedynym rozwiązaniem układu $A\vec{x} \geqslant \vec{0}$ jest wektor zerowy. Teraz teza jest prostą konsekwencją twierdzenia 8.1. □

Twierdzenie 8.1 zawiera najważniejsze i najtrudniejsze do udowodnienia informacje o układach nierówności liniowych, potrzebne do opracowania metody rozwiązywania takich układów. Dalsze szczgóły dotyczące rozwiązywania nierówności liniowych znajdują się w rozdziale poświęconym pracy von zur Gathena i Sievekinga.

8.2 Lemat Farkasa

Lemat 8.4 *Przypuśmy, że mamy niezerowe wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$. Jeżeli $\vec{v}\vec{w} \leqslant 0$, to pewna kombinacja wypukła tych wektorów jest krótsza od każdego z nich.*

Dowód. Wektory $\vec{v}$ i $\vec{w}$ są różne, gdyż w przeciwnym razie ich iloczyn skalarny byłby dodatni.

Niech α będzie dane wzorem

$$\alpha = \frac{\vec{w}(\vec{w} - \vec{v})}{(\vec{w} - \vec{v})^2} = \frac{\vec{w}^2 - \vec{v}\vec{w}}{\vec{w}^2 - 2\vec{v}\vec{w} + \vec{v}^2}.$$

Oczywiście, $0 < \alpha < 1$. Zauważmy także, że

$$(\vec{w} - \alpha(\vec{w} - \vec{v}))(\vec{w} - \vec{v}) = 0.$$

Weźmy wektor $\vec{h}$ taki, że

$$\vec{h} = \alpha\vec{v} + (1-\alpha)\vec{w} = \vec{w} - \alpha(\vec{w} - \vec{v})$$

(jest to wysokość trójkąta wyznaczonego przez wektory $\vec{w}$ i $\vec{v}$). Zachodzą więc następujące równości:

$$\vec{h}(\vec{w} - \vec{v}) = 0$$

oraz

$$\vec{w} = \vec{h} + \alpha(\vec{w} - \vec{v}) \quad \text{i} \quad \vec{v} = \vec{h} + (\alpha - 1)(\vec{w} - \vec{v}).$$

Podnosząc te równości obustronnie do kwadratu otrzymujemy

$$\vec{w}^2 = \vec{h}^2 + \alpha^2(\vec{w} - \vec{v})^2 \quad \text{i} \quad \vec{v}^2 = \vec{h}^2 + (\alpha - 1)^2(\vec{w} - \vec{v})^2.$$

Ponieważ $0 < \alpha < 1$ i $\vec{w} - \vec{v} \neq \vec{0}$, więc

$$|\,\vec{w}\,|^2 = \vec{w}^2 > \vec{h}^2 = |\,\vec{h}\,|^2 \quad \text{i} \quad |\,\vec{v}\,|^2 = \vec{v}^2 > \vec{h}^2 = |\,\vec{h}\,|^2. \ \square$$

Lemat 8.5 *Niech $V \subseteq R^m$ będzie skończenie generowalnym, niepustym zbiorem wypukłym. W zbiorze V istnieje element krótszy od wszystkich innych elementów V.*

Dowód. Przypuśćmy, że V jest generowany przez wektory $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$. Rozważmy funkcję $f : R^n \to R^m$ zdefiniowaną wzorem

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i.$$

Zbiór $\{|\,\vec{v}\,| : \vec{v} \in V\}$ jest ograniczony z dołu i dlatego ma kres dolny. Niech a będzie tym kresem. Wszystkie elementy zbioru V są wartościami funkcji f dla nieujemnych argumentów $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ takich, że $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Możemy więc wybrać ciąg o nieujemnych wyrazach

$$(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{n,k}) \in R^n$$

takich, że $\sum_{i=1}^n \alpha_{i,k} = 1$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} |\, f(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{n,k})\,| = a.$$

Oczywiście, $0 \leqslant \alpha_{i,k} \leqslant 1$. Z każdego ciągu liczb rzeczywistych z przedziału $[0,1]$ można wybrać podciąg zbieżny. Powtarzając wybieranie n razy dostajemy zbieżny ciąg o wyrazach postaci $(\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{n,k})$. Niech $(\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j})$ będzie tym ciągiem i niech

$$\lim_{j\to\infty} (\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j}) = (\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}).$$

Z ciągłości funkcji f wynika, że

$$\lim_{j\to\infty} f(\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j}) = f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}).$$

Zauważmy, że liczby $\alpha_{i,0}$ spełniają równość $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,0} = 1$. Tak więc $f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}) \in V$.

Oznaczmy wektor $f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0})$ symbolem $\vec{h}$. Ciągłość funkcji przyporządkowującej wektorowi jego długość implikuje, że

$$a = \lim_{j\to\infty} |\, f(\alpha_{1,k_j}, \ldots, \alpha_{n,k_j}) \,| = |\, f(\alpha_{1,0}, \ldots, \alpha_{n,0}) \,| = |\, \vec{h} \,|.$$

W ten sposób dowiedliśmy, że $\vec{h}$ jest najkrótszym wektorem w zbiorze V. □

Lemat 8.6 *Niech $V \subseteq R^m$ będzie skończenie generowalnym, niepustym zbiorem wypukłym. Jeżeli $0 \notin V$, to istnieje niezerowy wektor $\vec{v} \in R^m$ taki, że $\vec{v}\vec{w} > 0$ dla wszystkich $\vec{w} \in V$.*

Dowód. Na podstawie lematu 8.5 znajdujemy najkrótszy wektor $\vec{v} \in V$. Oczywiście, $\vec{v} \neq \vec{0}$. Przypuśćmy, że dla pewnego $\vec{w} \in V$ zachodzi nierówność $\vec{v}\vec{w} \leqslant 0$. Wtedy, korzystając z lematu 8.4, konstruujemy wektor $\vec{v}' \in V$, który jest krótszy od $\vec{v}$. Przeczy to definicji $\vec{v}$. □

Wniosek 8.7 (lemat Farkasa) *Przyjmijmy, że $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in R^m$. Układ nierówności $\vec{v}_j\vec{x} > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy nie istnieją nieujemne liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nie wszystkie równe 0, takie że*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j = \vec{0}.$$

Dowód. Przypuśćmy, że układ nierówności $\vec{v}_j\vec{x} > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$ ma rozwiązanie $\vec{x}_0$ i jednocześnie istnieją nieujemne liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ o podanych własnościach. Wtedy suma

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\vec{v}_j \vec{x}_0)$$

jest dodatnia. Z drugiej jednak strony

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j (\vec{v}_j \vec{x}_0) = (\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \vec{v}_j)\vec{x}_0 = \vec{0}\vec{x}_0 = 0.$$

W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność.

Dla dowodu implikacji odwrotnej załóżmy, że nie istnieją nieujemne liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ o własnościach podanych w tezie wniosku. Niech V będzie uwypukleniem zbioru $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$. Ponieważ równość wyrażającą własność liczb α_i można podzielić stronami przez dowolną liczbę różną od zera nie powodując zmiany prawej strony tej równości, więc istnienie liczb α_i jest równoważne warunkowi $\vec{0} \in V$. Stąd otrzymujemy, że $\vec{0} \notin V$. Możemy więc skorzystać z lematu 8.6. Wynika z niego, że dla pewnego wektora $\vec{h}$ i dowolnego elementu $\vec{v} \in V$ zachodzi nierówność $\vec{v}\vec{h} > 0$. Oznacza to, że wektor $\vec{h}$ jest rozwiązaniem układu nierówności $\vec{v}_j\vec{x} > 0$ dla $j = 1, \ldots, k$. □