13 Podstawy metody elipsoid.

13.1 Uogólnione rozwinięcie Laplace'a (ponownie)

Przypuśćmy, że mamy macierz A. Przypomnijmy, że dla rosnących ciągów $\vec{x}$ oraz $\vec{y}$ liczb większych od 0 i nie przekraczających odpowiednio liczby wierszy i liczby kolumn macierzy A definiujemy macierze $A_{\vec{x};\vec{y}}$ oraz $A^{\vec{x};\vec{y}}$. Pierwsza z tych macierzy powstaje z macierzy A przez wykreślenie wierszy o indeksach z ciągu $\vec{x}$ oraz kolumn o indeksach z ciągu $\vec{y}$. Macierz $A^{\vec{x};\vec{y}}$ składa się z tych wyrazów A, które znajdują się na przecięciach wierszy o indeksach z ciągu $\vec{x}$ oraz kolumn o indeksach z ciągu $\vec{x}$.

Niech $\vec{x}$ będzie dowolnym rosnącym ciągiem liczb od 1 do n mającym $m < n$ wyrazów. Wyznacznik macierzy A o wymiarach $n \times n$ możemy obliczać zgodnie z następującym wzorem

$$| A | = \sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_m)} (-1)^{s(\vec{x})+s(\vec{y})} | A^{\vec{x};\vec{y}} || A_{\vec{x};\vec{y}} |,$$

gdzie $s(\vec{k})$ oznacza sumę wyrazów ciągu $\vec{k}$ (sumujemy w tym wzorze po wszystkich rosnących ciągach $\vec{y}$ długości m). Wzór ten nazywamy uogólnionym rozwinięciem Laplace'a wyznacznika macierzy A. Został udowodniony w szczególnym przypadku dla $m = 2$ w wykładzie 2.

13.2 Pewien wzór i wyznaczniki Grama

Przypuśćmy, że mamy dane wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ oraz $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in R^m$. Załóżmy, że $n \leqslant m$. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$G_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1\vec{b}_1 & \ldots & \vec{a}_1\vec{b}_n \\ & \ddots & \\ \vec{a}_n\vec{b}_1 & \ldots & \vec{a}_n\vec{b}_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$W_{(j_1,\ldots,j_k)}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \begin{bmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \ldots & a_{1,j_k} \\ a_{2,j_1} & a_{2,j_2} & \ldots & a_{2,j_k} \\ & & \ddots & \\ a_{n,j_1} & a_{n,j_2} & \ldots & a_{n,j_k} \end{bmatrix},$$

gdzie $(j_1, \ldots, j_k)$ jest dowolnym ciągiem liczb od 1 do m oraz $\vec{a}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,m})$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Lemat 13.1 *Dla dowolnych wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ oraz $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n \in R^m$ mamy*

$$| G_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) | = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant m} \left| W_{(j_1,\ldots,j_n)}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \right| \left| W_{(j_1,\ldots,j_n)}(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n) \right|.$$

Dowód. Lemat dowodzimy przez indukcję ze względu na n. Dla $n = 1$ wzór jest oczywisty.

Przyjmijmy, że w dalszym ciągu dowodu symbol $\vec{j}$ będzie zawsze oznaczać rosnący ciąg o $n-1$ wyrazach będących liczbami dodatnimi, mniejszymi od m. Dla takiego ciągu $\vec{j}$ symbolem

$(k,\vec{j})$ oznaczamy ciąg $\vec{j}$ z liczbą k dopisaną na początku, symbolem $c(k,\vec{j})$ – ciąg $\vec{j}$ z liczbą k wstawioną tak, aby był to ciąg rosnący (o ile jest to możliwe), a symbolem $m(k,\vec{j})$ – liczbę wyrazów ciągu $\vec{j}$ mniejszych od k. Zauważmy, że zachodzą następujące równości:

$$
\begin{aligned}
&|\, G_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\,| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\vec{a}_1\vec{b}_i)|\, G_{n-1}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n)\,| \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}(\sum_{k=1}^{m} a_{1,k}b_{i,k})\sum_{\vec{j}}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{\vec{j}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\vec{j}} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}b_{i,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_{i-1},\vec{b}_{i+1},\ldots,\vec{b}_n)\right|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\sum_{\vec{j}} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{j}}\sum_{k\notin\vec{j}} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{j}}\sum_{k\notin\vec{j}}(-1)^{m(k,\vec{j})} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{c(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right|.
\end{aligned}
$$

Wyznacznik $|\, G_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\,|$ został więc przedstawiony w postaci sumy składników indeksowanych parami złożonymi z ciągu $\vec{j}$ i liczby k, $1\leqslant k\leqslant m$, która w tym ciągu nie występuje. Nietrudno zauważyć, że funkcja F, która takiej parze przyporządkowuje parę złożoną z liczby k i ciągu $c(k,\vec{k})$ jest różnowartościowa i przekształca zbiór opisanych par na zbiór par złożonych z rosnącego, n-wyrazowego ciągu $\vec{J}$ liczb od 1 do m i jednego z wyrazów tego ciągu. Dalej, konsekwentnie, symbolem $\vec{J}$ będą oznaczane takie właśnie ciągi. Z istnienia i własności funkcji F wynika zaś, że zbiór jej wartości jest zbiorem, który może indeksować składniki podanego przedstawienia interesującego nas wyznacznika. Aby indeksować tę sumę zbiorem wartości funkcji F wystarczy znaleźć funkcję odwrotną do F. Funkcja ta parze złożonej z wektora $\vec{J}$ i jego współrzędnej k przyporządkowuje parę złożoną z liczby k i ciągu $b(k,\vec{J})$ powstającego z $\vec{J}$ przez usunięcie wyrazu k. Potrzebna będzie jeszcze pomocnicza funkcja i, która wektorowi $\vec{J}$ i jego współrzędnej k przyporządkowuje indeks tej współrzędnej $i(k,\vec{J})$. Łatwo dowieść, że ta funkcja spełnia równość $i(k,\vec{J}) = m(k,b(k,\vec{J}))+1$. Dzięki przytoczonym faktom interesujący nas wyznacznik możemy przekształcać w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
&|\, G_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n;\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\,| \\
&= \sum_{\vec{j}}\sum_{k\notin\vec{j}}(-1)^{m(k,\vec{j})} a_{1,k}\left|W_{\vec{j}}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{c(k,\vec{j})}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{J}}\sum_{k\in\vec{J}}(-1)^{m(k,b(k,\vec{J}))} a_{1,k}\left|W_{b(k,\vec{J})}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right|\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{J}}\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right|\sum_{k\in\vec{J}}(-1)^{i(k,\vec{J})-1}(-1)^2 a_{1,k}\left|W_{b(k,\vec{J})}(\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)\right| \\
&= \sum_{\vec{J}}\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right||W_{\vec{J}}(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)| = \sum_{\vec{J}}|W_{\vec{J}}(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)|\left|W_{\vec{J}}(\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n)\right|.
\end{aligned}
$$

□

Będą nas szczególnie interesowały macierze

$$\mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = G_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n; \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

Nazywamy je macierzami Grama (odpowiedniego układu wektorów). Jest oczywiste, że macierze Grama są symetryczne. Wyznacznik macierzy Grama nazywamy krótko wyznacznikiem Grama. Zauważmy, że

Fakt 13.2 Niech A będzie macierzą o n wierszach. Przyjmijmy, że wierszami macierzy A są wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$. Wtedy

$$AA^T = \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

Wniosek 13.3 *Dla dowolnych wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ $(n \leqslant m)$ i dla macierzy A o n wierszach, której i-tym wierszem jest wektor $\vec{a}_i$, mamy*

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant m} \left| A^{1,\ldots,n;j_1,\ldots,j_n} \right|^2 .$$

Podany wzór w przypadku $n = m$ przyjmuje postać

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| = |\, A \,|^2$$

(i jest także oczywistą konsekwencją poprzedniego faktu). Tak więc każdy wyznacznik Grama jest liczbą nieujemną.

Wniosek 13.4 *Wzór z poprzedniego wniosku wyrażający wyznacznik macierzy $\mathcal{G}_2(\vec{a}, \vec{b})$ dla $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ i $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ ma postać*

$$(\sum_{i=1}^m a_i^2)(\sum_{i=1}^m b_i^2) - (\sum_{i=1}^m a_i b_i)^2 = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant m} (a_k b_l - a_l b_k)^2$$

i w konsekwencji

$$|\sum_{i=1}^m a_i b_i) \,| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^m b_i^2}.$$

13.3 Nierówność Hadamarda

Zauważmy najpierw, że zachodzi następująca nierówność:

Lemat 13.5 *Jeżeli $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^n$ i $k < n$, to*

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leqslant |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,||\, \mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \,|.$$

Dowód. Przypuśćmy, że $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ są kolejnymi wierszami macierzy A. Skorzystamy kolejno z wniosku 13.3, uogólnionego rozwinięcia Laplace'a (patrz rozdz. 13.1), nierówności z wniosku 13.4, z oczywistych zależności między macierzami $A_{\vec{x};\vec{y}}$ oraz $A^{\vec{u};\vec{v}}$ z uzupełniającymi się indeksami oraz ponownie z lematu 13.3. Z wymienionych faktów wynika, że

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|\,\mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)\,|} \\
&= |\,|\,A\,|\,| = |\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} (-1)^{s(1,\ldots,k)+s(\vec{y})}|\,A^{1,\ldots,k;\vec{y}}\,||\,A_{1,\ldots,k;\vec{y}}\,|\,| \\
&\leqslant \sqrt{\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} |\,A^{1,\ldots,k;\vec{y}}\,|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} |\,A_{1,\ldots,k;\vec{y}}\,|^2} \\
&= \sqrt{\sum_{\vec{y}=(y_1,\ldots,y_k)} |\,A^{1,\ldots,k;\vec{y}}\,|^2} \cdot \sqrt{\sum_{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_{n-k})} |\,A^{k+1,\ldots,n;\vec{x}}\,|^2} \\
&= \sqrt{|\,\mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k)\,|} \cdot \sqrt{|\,\mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n)\,|}.
\end{aligned}$$

□

Dążymy do wykazania, że udowodniona nierówność jest prawdziwa dla dowolnych podziałów dowolnych wyznaczników Grama. Wymaga to udowodnienia pomocniczego lematu potrzebnego także w dalszych rozważaniach.

Lemat 13.6 *Dla dowolnego układu liniowo niezależnych wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ $(n \leqslant m)$ istnieją wektory $\vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m \in R^m$ długości 1, parami ortogonalne i ortogonalne do każdego z wektorów $\vec{a}_i$. Ponadto układ $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m$ o takich własnościach jest bazą w przestrzeni R^m.*

Dowód. Najpierw udowodnimy drugą cześć tezy. Przypuśćmy, że

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i + \sum_{j=n+1}^{m} \beta_j \vec{b}_j = 0$$

i pomnóżmy tę równość stronami przez $\vec{b}_j$. Korzystając z ortogonalności wektorów i założenia o długości wektora $\vec{b}_j$ pokazujemy, że iloczyn $\vec{b}_j$ i lewej strony równości jest równy β_j. Wobec tego

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i = 0$$

i wystarczy powołać się na założenie o niezależności liniowej wektorów $\vec{a}_i$.

Aby dowieść pierwszą część tezy wystarczy pokazać, że każdy liniowo niezależny układ mniej niż m wektorów w R^m można uzupełnić o wektor unormowany i ortogonalny do pozostałych, a następnie to rozumowanie powtórzyć odpowiednio wiele razy.

Aby wykazać podany fakt, rozważmy układ równań

$$\vec{a}_1\vec{x} = 0, \ldots, \vec{a}_n\vec{x} = 0$$

ze zmiennymi $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ i załóżmy, że $n < m$. Zbiór rozwiązań tego układu jest niezerową podprzestrzenią R^m, a więc układ ten ma rozwiązanie $\vec{b}$ o długości 1. Jest oczywiste, że wektor $\vec{b}$ ma żądane własności. □

Fakt 1 *Dla wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m$ takich, jak w poprzednim lemacie prawdziwa jest równość*

$$\mathcal{G}_m(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m) = \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n).$$

□

Wniosek 13.7 *Jeżeli $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ i $k < n \leqslant m$, to*

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leqslant |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,||\, \mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \,|.$$

Dowód. Uzupełnijmy układ $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ o wektory $\vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m$ spełniające tezę poprzedniego lematu. Wtedy

$$\begin{aligned} |\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| &= |\, \mathcal{G}_m(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m) \,| \\ &\leqslant |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,| \cdot |\, \mathcal{G}_{m-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}_{n+1}, \ldots, \vec{b}_m) \,| \\ &= |\, \mathcal{G}_k(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_k) \,| \cdot |\, \mathcal{G}_{n-k}(\vec{a}_{k+1}, \ldots, \vec{a}_n) \,|. \end{aligned}$$

□

Wniosek 13.8 (nierówność Hadamarda) *Przypuśćmy, że $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ są kolejnymi wierszami macierzy A. Wtedy*

$$|\, A \,| \leqslant \prod_{i=1}^{n} |\, \vec{a}_i \,|.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$|\, A \,|^2 = |\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leqslant |\, \mathcal{G}_1(\vec{a}_1) \,| \cdot |\, \mathcal{G}_{n-1}(\vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) \,| \leqslant \ldots \leqslant \prod_{i=1}^{n} |\, \mathcal{G}_1(\vec{a}_i) \,| = \prod_{i=1}^{n} |\, \vec{a}_i \,|^2.$$

□

13.4 Objętość równoległościanu

Równoległościanem o krawędziach $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ nazywamy zbiór

$$R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i \in R^m : 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1 \text{ dla } i = 1, \ldots, n\}.$$

Zdefiniujemy teraz indukcyjnie pojęcie n wymiarowej objętości $\mathrm{Vol}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ równoległościanu $R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ w przestrzeni R^m. Przyjmujemy, że $\mathrm{Vol}_1(\vec{a}_1) = |\, \vec{a}_1 \,|$. Aby obliczyć $\mathrm{Vol}_{n+1}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1})$, wektor $\vec{a}_{n+1}$ rozkładamy na sumę wektorów $\vec{a}$ i $\vec{h}$, z których pierwszy jest kombinacją liniową wektorów $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, a drugi jest ortogonalny do tych wektorów (taki rozkład jest jednoznaczny), i przyjmujemy, że

$$\mathrm{Vol}_{n+1}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}) = \mathrm{Vol}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \cdot |\, \vec{h} \,|.$$

Lemat 13.9 *Dla dowolnego układu wektorów* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in R^m$ *zachodzi równość*

$$\mathrm{Vol}_n^2(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = |\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)\, |.$$

Dowód. Dowodzimy to, oczywiście, przez indukcję. Dla $n = 1$ teza jest oczywista. Weźmy wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$ i ostatni z nich przedstawmy w postaci

$$\vec{a}_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{a}_i + \vec{h},$$

gdzie $\vec{h}$ jest ortogonalny do wektorów $\vec{a}_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ (a więc $\vec{h}\vec{a}_i = 0$). Zauważmy, że

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vol}_{n+1}^2(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}) \\ &= \mathrm{Vol}_n^2(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) \cdot \vec{h}^2 = |\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)\, | \cdot \vec{h}^2 = |\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{h})\, |. \end{aligned}$$

Aby zakończyć dowód wystarczy wykazać, że

$$|\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{h})\, | = |\, \mathcal{G}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1})\, |.$$

W tym celu utwórzmy macierze A z wierszami będącymi wektorami $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}$, oraz B o wierszach $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{h}$. Jest oczywiste, że macierz A można otrzymać dodając kolejno do ostatniego wiersza macierzy B pozostałe wiersze pomnożone przez liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. To samo jest prawdą dla macierzy $A^{1,\ldots,n;\vec{j}}$ oraz $B^{1,\ldots,n;\vec{j}}$ dla dowolnego ciągu $\vec{j}$ złożonego z n indeksów. Zastosowany sposób przekształcania nie zmienia wyznacznika, a więc

$$|\, A^{1,\ldots,n;\vec{j}}\, | = |\, B^{1,\ldots,n;\vec{j}}\, |$$

dla wszystkich $\vec{j}$. Teraz wystarczy skorzystać ze wzoru z lematu 13.3. □

Pierwszą konsekwencją lematu jest poprawność definicji objętości równoległościanu, a więc fakt, że wartość $\mathrm{Vol}_n(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ zależy tylko od zbioru $R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$, a nie wyboru krawędzi $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ tego równoległościanu, ani od kolejności, w jakiej te krawędzie zostały wymienione. Fakt ten wymaga jeszcze kilku spostrzeżeń. Po pierwsze, równość $R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = R(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ implikuje, że wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ są liniowo niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy wektory $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ też mają tę własność. Z udowodnionego wzoru łatwo wynika, że jeżeli krawędzie są liniowo zależne, to objętość równoległościanu jest równa 0 (wtedy też równoległościan można przedstawiać na wiele sposobów). Jeżeli krawędzie równoległościanu są liniowo niezależne, to w każdym przedstawieniu są liniowo niezależne, i można dowieść, że wtedy różne przedstawienia różnią się najwyżej kolejnością, w jakiej zostały wymienione krawędzie. Z udowodnionego lematu wynika, że nie ma to wpływu na objętość równoległościanu.

Do tej pory pojęcie k wymiarowej objętości definiowaliśmy tylko dla równoległoscianów o k krawędziach. Pojęcie to możemy zdefiniować także dla równoległoscianów o mniejszej liczbie krawędzi korzystając z oczywistego wzoru

$$R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{0} \ldots, \vec{0}).$$

Zgodnie z tą definicją k wymiarowa objętość równoległościanu o mniejszej niż k liczbie krawędzi jest równa 0.

Przypuśćmy, że f jest przekształceniem liniowym przestrzeni R^m w siebie. Macierzą przekształcenia f nazywamy macierz, której kolumnami są kolejne wektory $f(1,0,\ldots,0), f(0,1,\ldots,0),\ldots,f(0$ Niech F będzie macierzą przekształcenia f. Zachodzi oczywisty wzór $f(\vec{x}) = F\vec{x}$ (aby wyliczyć $f(\vec{x})$ wystarczy wyliczyć iloczym macierzy A i jednokolumnowej macierzy-wektora $\vec{x}$). Łatwo też dowieść, że obraz równoległościanu $R(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$ wyznaczony przez przekształcenie f wyraża się wzorem

$$f(R(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)) = R(f(\vec{a}_1),\ldots,f(\vec{a}_n)).$$

Będzie nas interesować objętość tego obrazu.

Lemat 13.10 *Jeżeli f jest przekształceniem liniowym przestrzeni R^m w R^m, F jest macierzą przekształcenia f i $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m \in R^m$, to*

$$Vol_m(f(\vec{a}_1),\ldots,f(\vec{a}_m)) = |\,|\,F\,|\,|\cdot Vol_m(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m).$$

Dowód. Niech A będzie macierzą, której kolumnami są wektory $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$. Mamy więc

$$\mathrm{Vol}_n^2(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m) = |\,\mathcal{G}_n(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m)\,| = |\,A^TA\,|.$$

Zauważmy, że kolumnami macierzy FA są wektory $f(\vec{a}_1),\ldots,f(\vec{a}_m)$. Wobec tego

$$\mathrm{Vol}_m^2(f(\vec{a}_1),\ldots,f(\vec{a}_m)) = |\,(FA)^TFA\,|.$$

Ponieważ F i A są macierzami kwadratowymi, więc

$$|\,(FA)^TFA\,| = |\,A^TF^TFA\,| = |\,A^T\,||\,F^T\,||\,F\,||\,A\,| = |\,F\,|^2|\,A^TA\,|.$$

□

13.5 Objętość $(m+1)$-ścianu w przestrzeni R^m

Niech $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m \in R^m$. $(m+1)$-ścianem $S(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m)$ o krawędziach (bocznych) $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m$ nazywamy uwypuklenie zbioru $\{\vec{0},\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m\}$, czyli

$$S(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m) = \{\sum_{i=1}^m \alpha_i\vec{a}_i : \sum_{i=1}^m \alpha_i \leqslant 1 \wedge \alpha_i \geqslant 0 \text{ dla } i=1,\ldots,m\}.$$

Ustalmy wektory $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m \in R^m$ i dodatkowo załózmy, że są liniowo niezależne. Wprowadzimy pomocnicze oznaczania. Niech R oznacza równoległościan $R(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_n)$, S – $(m+1)$-ścian $S(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_m)$, a dla dowolnej permutacji σ liczb od 1 do m symbolem S_σ oznaczamy $(m+1)$-ścian

$$S(\vec{a}_{\sigma(1)},\vec{a}_{\sigma(1)}+\vec{a}_{\sigma(2)},\ldots,\sum_{i=1}^m \vec{a}_{\sigma(i)}).$$

Lemat 13.11 *Przy wyżej wprowadzonych oznaczeniach zachodzi następująca równość:*

$$R = \bigcup_\sigma S_\sigma,$$

przy czym sumowane są zbiory S_σ wyznaczone przez dowolne permutacje zbioru liczb od 1 do m.

Dowód. Oczywiście R jest zbiorem wypukłym i zawiera wszystkie wierzchołki zbioru S_σ (wszystkie punkty generujące S_σ). Zawiera więc również zbióry S_σ dla dowolnego σ.

Weźmy więc dowolny wektor $\vec{x} \in R$. Wektor ten jest postaci

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{a}_i$$

dla pewnych liczb α_i z przedziału $[0, 1]$. Uporządkujmy liczby α_i i weźmy permutację σ taką, że

$$\alpha_{\sigma(1)} \geqslant \alpha_{\sigma(2)} \geqslant \ldots \geqslant \alpha_{\sigma(m)}.$$

Zdefiniujmy $\beta_m = \alpha_{\sigma(m)}$ oraz $\beta_i = \alpha_{\sigma(i)} - \alpha_{\sigma(i+1)}$ dla $i < m$. Zauważmy, że wszystkie liczby β_i są nieujemne,

$$\sum_{i=j}^{m} \beta_i = \sum_{i=j}^{m-1} (\alpha_{\sigma(i)} - \alpha_{\sigma(i+1)}) + \alpha_{\sigma(m)} = \alpha_{\sigma(j)},$$

w tym także $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = \alpha_{\sigma(1)} \leqslant 1$ oraz

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i (\sum_{j=1}^{i} \vec{a}_{\sigma(j)}) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=j}^{m} \beta_i) \vec{a}_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{\sigma(j)} \vec{a}_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \vec{a}_j = \vec{x}.$$

Wobec tego $\vec{x} \in S_\sigma$. $\square$

Lemat 13.12 *Dla dowolnej pary różnych permutacji σ i τ liczb od 1 do m istnieje liczba i_0, $1 \leqslant i_0 \leqslant m$, taka że*

$$S_\sigma \cap S_\tau \subseteq R(\vec{a}_{\sigma(1)}, \vec{a}_{\sigma(1)} + \vec{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \sum_{j=1}^{i_0-1} \vec{a}_{\sigma(j)}, \sum_{j=1}^{i_0+1} \vec{a}_{\sigma(j)}, \ldots, \sum_{j=1}^{m} \vec{a}_{\sigma(j)}).$$

Dowód. Niech i_0 będzie najmniejszą liczbą taką, że $\sigma(i_0) \neq \tau(i_0)$. Udowodnimy, że i_0 ma własności podane w tezie lematu.

Weźmy $\vec{x} \in S_\sigma \cap S_\tau$. Wobec tego istnieją nieujemne liczby $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ oraz $\beta_1, \ldots, \beta_m$ takie, że $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \leqslant 1$ oraz

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i (\sum_{j=1}^{i} \vec{a}_{\sigma(j)}) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i (\sum_{j=1}^{i} \vec{a}_{\tau(j)}).$$

Sumom tym można nadać postać

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=j}^{m} \alpha_i) \vec{a}_{\sigma(j)} = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=j}^{m} \beta_i) \vec{a}_{\tau(j)}$$

a także postać

$$\vec{x} = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=\sigma^{-1}(j)}^{m} \alpha_i)\vec{a}_j = \sum_{j=1}^{m}(\sum_{i=\tau^{-1}(j)}^{m} \beta_i)\vec{a}_j.$$

Ponieważ wektory $\vec{a}_i$ są liniowo niezależne, więc z podanych równości wynika, że dla dowolnego $j = 1, \ldots, m$

$$\sum_{i=\sigma^{-1}(j)}^{m} \alpha_i = \sum_{i=\tau^{-1}(j)}^{m} \beta_i.$$

Rozważmy liczby $\sigma(i_0)$ i $\tau(i_0)$. Są to liczby różne i każda jest przyjmowana jako wartość przez obie permutacje. Istnieją więc liczby j_0 i k_0 takie, że $\sigma(i_0) = \tau(j_0)$ oraz $\tau(i_0) = \sigma(k_0)$.

Udowodnimy, że $i_0 < j_0$. W przeciwnym razie $j_0 \leqslant i_0$. Gdyby $j_0 < i_0$, to z definicji i_0 otrzymamy, że $\sigma(j_0) = \tau(j_0) = \sigma(i_0)$ i w konsekwencji funkcja σ nie byłaby różnowartościowa. Gdyby $j_0 = i_0$, to $\sigma(i_0) = \tau(j_0) = \tau(i_0)$, i otrzymujemy własność sprzeczną z definicją i_0. Podobnie dowodzimy nierówność $i_0 < k_0$.

Podstawmy w udowodnionym wzorze $j = \sigma(i_0)$ i $j = \tau(i_0)$, a także skorzystajmy z oszacowań liczb j_0 i k_0. Otrzymamy, że

$$\begin{aligned}\sum_{i=i_0}^{m} \alpha_i &= \sum_{i=\sigma^{-1}(\sigma(i_0))}^{m} \alpha_i = \sum_{i=\tau^{-1}(\sigma(i_0))}^{m} \beta_i = \sum_{i=j_0}^{m} \beta_i \leqslant \sum_{i=i_0}^{m} \beta_i \\ &= \sum_{i=\tau^{-1}(\tau(i_0))}^{m} \beta_i = \sum_{i=\sigma^{-1}(\tau(i_0))}^{m} \alpha_i = \sum_{i=k_0}^{m} \alpha_i \leqslant \sum_{i=i_0}^{m} \alpha_i,\end{aligned}$$

czyli wszystkie liczby występujące w tym wzorze są równe. Stąd wynika, że

$$0 \leqslant \alpha_{i_0} \leqslant \sum_{i=i_0}^{k_0-1} \alpha_i = \sum_{i=i_0}^{m} \alpha_i - \sum_{i=k_0}^{m} \alpha_i = 0.$$

Wektor $\vec{x}$ ma więc przedstawienie

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i(\sum_{j=1}^{i} \vec{a}_{\sigma(j)})$$

i w tym przedstawieniu współczynnik α_{i_0} jest równy 0, a pozostałe są nieujemne i nie większe niż 1. A to właśnie należało dowieść. □

Pojęcie m wymiarowej objętości zostało zdefiniowane dla szczególnych zbiorów. W teorii miary definicję tę rozszerza się na inne zbiory mierzalne, a w szczególności na zbiory definiowane za pomocą układów równości i nierówności, w których występują dowolne funkcje ciągłe współrzędnych punktu. Definiowane w teorii miary pojęcie objętości $\mathrm{Vol}_m(X)$ dla $X \subseteq R^m$ spełnia podane już wzory i ma między innymi następujące własności (wymieniam tylko własności potrzebne)

1) $\mathrm{Vol}_m(X)$ jest nieujemną liczbą rzeczywistą dla dowolnego ograniczonego i mierzalnego $X \subseteq R^m$,

2) $\mathrm{Vol}_m(X \cup Y) = \mathrm{Vol}_m(X) + \mathrm{Vol}_m(X)$ dla każdej pary rozłączych zbiorów mierzalnych X i Y (objętość jest addytywna),

3) jeżeli f jest przekształceniem liniowym przestrzeni R^m i F jest macierzą tego przekształcenia, to $\mathrm{Vol}_m(F(X)) = |\,|F|\,| \cdot \mathrm{Vol}_m(X)$ dla dowolnego zbioru mierzalnego X (jest to szczególny przypadek twierdzenia o całkowaniu przez podstawianie),

4) $\mathrm{Vol}_m(\{\vec{x} + \vec{a} : \vec{x} \in X\}) = \mathrm{Vol}_m(X)$ dla dowolnego zbioru mierzalnego X i dowolnego $\vec{a} \in R^m$ (objętość jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia).

Lemat 13.13 *Dla dowolnej permutacji σ liczb od 1 do m zachodzi równość*

$$\mathrm{Vol}_m(S) = \mathrm{Vol}_m(S_\sigma).$$

Dowód. Najpierw zajmiemy się macierzami A o kolumnach $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ i macierzą B o kolumnach

$$\vec{a}_{\sigma(1)}, \vec{a}_{\sigma(1)} + \vec{a}_{\sigma(2)}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} \vec{a}_{\sigma(i)}.$$

Są to macierze kwadratowe i nietrudno zauważyć, że jeżeli macierz B będziemy przekształcać odejmując kolejno dla $i = m-1, \ldots, 1$ od $i+1$-szej kolumny kolumnę o numerze i, to otrzymamy macierz o kolumnach macierzy A ustawionych – być może – w innym porządku. Operacje wykonywane podczas tego przekształcania nie zmieniają wyznacznika, a przestawianie kolumn wymaga najwyżej zmiany znaku. Wobec tego $|\,A\,| = \pm|\,B\,|$.

Rozważmy funkcję liniową f, która spełnia równości

$$f(\vec{a}_k) = \sum_{i=1}^{k} \vec{a}_{\sigma(i)}$$

dla $k = 1, \ldots, m$. Równości te jednoznacznie definiują funkcję f (założyliśmy, że wektory $\vec{a}_i$ są liniowo niezależne). Niech F będzie macierzą przekształcenia f. Zachodzi więc równość $FA = B$. Przechodząc do wyznaczników i korzystając z warunku $|\,A\,| \neq 0$ (będącego knsekwencją liniowej niezależności wektorów $\vec{a}_i$) otrzymujemy, że $|\,F\,| = \pm 1$.

Zauważmy jeszcze, że $F(S) = S_\sigma$. Jeżeli teraz skorzystamy z jednej z przytoczonych własności objętości, to otrzymamy tezę. □

Lemat 13.14 *Dla każdych dwóch różnych permutacji σ i τ zbioru liczb od 1 do m, objętość*

$$\mathrm{Vol}_m(S_\sigma \cap S_\tau)$$

jest równa 0.

Dowód. Jest to konsekwencja lematu 13.12 oraz nieujemności i addytywności objętości. Wystarczy zauważyć, że równoległościan z lematu 13.12 jest generowany przez mniej wektorów niż wynosi wymiar przestrzeni. □

Lemat 13.15 *Dla dowolnej permutacji σ, zbiór*

$$S'_\sigma = S_\sigma \setminus \left(\bigcup_{\tau \neq \sigma} (S_\sigma \cap S_\tau) \right)$$

ma objętość

$$\mathrm{Vol}_m(S'_\sigma) = \mathrm{Vol}_m(S_\sigma).$$

Dowód. Jest to konsekwencja nieujemności i addytywności objętości, bowiem od zbioru odjęliśmy podzbiór o objętości 0. □

Twierdzenie 13.16 *Jeżeli $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m$ są liniowo niezależnymi wektorami w przestrzeni R^m, to*

$$\mathrm{Vol}_m(S(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m)) = \frac{1}{m!} \mathrm{Vol}_m(R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m)).$$

Dowód. Zachodzą oczywiście następujące zawierania

$$\bigcup_\sigma S'_\sigma \subseteq R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m) = \bigcup_\sigma S_\sigma$$

(na podstawie lematu 13.11 i definicji S_σ). Zbiory postaci S'_σ są parami rozłączne, a więc z addytywności objętości i lematu 13.15 otrzymujemy

$$\begin{aligned} m! \cdot \mathrm{Vol}_m(S) &= \sum_\sigma \mathrm{Vol}_m(S'_\sigma) = \mathrm{Vol}_m(\bigcup_\sigma S'_\sigma) \\ &\leqslant \mathrm{Vol}_m(R(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_m)) = \mathrm{Vol}_m(\bigcup_\sigma S_\sigma) \leqslant \sum_\sigma \mathrm{Vol}_m(S_\sigma) = m! \cdot \mathrm{Vol}_m(S). \end{aligned}$$

□

13.6 Izometrie

Izometrią nazywamy dowolne przekształcenie $i : R^m \to R^m$ zachowujące odległość między punktami, a więc spełniające warunek

$$|\, i(\vec{x}) - i(\vec{y})\, | = |\, \vec{x} - \vec{y}\, |$$

dla dowolnych $\vec{x}, \vec{y} \in R^m$. Dla danej izometrii i definiujemy funkcję $I : R^m \to R^m$ tak, aby $I(\vec{x}) = i(\vec{x}) - i(\vec{0})$ dla wszystkich arumentów $\vec{x}$. Jest oczywiste, że funkcja I zachowuje długość, a więc dla dowolnego $\vec{x} \in R^m$ spełnia warunek

$$|\, I(\vec{x})\, | = |\, \vec{x}\, |,$$

a także zachowuje odległość dowolnych wektorów, gdyż

$$|\, I(\vec{x}) - I(\vec{y})\, | = |\, (i(\vec{x}) - i(\vec{0})) - (i(\vec{y}) - i(\vec{0}))\, | = |\, i(\vec{x}) - i(\vec{y})\, | = |\, \vec{x} - \vec{y}\, |.$$

Funkcje zachowujące odległość i długość zachowują także kwadraty tych wielkości, i w konsekwencji także iloczyn skalarny. Wynika to z następujących rachunków:

$$0 = (I(\vec{x})-I(\vec{y}))^2-(\vec{x}-\vec{y})^2 = (I(\vec{x}))^2-2I(\vec{x})I(\vec{y})+(I(\vec{y}))^2-(\vec{x}^2-2\vec{x}\vec{y}+\vec{y}^2) = 2(\vec{x}\vec{y}-I(\vec{x}I(\vec{y})).$$

Udowodnimy także, że funkcje zachowujące odległości punktów i długości wektorów są liniowe. Aby to zrobić, obliczmy wartość następującego wyrażenia:

$$\begin{aligned}
&(I(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})-\alpha I(\vec{x})-\beta I(\vec{y}))^2\\
&= (I(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y}))^2+\alpha^2(I(\vec{x}))^2+\beta^2(I(\vec{y}))^2-2\alpha I(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})I(\vec{x})\\
&\qquad -2\beta I(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})I(\vec{y})+2\alpha\beta I(\vec{x})I(\vec{y})\\
&= (\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})^2+\alpha^2\vec{x}^2+\beta^2\vec{y}^2-2\alpha(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\vec{x}-2\beta(\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})\vec{y}+2\alpha\beta\vec{x}\vec{y}\\
&= (\alpha\vec{x}+\beta\vec{y})^2-\alpha^2\vec{x}^2-\beta^2\vec{y}^2-2\alpha\beta\vec{y}\vec{x} = 0
\end{aligned}$$

Niech I będzie przekształceniem zachowującym długość i iloczyn skalarny wektorów i niech M będzie macierzą tego przekształcenia. Kolumnami tej macierzy są wektory $I(\vec{e}_i)$ ($\vec{e}_i$ to wektor, którego i-ta współrzędna jest równa 1, a pozostałe są równe 0). Założone własności I implikują, że $(I(\vec{e}_i))^2 = 1$ oraz $I(\vec{e}_i)I(\vec{e}_j) = 0$ dla $i \neq j$. Wobec tego macierz M^TM, czyli macierz Grama $\mathcal{G}_m(I(\vec{e}_1),\ldots,I(\vec{e}_m))$, jest macierzą jednostkową. Zachodzą więc równości $M^{-1} = M^T$, $MM^T = M^TM$ oraz $\mid M\mid = 1$.

Macierz M taką, że M^TM jest macierzą jednostkową, nazywamy ortogonalną.

Przedstawione rozumowania świadczą o prawdziwości następującego twierdzenia:

Twierdzenie 13.17 *Dla dowolnej izometrii $i : R^m \to R^m$ istnieje ortogonalna macierz M taka, że*

$$i(\vec{x}) = M\vec{x} + i(\vec{0})$$

dla wszystkich $\vec{x} \in R^m$. $\square$

Nietrudno też zauważyć, że złożenie izometrii jest izometrią, a także że iloczyn macierzy ortogonalnych jest macierzą ortogonalną.

13.7 Macierze symetryczne

Macierz kwadratowa A jest symetryczna, jeżeli $A^T = A$. Znajdziemy teraz szczególne przedstawienie macierzy symetrycznych.

Przypuśćmy, że A jest macierzą o wymiarach $m \times m$ i przyjmijmy, że I_m oznacza macierz jednostkową o tych samych wymiarach. Jest oczywiste, że wyznacznik $|A-\lambda I_m|$ jako funkcja λ jest wielomianem stopnia m. Wiadomo, że każdy wielomian o współczynnikach rzeczywistych (lub nawet zespolonych) ma pierwiastek zespolony. Będziemy analizować takie wielomiany i takie pierwiastki. Do tego będzie nam potrzebne pojęcie liczby sprzężonej. Liczbę sprzężoną $\overline{z}$ do liczby $z = a+bi$ definiujemy jako $a-bi$ (i oznacza tu liczbę zespoloną będącą pierwiastkiem kwadratowym z -1). Nietrudno zauważyć, że $z\overline{z}$ oraz $z+\overline{z}$ są dla dowolnej liczby zespolonej z liczbami rzeczywistymi. Pierwsza z tych liczb jest nieujemna i jest równa 0 wtedy i tylko gdy

$z = 0$. Zachodzą także dla wszystkich liczb zespolonych z_1 i z_2 następujące wzory $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ oraz $\overline{z_1 z_2} = (\overline{z_1})(\overline{z_2})$. Ponadto sprzężeniem liczby $\overline{z}$ jest liczba z, a liczby rzeczywiste można scharakteryzować jako liczby zespolone z spełniające równość $\overline{z} = z$.

Lemat 13.18 *Jeżeli A jest macierzą symetryczną o wymiarach $m \times m$ i o wyrazach rzeczywistych oraz liczba (zespolona) λ spełnia równanie $|\, A - \lambda I_m \,| = 0$, to λ jest liczbą rzeczywistą.*

Dowód. Rozważmy równanie liniowe $(A - \lambda I_m)\vec{x} = 0$. Ponieważ macierz główna tego równania ma wyznacznik równy 0, więc ma ono niezerowe rozwiązanie $\vec{x}_0$. Mamy także

$$A\vec{x}_0 = \lambda \vec{x}_0,$$

a po pomnożeniu tej równości przez wektor-macierz $\vec{y}_0^{\,T}$ otrzymujemy

$$\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0 = \lambda \vec{y}_0^{\,T} \vec{x}_0. \tag{18}$$

Przypuśćmy, że współrzędnymi wektora $\vec{y}_0$ są sprzężenia współrzędnych wektora $\vec{x}_0$. Zauważmy, że liczba $\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0$ wyraża się w określony sposób jako suma iloczynów współrzędnych wektorów $\vec{y}_0$ i $\vec{x}_0$, oraz elementów macierzy A. Wobec tego sprzężenie liczby $\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0$ wyraża się w ten sam sam sposób od sprzężeń współrzędnych wektorów $\vec{y}_0$ i $\vec{x}_0$, oraz elementów macierzy A. Operacja sprzężenia zastosowana do współrzędnych wektora $\vec{y}_0$ przekształca go w wektor $\vec{x}_0$ i odwrotnie, oraz nie zmienia elementów macierzy A. Wobec tego mamy

$$\overline{\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0} = \vec{x}_0^{\,T} A \vec{y}_0.$$

Symetryczność macierzy A implikuje, że

$$\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0 = (\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0)^T = \vec{x}_0^{\,T} A^T \vec{y}_0 = \vec{x}_0^{\,T} A \vec{y}_0$$

(macierz $\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0$ ma tylko jeden element). Z tych dwóch spostrzeżeń otrzymujemy, że

$$\overline{\vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0} = \vec{y}_0^{\,T} A \vec{x}_0,$$

a to oznacza, że lewa strona równości (18) jest liczbą rzeczywistą. Jeżeli $\vec{x}_0 = (x_1, \ldots, x_m)$, to prawa strona tej równości bez λ wyraża się wzorem

$$\vec{y}_0^{\,T} \vec{x}_0 = \sum_{j=1}^{m} \overline{x}_j x_j$$

i jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Ostatecznie z równości (18) otrzymujemy, że λ jest ilorazem dwóch liczb rzeczywistych, a więc jest liczbą rzeczywistą. □

Twierdzenie 13.19 *Dla dowolnej macierzy symetrycznej A (o elementach rzeczywistych) istnieją macierz przekątniowa B (elementy macierzy B znajdujące się poza przekątną są równe 0) oraz macierz ortogonalna X takie, że $A = X^T B X$*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję ze względu na wymiar macierzy A. Dla macierzy A o jednym elemencie twierdzenie jest oczywiste. Załóżmy więc, że A jest macierzą o wymiarach $m \times m$.

Weźmy liczbę rzeczywistą λ taką, że $|\, A - \lambda I_m \,| = 0$. Dla tej liczby równanie $(A - \lambda I_m)\vec{x} = \vec{0}$ ma niezerowe rozwiązanie. Zbiór rozwiązań tego równania jest zamknięty ze względu na mnożenie przez liczby. Możemy więc wziąć wektor $\vec{x}_1$ długości 1, spełniający $(A - \lambda I_m)\vec{x}_1 = \vec{0}$, czyli

$$A\vec{x}_1 = \lambda\vec{x}_1.$$

Zgodnie z lematem 13.6, wektor $\vec{x}_1$ możemy uzupełnić do bazy ortogonalnej $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$. Niech X_1 będzie macierzą, której kolejnymi kolumnami są wektory $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m$. Będziemy obliczać pierwszą kolumnę macierzy $X_1^T A X_1$. Ponieważ $\vec{x}_1$ jest pierwszą kolumną macierzy X_1, więc można wyrazić ją wzorem $X_1^T A\vec{x}_1$. Zauważmy, że

$$X_1^T A\vec{x}_1 = \lambda X_1^T \vec{x}_1 = (\lambda, 0, \ldots, 0).$$

Założenie, że A jest symetryczna implikuje, że $X_1^T A X_1$ też jest symetryczna. Wobec tego

$$X_1^T A X_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

dla pewnej symetrycznej macierzy A_1 o wymiarach $(m-1) \times (m-1)$. Macierz A_1 możemy przedstawić w postaci $X_2^T B_1 X_2$ dla pewnej przekątniowej macierzy B_1 i macierzy ortogonalnej X_2. Przyjmijmy, że

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$$

oraz

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix}$$

i obliczmy $X_3^T B X_3$. Mamy

$$X_3^T B X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & X_2^T B_1 X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} = X_1^T A X_1.$$

Wobec tego $A = X_1 X_3^T B X_3 X_1^T = (X_3 X_1^T)^T B X_3 X_1^T$. Aby zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że B jest macierzą przekątniową, a $X_3 X_1^T$ - macierzą ortogonalną. $\square$

13.8 Elipsoidy

Przyjmijmy, że

$$K_m = \{\vec{x} \in R^m : |\, \vec{x} \,| \leqslant 1\} = \{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{x} \leqslant 1\},$$

czyli K_m jest m-wymiarową kulą o promieniu 1. W podanych wzorach wektor $\vec{x}$ utożsamiamy z jednokolumnową macierzą o elementach będących współrzędnymi $\vec{x}$. Wtedy $\vec{x}^T$ jest macierzą jednowierszową, a $\vec{x}^T\vec{x}$ jest jednoelementową macierzą, której elementem jest kwadrat skalarny wektora $\vec{x}$. Dodatkowo jednoelementową macierz utożsamiamy z jej jedynym elementem. Umowy te pozwalają uważać iloczyn skalarny $\vec{x}\vec{y}$ za szczególny iloczyn macierzy $\vec{x}^T\vec{y}$.

Niech $f : R^m \to R^m$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (a_1x_1, \ldots, a_mx_m)$$

dla pewnych, dodatnich liczb $a_1, \ldots, a_m$, a $i : R^m \to R^m$ niech oznacza izometrię. Elipsoidą nazywamy obraz kuli K_m wyznaczony przez złożenie $i \circ f$ funkcji i oraz f o podanych własnościach. Zauważmy, że

$$i(f(K_m)) = \{\vec{x} \in R^m : (f^{-1}(i^{-1}(\vec{x})))^2 \leqslant 1\}.$$

Niech M będzie macierzą ortogonalną taką, że $i(\vec{x}) = M\vec{x} + i(\vec{0})$, a N niech będzie macierzą przekształcenia f, czyli

$$N = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_m \end{bmatrix}.$$

Macierz będziemy nazywać przekątniową, jeżeli jej wyrazy poza przekątną (wyrazy o różnych indeksach) są równe 0. Oczywiście N jest macierzą przekątniową z dodatnimi elementami na przekątnej. Nietrudno zauważyć, że funkcję odwrotną do i wyraża się wzorem

$$i^{-1}(\vec{x}) = M^{-1}(\vec{x} - i(\vec{0}))$$

oraz

$$N^{-1} = \begin{bmatrix} a_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2^{-1} & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_m^{-1} \end{bmatrix}.$$

Wobec tego i wobec oczywistej równości $(N^{-1})^T = N^{-1}$ mamy

$$\begin{aligned} i(f(K_m)) &= \{\vec{x} \in R^m : (N^{-1}(M^T(\vec{x} - i(\vec{0}))))^2 \leqslant 1\} \\ &= \{\vec{x} \in R^m : (\vec{x} - i(\vec{0}))^T M N^{-1} N^{-1} M^T (\vec{x} - i(\vec{0})) \leqslant 1\}. \end{aligned}$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$E(A, \vec{a}) = \{\vec{x} \in R^m : (\vec{x} - \vec{a})^T A^{-1} (\vec{x} - \vec{a}) \leqslant 1\}.$$

Mamy więc, że

$$i(f(K_m)) = E(MNNM^T, i(\vec{0})).$$

Teraz jeszcze scharakteryzujemy macierze postaci $MNNM^T$ występujące w przedstawieniu elipsoidy.

Macierz X nazywamy dodatnio określoną, jeżeli jest symetryczna (czyli spełnia równość $X = X^T$) oraz $\vec{x}^T X \vec{x} > 0$ dla dowolnego niezerowego $\vec{x}$.

Lemat 13.20 *Niech A będzie dowolną macierzą kwadratową. Następujące warunki są równoważne:*

1) *istnieją macierze ortogonalna M i przekątniowa N o wyrazach dodatnich na przekątnej, takie że $A = MNNM^T$,*

2) *jest kwadratem pewnej symetrycznej macierzy o wyznaczniku różnym od 0, czyli jest postaci X^2 dla macierzy X spełniającej $X = X^T$ i $|X| \neq 0$,*

3) *A jest macierzą Grama pewnego liniowo niezależnego układu wektorów z R^m, czyli jest macierzą postaci $X^T X$ dla pewnej macierzy X takiej, że $|X| \neq 0$,*

4) *A jest dodatnio określona.*

Dowód. Jeżeli $A = MNNM^T$ i M jest macierzą ortogonalną, to $A = (MNM^T)(MNM^T)$. Jeżeli dodatkowo założymy, że N jest macierzą przekątniową o wyrazach dodatnich na przekątnej, to $|N| \neq 0$ i $|MNM^T| = |M||N||M^T| = |N|$. Symetryczność macierzy MNM^T wynika z symetryczności macierzy przekątniowych.

Jeżeli $A = X^2$ dla symetrycznej macierzy X o niezerowym wyznaczniku, a więc spełniającej także równość $X = X^T$, to $A = X^T X$.

Macierz postaci $X^T X$ jest symetryczna, gdyż $(X^T X)^T = X^T X$ (korzystamy z wzoru $(XY)^T = Y^T X^T$). Niech $\vec{x}$ będzie niezerowym wektorem. Jeżeli wyznacznik X jest różny od 0, to wektor $X\vec{x}$ też jest różny od 0. Wobec tego

$$\vec{x}^T X^T X \vec{x} = (X\vec{x})^T X\vec{x} > 0.$$

Niech A będzie macierzą dodatnio określoną. Z twierdzenia 13.19 wynika, że istnieją macierze M i N takie, że M jest ortogonalna, a P jest przekątniowa, oraz $A = MPM^T$. Liczba $(M\vec{e}_i^T)A(M\vec{e}_i)$ jest dodatnia (na podstawie dodatniej określoności A). Obliczmy ją:

$$(M\vec{e}_i)^T A(M\vec{e}_i) = \vec{e}_i^T M^T MPM^T M\vec{e}_i = \vec{e}_i^T P\vec{e}_i = p_i,$$

gdzie p_i jest i-tego wiersza macierzy P znajdującym się na przekątnej Weźmy macierz przekątniową N, w które na przekątnej, w i-tym wierszu znajduje się $\sqrt{p_i}$. Oczywiście $P = N^2$ oraz $A = MNNM^T$. □

Wniosek 13.21 *Jeżeli i jest izometrią, f - przekształceniem liniowym z macierzą przekątniową z dodatnimi wyrazami na przekątnej, a $E(A, \vec{a})$ jest elipsoidą (z macierzą Grama A), to $i(f(E(A, \vec{a})))$ jest elipsoidą.*

Dowód. Niech M spełnia równości $i(\vec{x}) = M\vec{x} + i(\vec{0})$, a n niech będzie macierzą przekształcenia

f. Wtedy

$$
\begin{aligned}
& i(f(E(A,\vec{a}))) = \{i(f(\vec{x})) : (\vec{x}-\vec{a})^T A^{-1}(\vec{x}-\vec{a}) \leqslant 1\} \\
& = \{\vec{y} : (f^{-1}(i^{-1}(\vec{y})) - \vec{a})^T A^{-1}(f^{-1}(i^{-1}(\vec{y})) - \vec{a}) \leqslant 1\} \\
& = \{\vec{y} : (f^{-1}(M^{-1}(\vec{y} - i(\vec{0}))) - \vec{a})^T A^{-1}(f^{-1}(M^{-1}(\vec{y} - i(\vec{0}))) - \vec{a}) \leqslant 1\} \\
& = \{\vec{y} : (f^{-1}(M^{-1}(\vec{y} - i(\vec{0}) - Mf(\vec{a}))))^T A^{-1}(f^{-1}(M^{-1}(\vec{y} - i(\vec{0}) - Mf(\vec{a})))) \leqslant 1\} \\
& = \{\vec{y} : (f^{-1}(M^{-1}(\vec{y} - \vec{b})))^T A^{-1}(f^{-1}(M^{-1}(\vec{y} - \vec{b}))) \leqslant 1\} \\
& = \{\vec{y} : (\vec{y} - \vec{b})^T MN^{-1}A^{-1}N^{-1}M^{-1}(\vec{y} - \vec{b}) \leqslant 1\}. \\
& = \{\vec{y} : (\vec{y} - \vec{b})^T (MNANM^{-1})^{-1}(\vec{y} - \vec{b}) \leqslant 1\} \\
& = \{\vec{y} : (\vec{y} - \vec{b})^T B^{-1}(\vec{y} - \vec{b}) \leqslant 1\} = E(B,\vec{b})
\end{aligned}
$$

dla macierzy $B = MNANM^{-1}$ oraz wektora $\vec{b} = i(\vec{0}) + Mf(\vec{a})$. Przedstawmy macierz A w postaci X^TX dla pewnej macierzy X o wyznaczniku różnym od 0. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
& MNANM^{-1} = MNX^TXNM^{-1} = MNX^TXNM^T \\
& = (XN^TM^T)^T(XNM^T) = (XNM^T)^T(XNM^T),
\end{aligned}
$$

gdyż N jest macierzą przekątniową. Oczywiście, wyznacznik XNM^T jest różny od zera. Tezę otrzymujemy korzystając z lematu 13.20. $\square$

Zauważmy jeszcze, że jeżeli i jest funkcją identycznościową, to

$$f(K_m) = E(NN,\vec{0}) = \{(x_1,\ldots,x_m) \in R^m : \sum_{j=1}^{m} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1\}$$

oraz

$$K_m = E(I_m,\vec{0})$$

(I_m oznacza tu macierz jednostkową o wymiarach $m \times m$).

Lemat 13.22 *Objętość elipsoidy wyraża się wzorem*

$$\mathrm{Vol}_m(i(f(K_m))) = |\, N \,|\mathrm{Vol}_m(K_m) = \mathrm{Vol}_m(K_m) \cdot \prod_{j=1}^{m} a_j.$$

Dowód. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{Vol}_m(i(f(K_m))) = \mathrm{Vol}_m(I(f(K_m)) + i(\vec{0})) = \mathrm{Vol}_m(I(f(K_m))) \\
& = |\, M \,||\, N \,|\mathrm{Vol}_m(K_m) = |\, N \,|\mathrm{Vol}_m(K_m).
\end{aligned}
$$

$\square$

13.9 Minimalna elipsoida zawierająca półkulę

Będziemy szukać elipsoidy E o możliwie małej objętości, zawierającej półkulę $\{\vec{x} \in K_m : x_1 \geqslant 0\}$.

Nietrudno sformułować warunki, które elipsoida E powinna spełniać. Można przypuszczać, że E powstaje z kuli K_m przez pewne przekształcenie f zdefiniowane wyżej podanym wzorem i pewne przesunięcie wzdłuż wektora $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ (a więc, że jest elipsoidą postaci $f(K_m) + s\vec{e}_1$ dla pewnego $s \in R$), a także że wektory $\vec{e}_j \in E$ dla wszystkich $j = 1, \ldots, m$ leżą na jej brzegu. Taka elipsoida rzeczywiście istnieje i ma dostatecznie małą małą objętość. Prawdopodobnie ma objętość najmniejszą z możliwych, ale tego nie udowodnimy i nie jest to nam potrzebne.

Niech

$$f(x_1, \ldots, x_m) = (a_1 x_1, \ldots, a_m x_m),$$

a N niech będzie macierzą przekształcenia f, czyli

$$N = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_m \end{bmatrix}.$$

Interesująca nas elipsoida ma postać

$$E = E(NN, s\vec{e}_1) = \{(x_1, \ldots, x_m) \in R^m : \frac{(x_1 - s)^2}{a_1^2} + \sum_{j=2}^{m} \frac{x_i^2}{a_i^2} \leqslant 1\}.$$

Jeżeli warunek $\ldots \leqslant 1$ definiuje elipsoidę E, to warunek mówiący, że wektor $\vec{e}_j$ leży na brzegu E przyjmuje postać $\ldots = 1$. Tak więc

$$\frac{(1 - s)^2}{a_1^2} = 1$$

dla $j = 1$ oraz

$$\frac{s^2}{a_1^2} + \frac{1}{a_j^2} = 1$$

dla pozostałych j. Rozwiązując podane równania otrzymujemy

$$a_1^2 = (1 - s)^2$$

oraz

$$a_j^2 = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{a_1^2}} = \frac{a_1^2}{a_1^2 - s^2} = \frac{(1 - s)^2}{(1 - s)^2 - s^2} = \frac{(1 - s)^2}{1 - 2s}.$$

Dodatnia liczba a_j spełniająca podany wzór istnieje tylko dla $s < \frac{1}{2}$. Objętość takiej elipsoidy wyraża się wzorem

$$\mathrm{Vol}_m(E) = \mathrm{Vol}_m(K_m) \cdot \prod_{j=1}^{m} a_j = \frac{(1 - s)^m}{\sqrt{(1 - 2s)^{m-1}}} \cdot \mathrm{Vol}_m(K_m).$$

Dobierzemy s tak, aby objętość E była najmniejsza.

Rozważmy więc funkcję

$$v(s) = \frac{(1-s)^m}{\sqrt{(1-2s)^{m-1}}}$$

określoną dla $s < \frac{1}{2}$. Pochodna tej funkcji wyraża się wzorem

$$v'(s) = \frac{-m(1-s)^{m-1}\sqrt{(1-2s)^{m-1}} - \frac{-(m-1)(1-2s)^{m-2}}{\sqrt{(1-2s)^{m-1}}}(1-s)^m}{(1-2s)^{m-1}}$$

$$= \frac{(1-s)^{m-1}}{(1-2s)}[-m(1-2s) + (m-1)(1-s)].$$

Warunek $v'(s) = 0$ dla $s < \frac{1}{2}$ jest więc równoważny warunkowi

$$-m(1-2s) + (m-1)(1-s) = (m+1)s - 1 = 0.$$

Można łatwo przekonać się, że funkcja v dla $s = \frac{1}{m+1}$ osiąga mininum.

Oczywiście dla $s = \dfrac{1}{m+1}$ mamy $a_1 = \dfrac{m}{m+1}$ oraz $a_j^2 = \dfrac{m^2}{m^2-1}$ dla $j > 1$. Przyjmijmy, że

$$A_0 = \begin{bmatrix} (\frac{m}{m+1})^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{m^2}{m^2-1} & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \frac{m^2}{m^2-1} \end{bmatrix}.$$

Dalej będziemy rozważać elipsoidę

$$E_0 = E(A_0, \frac{1}{m+1}\vec{e}_1) = \{(x_1, \dots, x_m) \in R^m : \frac{(x_1 - \frac{1}{m+1})^2}{(\frac{m}{m+1})^2} + \sum_{j=2}^{m} \frac{x_i^2}{\frac{m^2}{m^2-1}} \leqslant 1\}.$$

Elipsoida E_0 zawiera półkulę $\{\vec{x} \in K_m : x_1 \geqslant 0\}$. Jeżeli bowiem $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ należy do tej półkuli, to $\sum_{j=2}^m x_j^2 \leqslant 1 - x_1^2$ oraz $x_1^2 \leqslant x_1$. Stąd

$$\frac{(x_1 - \frac{1}{m+1})^2}{(\frac{m}{m+1})^2} + \sum_{j=2}^{m} \frac{x_i^2}{\frac{m^2}{m^2-1}} \leqslant \frac{(x_1 - \frac{1}{m+1})^2}{(\frac{m}{m+1})^2} + \frac{1 - x_1^2}{\frac{m^2}{m^2-1}}$$

$$= \frac{((m+1)x_1 - 1)^2 + (m^2-1)(1-x_1^2)}{m^2} = \frac{2(m+1)(x_1^2 - x_1) + m^2}{m^2} \leqslant 1,$$

a to dowodzi podanego zawierania.

Objętość elipsoidy E_0 wyraża się wzorem

$$\mathrm{Vol}_m(E(A_0, \frac{1}{m+1}\vec{e}_1)) = \mathrm{Vol}_m(K_m) \cdot \sqrt{\frac{m^2}{(m+1)^2}\left(\frac{m^2}{m^2-1}\right)^{m-1}}$$

$$= \mathrm{Vol}_m(K_m) \cdot \left(\frac{m}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{2}} \cdot \left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Zauważmy jeszcze, że macierz A_0 wyraża się wzorem

$$A_0 = \frac{m^2}{m^2-1}(I_m - \frac{2}{m+1}\vec{e}_1\vec{e}_1^T)$$

gdzie I_m jest macierzą jednostkową o wymiarach $m \times m$.

13.10 Elipsoida zawierająca połowę innej elipsoidy

Przypuśćmy, że mamy daną elipsoidę $E(A,\vec{p}) = i(f(K_m))$ wyznaczoną przez izometrię i i przekształcenie f oraz mamy dany niezerowy wektor $\vec{c}$. Będziemy szukać możliwie małej elipsoidy zawierającej zbiór

$$\{\vec{x} \in E(A,\vec{p}) : \vec{c}^T\vec{x} \geqslant \vec{c}^T\vec{p}\}$$

(elipsoidę dzielimy płaszczyzną prostopadłą do wektora $\vec{c}$ i przechodzącą przez środek elipsoidy i bierzemy część „wskazaną" przez wektor $\vec{c}$).

Niech N będzie macierzą przekształcenia f (a więc macierzą przekątniową o dodatnich wyrazach na przekątnej), a M - macierzą taką, że $i(\vec{x}) = M\vec{x} + i(\vec{0})$. Macierz A jest więc równa $MNNM^T$, a wektor $\vec{p}$ jest równy $i(\vec{0})$. Ponadto, oznaczmy symbolem I funkcję liniową zdefiniowaną wzorem $I(\vec{x}) = M\vec{x}$. Wiemy już, że I zachowuje iloczyn skalarny oraz $i^{-1}(\vec{y}) = I^{-1}(\vec{y} - i(\vec{0}))$. Zauważmy też, że $\vec{x}^T f(\vec{y}) = f(\vec{x})^T\vec{y}$ dla dowolnych wektorów $\vec{x}$ i $\vec{y}$.

Najpierw znajdziemy płaszczyznę (a właściwie wektor do niej prostopadły), którą przekształcenie $i \circ f$ przeprowadza na płaszczyznę prostopadłą do $\vec{c}$. Szukamy więc wektora $\vec{c}_0$ takiego, że warunek $\vec{x}^T\vec{c}_0 = 0$ jest równoważny warunkowi $(i(f(\vec{x})) - i(f(\vec{0}))^T\vec{c} = 0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}&(i(f(\vec{x})) - i(f(\vec{0})))^T\vec{c} = (i(f(\vec{x})) - i(\vec{0}))^T\vec{c} = I(f(\vec{x}))^T\vec{c} = I(f(\vec{x}))^T I(I^{-1}(\vec{c}))\\ &= f(\vec{x})^T I^{-1}(\vec{c}) = \vec{x}^T f(I^{-1}(\vec{c})).\end{aligned}$$

Wobec tego możemy przyjąć, że $\vec{c}_0 = f(I^{-1}(\vec{c}))$. Dla tak zdefiniowanego wektora $\vec{c}_0$ mamy

$$i(f(\{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{c}_0 = 0\})) = \{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{c} = \vec{p}^T\vec{c}\}$$

oraz

$$i(f(\{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{c}_0 \geqslant 0\})) = \{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{c} \geqslant \vec{p}^T\vec{c}\}.$$

Weźmy wektor $\frac{1}{|\vec{c}_0|}\vec{c}_0$ i zgodnie z lematem 13.6 uzupełnijmy go do bazy ortogonalnej. Niech O oznacza macierz, której kolumnami są wektory skonstruowanej w ten sposób bazy (w pierwszej kolumnie znajduje się podany wektor). Jest oczywiste, że $OO^T = I_m$. Zdefiniujmy przekształcenie o wzorem $o(\vec{x}) = O\vec{x}$. Przekształcenie to jest liniowe i do tego jest izometrią taką, że $o(\vec{e}_1) = \frac{1}{|\vec{c}_0|}\vec{c}_0$. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}&o(\{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{e}_1 \geqslant 0\}) = \{o(\vec{x}) \in R^m : \vec{x}^T\vec{e}_1 \geqslant 0\}\\ &= \{o(\vec{x}) \in R^m : o(\vec{x})^T o(\vec{e}_1) \geqslant 0\} = \{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{c}_0 \geqslant 0\}.\end{aligned}$$

Będziemy przekształcać elipsoidę E_0 zdefiniowaną w poprzednim rozdziale, a więc elipsoidę $E_0 = E(A_0, \frac{1}{m+1}\vec{e}_1)$. Wiemy, że

$$\{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{e}_1 \geqslant 0\} \cap K_m \subseteq E_0.$$

Wobec tego

$$i(f(o(\{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{e}_1 \geqslant 0\}))) \cap i(f(o(K_m))) \subseteq i(f(o(E_0))).$$

Z przeprowadzonych już rachunków i z przyjętych własności funkcji i oraz f otrzymujemy, że

$$\{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{c} = \vec{p}^T\vec{c}\} \cap E(A, \vec{p}) \subseteq i(f(o(E_0))).$$

Z wniosku 13.21 wynika, że $i(f(o(E_0)))$ jest elipsoidą. Łatwo też daje się obliczyć objętość tej elipsoidy, gdyż

$$\frac{\mathrm{Vol}_m(i(f(o(E_0))))}{\mathrm{Vol}_m(E(A,\vec{p}))} = \frac{\mathrm{Vol}_m(i(f(o(E_0))))}{\mathrm{Vol}_m(i(f(K_m)))} = \frac{\mathrm{Vol}_m(o(E_0))}{\mathrm{Vol}_m(K_m)} = \frac{\mathrm{Vol}_m(E_0)}{\mathrm{Vol}_m(K_m)}.$$

Obliczymy jeszcze elipsoidę $i(f(o(E_0)))$. Mamy

$$\begin{aligned}
&i(f(o(E_0))) = i(f(o(E(A_0, \tfrac{1}{m+1}\vec{e}_1))))\\
&= \{i(f(o(\vec{x}))) \in R^m : (\vec{x} - \tfrac{1}{m+1}\vec{e}_1)^T A_0^{-1}(\vec{x} - \tfrac{1}{m+1}\vec{e}_1) \leqslant 1\}\\
&= \{\vec{x} \in R^m : (o^{-1}(f^{-1}(i^{-1}(\vec{x}))) - \tfrac{1}{m+1}\vec{e}_1)^T A_0^{-1}(o^{-1}(f^{-1}(i^{-1}(\vec{x}))) - \tfrac{1}{m+1}\vec{e}_1) \leqslant 1\}.
\end{aligned}$$

Przyjmijmy, że $\vec{q} = I(f(o(\vec{e}_1)))$ i zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&\vec{q} = I(f(o(\vec{e}_1))) = I(f(\tfrac{1}{|\vec{c}_0|}\vec{c}_0)) = \tfrac{1}{|\vec{c}_0|}I(f(\vec{c}_0)) = \tfrac{1}{|f(I^{-1}(\vec{c}))|}I(f(f(I^{-1}(\vec{c}))))\\
&= \tfrac{1}{|NM^{-1}\vec{c}|}MNNM^{-1}\vec{c} = \tfrac{1}{\sqrt{\vec{c}^TMNNM^T\vec{c}}}MNNM^T\vec{c} = \tfrac{1}{\sqrt{\vec{c}^TA\vec{c}}}A\vec{c}.
\end{aligned}$$

Wektor $\vec{e}_1$ można oczywiście wyrazić jako

$$\vec{e}_1 = o^{-1}(f^{-1}(I^{-1}(\vec{q}))).$$

Korzystając z wprowadzonych oznaczeń mamy, że

$$\begin{aligned}
&i(f(o(E_0)))\\
&= \{\vec{x} \in R^m : (o^{-1}(f^{-1}(I^{-1}(\vec{x} - \vec{p} - \tfrac{1}{m+1}\vec{q}))))^T A_0^{-1}(o^{-1}(f^{-1}(I^{-1}(\vec{x} - \vec{p} - \tfrac{1}{m+1}\vec{q})))) \leqslant 1\}\\
&= \{\vec{x} \in R^m : (\vec{x} - \vec{p} - \tfrac{1}{m+1}\vec{q})^T MN^{-1}OA_0^{-1}O^{-1}N^{-1}M^{-1}(\vec{x} - \vec{p} - \tfrac{1}{m+1}\vec{q}) \leqslant 1\}\\
&= \{\vec{x} \in R^m : (\vec{x} - \vec{p} - \tfrac{1}{m+1}\vec{q})^T(MNOA_0O^TNM^T)^{-1}(\vec{x} - \vec{p} - \tfrac{1}{m+1}\vec{q}) \leqslant 1\}
\end{aligned}$$

i pozostaje do wyliczenia macierz $MNOA_0O^TNM^T$:

$$\begin{aligned}
&MNOA_0O^TNM^T = MNO\tfrac{m^2}{m^2-1}(I_m - \tfrac{2}{m+1}\vec{e}_1\vec{e}_1^T)O^TNM^T\\
&= \tfrac{m^2}{m^2-1}MNO(I_m - \tfrac{2}{m+1}\vec{e}_1\vec{e}_1^T)O^TNM^T\\
&= \tfrac{m^2}{m^2-1}(MNOI_mO^TNM^T - MNO(\tfrac{2}{m+1}\vec{e}_1\vec{e}_1^T)O^TNM^T)\\
&= \tfrac{m^2}{m^2-1}(MNNM^T - \tfrac{2}{m+1}(MNO\vec{e}_1)(\vec{e}_1^TO^TNM^T))\\
&= \tfrac{m^2}{m^2-1}(A - \tfrac{2}{m+1}(MNO\vec{e}_1)(MNO\vec{e}_1)^T) = \tfrac{m^2}{m^2-1}(A - \tfrac{2}{m+1}\vec{q}\vec{q}^T).
\end{aligned}$$

Wniosek 13.23 *Przypuśćmy, że mamy daną elipsoidę $E(A,\vec{p})$, przekształcenia i oraz f o podanych wyżej własnościach i spełniających równość $E(A,\vec{p}) = i(f(K_m))$, wektor $\vec{c}$ oraz wyżej zdefiniowane przekształcenie o. Niech*

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{\vec{c}^T A\vec{c}}} A\vec{c}.$$

Wtedy

$$E(A,\vec{p}) \cap \{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^T\vec{c} \geqslant \vec{p}^T\vec{c}\} \subseteq i(f(o(E_0)))$$

oraz zachodzi wzór

$$i(f(o(E_0))) = E(\frac{m^2}{m^2-1}(A - \frac{2}{m+1}\vec{q}\vec{q}^T), \vec{p} + \frac{1}{m+1}\vec{q}).$$

□

13.11 Ważna nierówność

Krok 1. Najpierw udowodnimy, że dla dodatnich liczb rzeczywistych x zachodzi nierówność

$$\log(1+x) > \frac{x}{1+x}.$$

W tym celu bedziemy analizować funkcję zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

i określoną w zbiorze liczb nieujemnych. Oczywiście $f(0) = 0$. Pochodna funkcji f wyraża się wzorem

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - \frac{1}{1+x})' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2},$$

a więc jest dodatnia. Oznacza to, że f jest rosnąca dla nieujemnych argumentów, a więc $f(x) > f(0) = 0$.

Krok 2. Niech a będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Rozważmy funkcje zdefiniowaną wzorem

$$g(x) = (1 + \frac{a}{x})^x$$

określoną dla dodatnich liczb rzeczywistych. Obliczmy pochodną funkcji g:

$$g'(x) = (e^{x\log(1+\frac{a}{x})})' = e^{x\log(1+\frac{a}{x})} \cdot (x\log(1+\tfrac{a}{x}))'$$

$$= g(x) \cdot [\log(1+\tfrac{a}{x}) + x \cdot \tfrac{1}{1+\frac{a}{x}} \cdot (-\tfrac{a}{x^2})] = g(x) \cdot [\log(1+\tfrac{a}{x}) - \tfrac{a}{x+a}]$$

Nietrudno zauważyć, że

$$\frac{a}{x+a} = \frac{\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}}$$

Ponieważ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, korzystając z wyżej udowodnionej nierówności stwierdzamy, że pochodna funkcji g jest dodatnia i, w konsekwencji, funkcja g jest rosnąca. i dla x takich, że $1 + \frac{a}{x} \geqslant e$ zachodzi nierówność $f'(x) > 0$. $\frac{a}{e-1} \geqslant x$

Krok 3. Zauważmy, że

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{a}{x})^x = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{a}{an})^{an} = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{a}{an})^n)^a = e^a.$$

Stąd wynika, że

$$(1+\frac{a}{x})^x < e^a,$$

a w szczególności

$$(1+\frac{1}{n^2-1})^{n^2} = (1+\frac{1}{n^2-1})^{n^2-1}(1+\frac{1}{n^2-1}) < e\cdot(1+\frac{1}{n^2-1})$$

dla wszystkich $n > 1$.

Krok 4. Zauważmy, że dla liczb $n \geqslant 2$

$$\begin{aligned}&(1+\tfrac{2}{n-1})^n = (1+\tfrac{2}{n-1})^{n-1}(1+\tfrac{2}{n-1}) \geqslant (1+\tfrac{2}{2-1})^{2-1}(1+\tfrac{2}{n-1})\\ &= 3\cdot(1+\tfrac{2}{n-1}) > 3\cdot(1+\tfrac{1}{n^2-1}).\end{aligned}$$

Wobec tego dla wszystkich liczb naturalnych $n > 1$ zachodzi nierówność

$$e(1+\frac{1}{n^2-1})^{n^2} < (1+\frac{2}{n-1})^n.$$

13.12 Metoda elipsoid

Będziemy rozważać zbiór rozwiązań układu nierówności $C\vec{x} \geqslant \vec{d}$ o współczynnikach całkowitych.

Lemat 13.24 *Jeżeli zbiór $P = \{\vec{x} \in R^m : C\vec{x} \geqslant \vec{d}\}$ rozwiązań układu nierówności liniowych o współczynnikach całkowitych jest ograniczony, to*

$$P \subseteq E(\frac{1}{m\cdot 4^{\langle C,\vec{d}\rangle - m^2}} I_m, \vec{0})$$

(a więc jest zawarty w kuli o środku w początku układu współrzędnych i o promieniu $\sqrt{m}\cdot 2^{\langle C,\vec{d}\rangle - m^2}$).

Dowód. Jeżeli zbiór rozwiązań układu nierówności liniowych jest ograniczony, to jest uwypukleniem zbioru rozwiązań bazowych. Aby dowieść lemat wystarczy więc oszacować przez $\sqrt{m}\cdot 2^{\langle C,\vec{d}\rangle - m^2}$ długość rozwiązań bazowych rozważanego układu.

Niech $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ będzie rozwiązaniem bazowym układu $C\vec{x} \geqslant \vec{d}$. Z wzorów Cramera otrzymujemy, że

$$v_i = \frac{|\, B_i \,|}{|\, B \,|},$$

gdzie B jest podmacierzą macierzy głównej układu, a B_i – z dokładnością do znaku – macierzy rozważanego układu nierówności. Ponieważ elementy macierzy B są całkowite, więc $||B|| \geqslant 1$. Korzystając z tej nierówności otrzymujemy, że $|\, v_i \,| \leqslant |\,|\, B_i \,|\,|$. Natomiast z definicji rozmiaru danych otrzymujemy, że $\langle B_i \rangle \leqslant \langle C, \vec{d} \rangle$. Stąd i z lematu 7.3 wynika, że

$$|\, v_i \,| \leqslant |\,|\, B_i \,|\,| \leqslant 2^{\langle B_i \rangle - m^2} - 1 \leqslant 2^{\langle C, \vec{d} \rangle - m^2} - 1.$$

Wobec tego

$$|\, \vec{v} \,| = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} v_j^2} \leqslant \sqrt{m \cdot 4^{\langle C, \vec{d} \rangle - m^2}} = \sqrt{m} \cdot 2^{\langle C, \vec{d} \rangle - m^2}.$$

□

Lemat 13.25 *Jeżeli zbiór $P = \{\vec{x} \in R^m : C\vec{x} \geqslant \vec{d}\}$ rozwiązań układu nierówności liniowych o współczynnikach całkowitych jest ograniczony i nie jest zawarty w żadnej płaszczyźnie, to*

$$Vol_m(P) \geqslant 2^{-(m+1)\langle C \rangle + m^3}.$$

Dowód. Będziemy rozważać rozwiązania bazowe układu $C\vec{x} \geqslant \vec{d}$. Gdyby wszystkie leżałyby na jednej płaszczyźnie i płaszczyzna ta zawierałaby także uwypuklenie zbioru rozwiązań bazowych, a więc zbiór P, a to jest sprzeczne z założeniem. Gdyby układ $C\vec{x} \geqslant \vec{d}$ miał $\leqslant m$ rozwiązań bazowych, to wszystkie jego rozwiązania znalazłyby się na jednej płaszczyźnie. Weźmy więc rozwiązania bazowe $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m$ analizowanego układu nie leżące na jednej płaszczyźnie.

Zauważmy, że wektory $\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0$ są liniowo niezależne. W przeciwnym razie istniałby niezerowy wektor $\vec{c}$ ortogonalny do nich, i wszystkie rozwiązania $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m$ znajdowałyby się na płaszczyźnie przechodzącej przez $\vec{v}_0$ i ortogonalnej do $\vec{c}$.

Będziemy teraz rozważać $(m+1)$-ścian $S(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0)$. Zauważmy, że przesunięcie tego $(m+1)$-ścianu o wektor $\vec{v}_0$, a więc zbiór

$$S(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0) + \vec{v}_0,$$

jest zbiorem wypukłym zawierającym wektory $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m$, i jako taki, jest podzbiorem P. Tak więc P ma objętość przynajmniej taką, jak $S(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0)$.

Zgodnie z twierdzeniem 13.16

$$\mathrm{Vol}_m(S(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0)) = \frac{1}{m!}\mathrm{Vol}_m(R(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0)).$$

Lemat 13.9 implikuje, że

$$\mathrm{Vol}_m^2(R(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0)) = |\, \mathcal{G}_m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0) \,|.$$

Niech A będzie macierzą, której kolejnymi wierszami są wektory $\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0$. Ponieważ wiersze A są liniowo niezależne, więc wyznacznik macierzy A jest różny od 0. Na podstawie wniosku 13.3 stwierdzamy, że

$$|\, \mathcal{G}_m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m - \vec{v}_0) \,| = |\, A \,|^2.$$

Jeżeli połączymy zacytowane rezultaty, to otrzymamy, że

$$\mathrm{Vol}_m(P) \geqslant \frac{1}{m!} \cdot |\,|\, A \,|\,|.$$

Uzupełnijmy macierz A o jeden wiersz i jedną kolumnę tak, aby otrzymać

$$\begin{bmatrix} 1 & \vec{v}_0 \\ 0 & A \end{bmatrix},$$

a następnie do wszystkich wierszy otrzymanej macierzy, z wyjątkiem pierwszego, dodajmy ten właśnie wiersz. Otrzymaną w ten sposób macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & \vec{v}_0 \\ 1 & \vec{v}_1 \\ \vdots & \ddots \\ 1 & \vec{v}_m \end{bmatrix}$$

oznaczmy symbolem A'. Zastosowane w definicji A' dopisywanie wierszy oraz dodawanie wierszy nie zmienia wyznacznika macierzy. Tak więc $|\,A\,| = |\,A'\,|$ oraz

$$\mathrm{Vol}_m(P) \geqslant \frac{1}{m!} \cdot |\,|\, A' \,|\,| > 0.$$

Będziemy teraz szacować wyznacznik macierzy A'.

Każde z rozwiązań bazowych $\vec{v}_0, \ldots, \vec{v}_m$ jest jedynym rozwiązaniem pewnego podukładu układu $C\vec{x} \geqslant \vec{d}$. Przypuśćmy, że B_j jest macierzą główną układu definiującego $\vec{v}_j$, a macierze $B_{j,k}$ powstają z macierzy B_j przez zastąpienie k-tej kolumny odpowiednim fragmentem kolumny wyrazów wolnych. Zgodnie ze wzorami Cramera, k-ta współrzedna $v_{j,k}$ wektora $\vec{v}_j$ wyraża się wzorem

$$v_{j,k} = \frac{|\,B_{j,k}\,|}{|\,B_j\,|}.$$

Zauważmy jeszcze, że zdefiniowane macierze mają wymiary $m \times m$ i spełniają następujące nierówności

$$\langle B_j \rangle \leqslant \langle C \rangle \quad \text{oraz} \quad \langle B_{j,k} \rangle \leqslant \langle C, \vec{d} \rangle.$$

Korzystając z tego obliczmy wyznacznik macierzy A':

$$|\,A'\,| = \begin{vmatrix} 1 & \frac{|\,B_{0,1}\,|}{|\,B_0\,|} & \ldots & \frac{|\,B_{0,m}\,|}{|\,B_0\,|} \\ 1 & \frac{|\,B_{1,1}\,|}{|\,B_1\,|} & \ldots & \frac{|\,B_{1,m}\,|}{|\,B_1\,|} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{|\,B_{m,1}\,|}{|\,B_m\,|} & \ldots & \frac{|\,B_{m,m}\,|}{|\,B_m\,|} \end{vmatrix} = \frac{1}{|\,B_0\,| \cdot \ldots \cdot |\,B_m\,|} \begin{vmatrix} |\,B_0\,| & |\,B_{0,1}\,| & \ldots & |\,B_{0,m}\,| \\ |\,B_1\,| & |\,B_{1,1}\,| & \ldots & |\,B_{1,m}\,| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |\,B_m\,| & |\,B_{m,1}\,| & \ldots & |\,B_{m,m}\,| \end{vmatrix}$$

Ostatni wyznacznik jest różny od 0 i jest wyznacznikiem macierzy o wyrazach całkowitych. Wobec tego jego wartość bezwzględna jest większa lub równa 1. Tak więc

$$\mathrm{Vol}_m(P) \geqslant \frac{1}{m!} \cdot |\,|\,A'\,|\,| \geqslant \frac{1}{m!} \cdot \left| \frac{1}{|\,B_0\,| \cdot \ldots \cdot |\,B_m\,|} \right|.$$

Na podstawie lematu 7.3 i korzystając z nierówności $m! \leqslant 2^{m^2}$, objętość P możemy oszacować w następujący sposób:

$$\mathrm{Vol}_m(P) \geqslant \frac{1}{m!} \cdot \prod_{j=0}^{m} 2^{-\langle B_j\rangle + m^2} \geqslant \frac{2^{(m+1)(-\langle C\rangle + m^2)}}{m!} \geqslant 2^{(m+1)(-\langle C\rangle + m^2) - m^2} = 2^{-(m+1)\langle C\rangle + m^3}.$$

□

13.12.1 Podstawowa wersja algorytmu wykorzystującego metodę elipsoid

Teraz pod pojęciem elipsoidy $E = E(A, \vec{a})$ będziemy rozumieć strukturę danych złożoną z dodatnio określonej macierzy A i wektora $\vec{a}$.

Przypuśćmy, że mamy daną elipsoidę $E = E(A, \vec{p}) \subseteq R^m$ i wektor $\vec{c} \in R^m$. Wtedy symbolem $LJ(E, \vec{c}) = LJ(E(A, \vec{p}), \vec{c})$ będziemy oznaczać elipsoidę

$$E(\frac{m^2}{m^2-1}(A - \frac{2}{m+1}\vec{q}\vec{q}^{\,T}), \vec{p} + \frac{1}{m+1}\vec{q}),$$

gdzie

$$\vec{q} = \frac{1}{\sqrt{\vec{c}^T A \vec{c}}} A\vec{c}.$$

Będziemy ją nazywać elipsoidą Löwnera-Johna. Główna własność elipsoidy Löwnera-Johna wyraża się zawieraniem

$$E(A, \vec{p}) \cap \{\vec{x} \in R^m : \vec{x}^{\,T}\vec{c} \geqslant \vec{p}^{\,T}\vec{c}\} \subseteq LJ(E(A, \vec{p}), \vec{c})$$

(patrz wniosek 13.23).

Z lematów ... wynika, że

$$\mathrm{Vol}_m(LJ(E, \vec{c})) < e^{-\frac{1}{2m}} \cdot \mathrm{Vol}_m(E).$$

Przypuśćmy, że mamy dany układ $C\vec{x} \geqslant \vec{d}$ nierówności liniowych i oznaczmy symbolem P zbiór $\{\vec{x} \in R^m : C\vec{x} \geqslant \vec{d}\}$ rozwiązań tego układu. Załóżmy, że zbiór P jest ograniczony. Przyjmijmy, że

$$E_0 = E(\frac{1}{m \cdot 4^{\langle C, \vec{d}\rangle - m^2}} I_m, \vec{0}).$$

Z lematu 13.24 wynika, że $P \subseteq E_0$. Następujący algorytm nazywamy podstawą wersją metody elipsoid:

$i := 0$;

$N := 2m((2m+1)\langle C\rangle + m\langle \vec{d}\rangle - m^3)$;

$E := E_0$;

dopóki $i < N$ **wykonuj**

$\vec{p} :=$ środek elipsoidy E;

sprawdź, czy $\vec{p}$ spełnia układ $C\vec{x} \geqslant \vec{d}$ i przy okazji znajdź (jeżeli istnieje) j takie, że j-ty wiersz $\vec{c}_j$ macierzy C spełnia nierówność $\vec{c}_j\vec{p} < d_j$;

jeżeli $\vec{p}$ spełnia dany układ, to przerwij działanie algorytmu i zwróć $\vec{p}$ z informacją, że spełnia dany układ;

{zauważmy, że $P \subseteq \{\vec{x} : \vec{x}^T\vec{c}_j \geqslant d_j\} \subseteq \{\vec{x} : \vec{x}^T\vec{c}_j \geqslant \vec{p}^T\vec{c}_j\}$}

$E := LJ(E, \vec{c}_j)$;

$i := i + 1$;

{zauważmy, że $P \subseteq E$ oraz $\mathbf{Vol}_m(E) < e^{-\frac{i}{2m}} \cdot \mathbf{Vol}_m(E_0)$ };

zwróć informację, że dany układ nie ma rozwiązania.

Zauważmy, że jeżeli podstawowy algorytm metody elipsoid nie przerwał pracy po stwierdzeniu, że dany układ jest niesprzeczny, to zachodzą następujące nierówności

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}_m(P) &\leqslant \mathrm{Vol}_m(E) < e^{-\frac{N}{2m}} \cdot \mathrm{Vol}_m(E_0) \\
&\leqslant e^{-(2m+1)\langle C\rangle - m\langle\vec{d}\rangle + m^3} \cdot (\sqrt{m} \cdot 2^{\langle C,\vec{d}\rangle - m^2})^m \cdot \mathrm{Vol}_m(K_m) \\
&\leqslant e^{-(2m+1)\langle C\rangle - m\langle\vec{d}\rangle + m^3} \cdot (\sqrt{m} \cdot 2^{\langle C,\vec{d}\rangle - m^2})^m \cdot 2^m \\
&\leqslant 2^{-(2m+1)\langle C\rangle - m\langle\vec{d}\rangle + m^3} \cdot 2^{m(\langle C\rangle + \vec{d})} \cdot ((\sqrt{m})^m \cdot 2^{m-m^3}) \\
&\leqslant 2^{-(m+1)\langle C\rangle + m^3}.
\end{aligned}$$

Nierówności te są sprzeczne z nierównością z lematu 13.25. Oznacza to, że zbiór P nie może spełniać założeń tego lematu, a więc jest zawarty w pewnej płaszczyźnie.

13.12.2 Idea pozwalająca na opuszczenie założenia o pełnym wymiarze zbioru rozwiązań

Jeżeli nie wiemy, czy układ nierówności (w R^m) ma rozwiązanie, to tym bardziej nie wiemy, czy ma $m+1$ rozwiązań $v_0, \ldots, v_m$ takich, że wektory $v_1 - v_0, \ldots, v_m - v_0$ są liniowo niezależne. Mimo to uruchamiamy algorytm realizujący metodę elipsoid. Jeżeli zbiór rozwiązań P ma wymiar mniejszy od m, to podany algorytm pozwala na znalezienie rozwiązania tylko w wyjątkowych przypadkach. Wykorzystujemy go jednak do znalezienia elipsoidy E zawierającej P, i mającej objętość $\leqslant 2^{-m^2}(3n)^{-2m}$. Przypuśćmy, że v jest środkiem E, a w jest wektorem długości 1, równoległym do najkrótszej osi elipsoidy E. Rozważmy płaszczyznę przechodzącą przez $\vec{v}$ i prostopadłą do $\vec{w}$. Płaszczyzna ta „przybliża” płaszczyznę zawierającą P. Weźmy wektor $\vec{p}$ i liczbę całkowitą π, oraz taką liczbę naturalną q, że $0 < q < 2^{m^2}(3n)^{m+1}$, a także

$$|\, qw_i - p_i \,| < \frac{1}{3m} \quad \text{oraz} \quad |\, q\vec{w}^T\vec{v} - \pi \,| < \frac{1}{3m}.$$

Niech $\vec{z} \in P$ będzie wektorem o współrzędnych całkowitych. Wtedy

$$|\,\vec{p}^T\vec{z} - \pi\,| \leqslant |\,q\vec{w}^T\vec{z} - q\vec{w}^T\vec{v}\,| + \frac{1}{3m}(\sum_{i=1}^{m}|\,z_i\,| + 1) < q2^{-m^2-1}(3n)^{-m-1} + \frac{1}{3m}(m+1) \leqslant 1.$$

Ponieważ lewa strona nierówności jest liczbą całkowitą, więc jest równa 0. W przypadku, gdy wierzchołki P mają współrzędne całkowite, oznacza to, że płaszczyzna o równaniu $\vec{p}^T\vec{x} = \pi$ zawiera P. Znając równanie tej płaszczyzny możemy wyeliminować z rozważanego układu jedną zmienną i ponownie wykonać algorytm realizujący metodę elipsoid. Jeżeli współrzędne wierzchołków nie są liczbami całkowitymi, to będziemy szacować mianowniki ich współrzędnych i, mając to oszacowanie, wybierać nieco mniejsze elipsoidy tak, aby dało się powtórzyć przedstawione rozumowanie.

Spis treści