Równania liniowe
z punktu widzenia złożoności obliczeniowej

Antoni Kościelski

1 Aparat matematyczny, najprostszy algorytm

1.1 Równania liniowe

Niech R oznacza pewne ciało, a więc zbiór z działaniami, które mają takie własności, jak dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych. Zwykle będziemy przyjmować, że R jest ciałem liczb rzeczywistych, ale może to być także ciało liczb wymiernych. Ciałami są także zbiory liczb naturalnych mniejszych od ustalonej liczby pierwszej p z dodawaniem i mnożeniem modulo p.

Równaniem liniowym nazywamy równość postaci

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b,$$

gdzie $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in R$, a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są zmiennymi o wartościach ze zbioru R.

Układem równań liniowych nazywamy kilka takich równości. Tak więc równości

$$\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \tag{1}$$

tworzą układ m równań z n niewiadomymi.

Przyjmijmy, że $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R^n$ i $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i wprowadźmy oznaczenie

$$\vec{a}\vec{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n.$$

Funkcję przypoprządkowującą wektorom $\vec{a}$ i $\vec{x}$ liczbę $\vec{a}\vec{x}$ nazywamy iloczynem skalarnym.

Iloczyn skalarny jest liniową funkcją pierwszego argumentu, a więc

$$(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{x} = \vec{a_1}\vec{x} + \vec{a_2}\vec{x}$$

oraz

$$(\alpha\vec{a})\vec{x} = \alpha(\vec{a}\vec{x})$$

dla dowolnego $\alpha \in R$. Analogiczne równości zachodzą także dla drugiego argumentu. Jest to ponadto funkcja symetryczna $\vec{a}\vec{x} = \vec{x}\vec{a}$. Dla wektorów o współrzędnych rzeczywistych (lub wymiernych) iloczyn skalarny jest funkcją dodatnią w tym sensie, że $\vec{x}\vec{x} > 0$ dla dowolnego $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Posługując się iloczynem skalarnym, po przyjęciu, że $\vec{a}_i = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,n})$, układowi równań (1) możemy nadać postać

$$\begin{aligned} \vec{a}_1\vec{x} &= b_1, \\ \vec{a}_2\vec{x} &= b_2, \\ &\vdots \\ \vec{a}_m\vec{x} &= b_m. \end{aligned}$$

Macierz

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ & & \ddots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

nazywamy macierzą układu (1), a macierz

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

– jego macierzą główną.

Nietrudno zauważyć, że z definicji iloczynu macierzy wynika następująca równość:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}$$

Dalej będziemy utożsamiać jednokolumnową macierz z wektorem o odpowiednich współrzędnych. Mając układ (1) możemy zdefiniować funkcję $F : R^n \to R^m$ przyjmując

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Nietrudno zauważyć, że F jest funkcją liniową, a więc $F(\vec{x_1} + \vec{x_2}) = F(\vec{x_1}) + F(\vec{x_2})$ oraz $F(\alpha\vec{x}) = \alpha F(\vec{x})$.

Korzystając z wprowadzonego oznaczenia nasz układ równań możemy zapisać w postaci

$$F(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Będą nas interesowały dwa zadania:

- zadanie polegające na rozwiązaniu danego układu, a więc polegające na znalezieniu (lub opisaniu) zbioru $\{\vec{x} \in R^n : F(\vec{x}) = \vec{b}\}$,
- problem niesprzeczności układu, a więc pytanie, czy $F(\vec{x}) = \vec{b}$ dla pewnego $\vec{x}$.

1.2 Przestrzenie liniowe

Przestrzenią liniową nad ciałem R nazywamy zbiór, którego elementy możemy dodawać i mnożyć przez elementy ciała R tak, aby działania te miały znane, naturalne własności. Przykładem przestrzeni liniowej jest zbiór R^n z działaniami określonymi w zwykły sposób.

Jest oczywiste, że jeżeli $\vec{x} = (x_1 \ldots, x_n)$, a wektory $\vec{e_i} \in R^n$ mają wszystkie współrzędne równe 0 z wyjątkiem i-tej równej 1, to

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}. \tag{2}$$

Przestrzeń liniową, w której istnieje (skończony) zbiór wektorów $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m$ taki, że każdy element $\vec{x}$ tej przestrzeni jest postaci

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} a_i \vec{g}_i$$

dla pewnych $a_1, \ldots, a_m \in R$ nazywamy skończenie generowalną. Tak więc przestrzeń R^n jest skończenie generowalna. Zbiór $\{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_m\}$ o podanej własności nazywamy zbiorem generatorów (rozważanej przestrzeni). Minimalny zbiór generatorów (a więc taki, którego żaden właściwy podzbiór nie jest zbiorem generatorów) nazywamy bazą. Jest oczywiste, że każda skończenie generowalna przestrzeń liniowa ma bazę.

Wektory $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ są liniowo niezależne, jeżeli warunek

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \vec{w}_i = \vec{0}$$

implikuje, że $a_1 = \ldots = a_m = 0$. W elementarnej teorii przestrzeni liniowych dowodzi się, że

Lemat 1.1 *Następujące warunki są równoważne:*

1) wektory $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ są liniowo niezależne,

2) pewien wektor ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$,

3) każdy element przestrzeni liniowej ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$,

4) żaden z wektorów $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ nie jest kombinacją liniową pozostałych. □

Lemat 1.2 *Następujące warunki są równoważne:*

1) wektory $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ tworzą bazę,

2) wektory $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ są maksymalnym układem wektorów liniowo niezależnych. □

Lemat 1.3 (lemat o wymianie) *Przypuśćmy, że wektory* $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ *generują przestrzeń liniową* V*, a wektory* $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m, \vec{w} \in V$ *są liniowo niezależne. Wtedy istnieje taki indeks* i*,* $1 \leqslant i \leqslant k$*, że wektory*

$$\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1} \ldots \vec{u}_k, \vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m, \vec{w}$$

generują przestrzeń V*.*

Dowód. Z założenia o generowaniu V wynika, że

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^{m} b_j \vec{w}_j$$

dla pewnych współczynników $a_1, \ldots, a_k$ i $b_1, \ldots, b_m$. Gdyby wszystkie współczynniki $a_1, \ldots, a_k$ były równe 0, to wektor $\vec{w}$ byłby kombinacją liniową wektorów $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ i przeczyłoby to liniowej niezależnosci wektorów $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m, \vec{w}$. Niech i_0 będzie indeksem takim, że $a_{i_0} \neq 0$. Wtedy powyższy wzór można przekształcić do postaci

$$\vec{u}_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} a_{i_0}^{-1} a_i \vec{u}_i + \sum_{j=1}^{m} a_{i_0}^{-1} b_j \vec{w}_j - a_{i_0}^{-1} \vec{w}.$$

Stąd wynika, że zbiór z tezy lematu dla $i = i_0$ pozwala na wygenerowanie wszystkich elementów zbioru generatorów przestrzeni V, i dlatego sam jest zbiorem generatorów. □

Wniosek 1.4 *Jeżeli przestrzeń liniowa jest generowana przez zbiór o* n *elementach, to dowolny zbiór wektorów liniowo niezależnych jest skończony i ma najwyżej* n *elementów. W szczególności, każde dwie bazy przestrzeni skończenie generowalnej są równoliczne.* □

Wniosek 1.5 *Podprzestrzeń skończenie generowalnej przestrzeni liniowej jest skończenie generowalna.*

Dowód. Wszystkie liniowo niezależne układy wektorów podprzestrzeni V są też liniowo niezależne w całej przestrzeni, a więc mają nie więcej niż n elementów dla pewnej liczby n. Istnieje więc najliczniejszy układ liniowo niezależnych wektorów podprzestrzeni V. Jest on oczywiście maksymalnym takim układem i, na podstawie lematu 1.2, jest on bazą, a także zbiorem generatorów podprzestrzeni V. □

Lemat 1.6 *Jeżeli ciało* R *jest nieskończone i przestrzeń liniowa nad tym ciałem ma przynajmniej 2 elementy, to ma nieskończenie wiele elementów.*

Dowód. Jeżeli przestrzeń liniowa ma dwa elementy, to ma też element różny od $\vec{0}$. Wszystkie iloczyny tego elementu i dowolnego elemntu ciała tworzą podzbiór przestrzeni równoliczny z ciałem R, a więc nieskończony. □

1.3 Proste własności układów równań liniowych

Będziemy znowu rozważać układ (1). Niech F oznacza funkcję zdefiniowaną w rozdziale 1.1.

Lemat 1.7 *Wektor $\vec{0}$ jest rozwiązaniem układu $F(\vec{x}) = \vec{0}$.* □

Lemat 1.8 *Zbiór $\{\vec{x} \in R^n : F(\vec{x}) = \vec{0}\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni R^n, a więc dla dowolnych $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ z tego zbioru i dla dowolnego $\alpha \in R$, do tego zbioru należą także $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ oraz $\alpha\vec{x}_1$.* □

Lemat 1.9 *Jeżeli $\vec{x}_0$ jest rozwiązaniem równania $F(\vec{x}) = \vec{b}$, to dla dowolnego wektora $\vec{x}$ warunek $F(\vec{x}) = \vec{b}$ jest równoważny warunkowi $F(\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$.* □

Lemat 1.9 można też odczytać trochę inaczej. Dla rozwiązania $\vec{x}_0$ równania $F(\vec{x}) = \vec{b}$ będziemy rozważać funkcję $p : R^n \to R^n$ zdefiniowaną wzorem $p(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{x}_0$. Oczywiście, jest to funkcja różnowartościowa. Z lematu 1.9 wynika, że funkcja ta przekształca zbiór rozwiązań równania $F(\vec{x}) = \vec{0}$ na zbiór rozwiązań równania $F(\vec{x}) = \vec{b}$. Tak więc rozwiązania równania $F(\vec{x}) = \vec{b}$ są wyznaczone przez rozwiązania równania $F(\vec{x}) = \vec{0}$ i aby rozwiązać pierwsze z tych równań wystarczy znaleźć jedno jego rozwiązanie i rozwiązać drugie równanie.

Zauważmy także, że zbiór rozwiązań drugiego z tych równań, czyli $F(\vec{x}) = \vec{0}$, jest podprzestrzenią liniową. Tak więc w przypadku ciał nieskończonych jest jednoelementowy lub nieskończony. Jeżeli jest on nieskończony, to zadanie rozwiązania równania nie jest dobrze zdefiniowane. Ponieważ zbiór rozwiązań rozważanego układu jest podprzestrzenią liniową, i – zgodnie z wnioskiem 1.5 – jest podprzestrzenią skończenie generowalną, więc rozwiązanie takiego układu może polegać na znalezieniu układu generatorów zbioru rozwiązań.

Lemat 1.10 *Jeżeli kolumny macierzy głównej układu równań liniowych są liniowo niezależne, to układ ten ma najwyżej jedno rozwiązanie. Jeżeli układ równań liniowych ma dokładnie jedno rozwiązanie, to kolumny jego macierzy głównej są liniowo niezależne.*

Dowód. Jest to oczywista konsekwencja punktów 2) i 3) z lematu 1.1. □

1.4 Macierze wierszowo równoważne

Będziemy rozważać następujące przekształcenia macierzy:

1) zamiana miejscami dwóch wierszy macierzy,

2) mnożenie wiersza macierzy przez liczbę różną od zera,

3) zastąpienie wiersza macierzy przez sumę tego wiersza i jednego z pozostałych.

Dwie macierze są równoważne wierszowo, jeżeli jedną z nich można otrzymać z drugiej przez (wielokrotne) stosowanie wymienionych przekształceń.

Lemat 1.11 *Relacja wierszowej równoważności macierzy jest relacją równoważności.* □

Lemat 1.12 *Jeżeli macierze dwóch układów równań liniowych są wierszowo równoważne, to układy te są równoważne, a więc mają identyczne zbiory rozwiązań.* □

Wyrazem kierunkowym wiersza macierzy nazywamy jego pierwszy niezerowy wyraz. Macierz nazywamy zredukowaną, jeżeli

1) wyrazy kierunkowe wierszy macierzy są równe 1,

2) Jeżeli w pewnej kolumnie znajduje się wyraz kierunkowy, to pozostałe wyrazy tej kolumny są równe 0.

Lemat 1.13 *Każda macierz jest wierszowo równoważna macierzy zredukowanej.*

Dowód. Macierz zredukowaną, wierszowo równoważną danej można otrzymać realizując następujący algorytm, znany jako algorytm elinminacji Gaussa:

Dla każdego wiersza $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ z wyrazem kierunkowym

1) $t :=$ indeks wyrazu kierunkowego wiersza $\vec{w}$;

2) $w := \dfrac{1}{w_t} \cdot \vec{w}$;

3) **dla każdego wiersza** $\vec{v} \neq \vec{w}$**,** $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ wykonaj $\vec{v} := \vec{v} - v_t \cdot \vec{w}$. □

Przypuśćmy, że mamy macierz składającą się z m wierszy. Łatwo ustalić liczbę operacji arytmetycznych wykonywanych podczas realizacji podanego algorytmu uruchomionego z taką macierzą. Wykonanie punktu 1) nie wymaga żadnych operacji arytmetycznych. Wykonanie punktu 2) wymaga wykonania n mnożeń (właściwie dzieleń). Wykonanie podstawienia z punktu 3) wymaga n mnożeń i n dodawań. Podstawienia z punktu 3) są wykonywane $m-1$ razy. Tak więc punkty 1), 2) i 3) wymagają wykonania $m \cdot n$ mnożeń i $(m-1) \cdot n$ dodawań. Ostatecznie podczas realizacji algorytmu jest wykonywane $m^2 \cdot n$ mnożeń i $m \cdot (m-1) \cdot n$ dodawań.

Macierz nazywamy trójkątną, jeżeli jest zredukowana oraz

1) wiersze niezerowe poprzedzają wiersze zerowe,

2) wyrazy kierunkowe w kolejnych wiersza znajdują się na coraz dalszych pozycjach.

Lemat 1.14 *Macierze równoważne wierszowo mają tę samą przestrzeń wierszy.* □

Lemat 1.15 *Niezerowe wiersze macierzy zredukowanej są liniowo niezależne.* □

Algorytm eliminacji Gaussa można wykorzystać do rozwiązywania wielu zadań, a więc do rozwiązawania układu równań liniowych, badania liniowej niezależnosci układu wektorów, szukania bazy przestrzeni generowanej przez dany układ wektorów, obliczania wyznacznika, obliczania macierzy odwrotnej. Korzystając z poniższego twierdzenia posługując się tym algorytmem można odpowiadać na pytanie, czy dane układy równań liniowych mają ten sam zbiór rozwiązań.

Twierdzenie 1.16 *Każde dwie równoważne wierszowo macierze trójkątne (o określonych wymiarach) są identyczne.*

Dowód. Przypuśćmy, że mamy trójkątne, równoważne wierszowo macierze M_1 i M_2. Przestrzenie generowane przez wiersze tych macierzy są równe. Niech $\vec{w}_1$ i $\vec{w}_2$ będą ostatnimi niezerowymi wierszami tych macierzy, a t_1 i t_2 – indeksami wyrazów kierunkowych tych wierszy. Z wyboru wierszy i definicji macierzy trójkątnej wynika, że wyrazy kierunkowe pozostałych wierszy macierzy M_1 mają indeksy $< t_1$. Analogiczna własność jest prawdziwa dla M_2.

Załóżmy, że $t_1 < t_2$. Równość przestrzeni wierszy macierzy M_1 i M_2 implikuje, że $\vec{w}_2$ daje się przedstawić w postaci kombinacji liniowej niezerowych wierszy $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ macierzy M_1, np.

$$\vec{w}_2 = \sum_{i=1}^{m} a_i \vec{v}_i. \tag{3}$$

Ustalmy i i przyjmijmy, że wyraz kierunkowy wiersza $\vec{v}_i$ znajduje się na pozycji t. Oczywiście $t \leqslant t_1 < t_2$. Implikuje to, że współrzędna o numerze t wektora w_2 jest równa 0. Z definicji macierzy zredukowanej wynika, że także współrzędne o numerze t pozostałych (o numerach $\neq i$) wierszy macierzy M_1 są równe 0. Oznacza to, że współrzędna o numerze t sumy

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \vec{v}_i$$

jest równa a_i. Otrzymujemy więc, że $a_i = 0$, i w konsekwencji $\vec{w}_2 = \vec{0}$. W ten sposób otrzymaliśmy sprzeczność.

W podobny sposób sprowadzamy do sprzeczności założenie, że $t_2 < t_1$. Tak więc udowodniliśmy, że $t_1 = t_2$.

Jeszcze raz skorzystamy z równości (3), ale dodatkowo umówmy się, że $\vec{v}_m = \vec{w}_1$. Podane rozumowanie pozwala teraz uzasadnić, że dla $i < m$ zachodzi równość $a_i = 0$. Podobnie, porównując współrzędne obu stron wzoru (3) o numerach t_1 i korzystając dodatkowo z warunku, że wyrazy kierunkowe wierszy macierzy zredukowanej są równe zero otrzymujemy, że $a_m = 1$. Oznacza to, że równość (3) redukuje się do równości $\vec{w}_2 = \vec{w}_1$.

Korzystając po raz trzeci z podobnego rozumowania pokazujemy, że wiersze macierzy M_1 różne od $\vec{w}_1$ i wiersze macierzy M_2 różne od $\vec{w}_2$ generują tę samą przestrzeń. Weźmy kombinację X wierszy M_1 różnych od $\vec{w}_1$. Współrzędna o numerze t_1 tej kombinacji jest równa 0. Kombinacja X daje się przedstawić jako kombinacja wierszy macierzy M_2. Na pozycji t_2 w tej kombinacji jest współczynnik przy wektorze $\vec{w}_2$, a więc współczynnik przy $\vec{w}_2$ jest równy 0. Oznacza to, że X jest kombinacją wierszy macierzy M_2 różnych od $\vec{w}_2$.

Aby dokończyć dowód wystarczy powołać się na zasadę indukcji matematycznej. □

2 Wyznaczniki i wzory Cramera

2.1 Definicja i podstawowe własności wyznaczników

Niech A będzie macierzą kwadratową o wymiarach n na n. Przyjmujemy, że na przecięciu i-tego wiersza i j-tej kolumny macierzy A znajduje się liczba $a_{i,j}$. Tak więc

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Niech $\vec{a}_i$ oznacza i-ty wiersz macierzy A, a więc $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})$.

Będziemy definiować pojęcie wyznacznika. Zależnie od potrzeb wyznacznik macierzy A będziemy oznaczać symbolami

$$|\, A \,|, \qquad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} \quad \text{lub} \quad W(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n).$$

Przyjmujemy, że wyznacznik (czyli pewna funkcja) przyporządkowuje liczbę macierzy kwadratowej (lub układowi wierszy tej macierzy) i ma następujące własności:

1) jest funkcją liniową każdego wiersza macierzy, a więc spełnia dla pierwszego wiersza równości

   (a) $W(\alpha\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = \alpha W(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$,

   (b) $W(\vec{a}_1 + \vec{a}'_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = W(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) + W(\vec{a}'_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n)$

   oraz analogiczne równości dla pozostałych wierszy,

2) jest funkcją antysymetryczną, a więc zamiana dwóch wierszy macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika, na przykład

$$W(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) = -W(\vec{a}_2, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n),$$

3) dla macierzy jednostkowej przyjmuje wartość 1, a więc

$$W(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n) = 1.$$

Zauważmy, że wyznacznik macierzy o wyrazach z ciała charakterystyki różnej od 2 (ciała, w którym $1 + 1 \neq 2$) ma następujące własności:

1) $W(\dots, \vec{0}, \dots) = 0$,

2) $W(\ldots,\vec{a},\ldots,\vec{a},\ldots)=0$,

3) $W(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_i+\alpha\vec{a}_j,\ldots,\vec{a}_n)=W(\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_i,\ldots,\vec{a}_n)$ (wyznacznik nie zmienia się po dodaniu do wiersza macierzy wielokrotności innego wiersza $(i\neq j)$)

Sformułowana wyżej definicją wyznacznika jest aksjomatyczna, podaje tylko własności, które przysługują wyznacznikowi. Można mieć więc wątpliwości, czy taka funkcja istnieje. Można też spodziewać się istnienia wielu takich funkcji. Pokażemy, że funkcja o podanych własnościach istnieje i jest tylko jedna. Aby się o tym przekonać skorzystamy z wzoru (2) i liniowości wyznacznika względem poszczególnych wierszy. Zauważmy, że

$$\begin{aligned}
&W(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)=W(\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}\vec{e}_k,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)=\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}W(\vec{e}_k,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_n)=\\
&\sum_{k=1}^{n}a_{1,k}W(\vec{e}_k,\sum_{l=1}^{n}a_{2,l}\vec{e}_l,\ldots,\vec{a}_n)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{1,k}\cdot a_{2,l}W(\vec{e}_k,\vec{e}_l,\ldots,\vec{a}_n)=\ldots=\\
&\sum_{k_1,\ldots,k_n}a_{1,k_1}\cdot\ldots\cdot a_{n,k_n}W(\vec{e}_{k_1},\ldots,\vec{e}_{k_n})=\sum_{\sigma}a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}W(\vec{e}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{e}_{\sigma(n)})=\\
&\sum_{\sigma\in 1\text{-}1}a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}W(\vec{e}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{e}_{\sigma(n)})=\sum_{\sigma\in 1\text{-}1}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}.
\end{aligned}\tag{4}$$

Sumowanie po σ oznacza sumowanie po wszystkich funkcjach przekształcających zbiór $\{1,\ldots,n\}$ w siebie (przyjęliśmy oznaczenie $\sigma(i)=k_i$). Jeżeli σ nie jest funkcją różnowartościową, to $W(\vec{e}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{e}_{\sigma(n)})=0$. Wystarczy więc sumować po funkcjach różnowartościowych. Wartość $\mathrm{sgn}(\sigma)$ jest liczbą przestawień, które trzeba wykonać, aby ciąg $\vec{e}_{\sigma(1)},\ldots,\vec{e}_{\sigma(n)}$ przekształcić w ciąg $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$.

Z powyższych przekształceń wynika, że wartości dowolnej funkcji W mającej własności wymagane od wyznacznika mogą być obliczane zgodnie z wzorem (4), a więc są jednoznacznie określone. Istnieje więc najwyżej jedna funkcja W o wspomnianych własnościach. Z drugiej strony dowodzi się, że funkcja zdefiniowana wzorem (4) ma własności wymagane od wyznacznika. Wszystko to razem oznacza, że wyznacznik jest dobrze zdefiniowany.

Weźmy macierz A o wyrazach $a_{i,j}$ i zdefiniujmy macierz A^T o wyrazach $b_{i,j}$ przyjmując, że $b_{i,j}=a_{j,i}$. Macierz A^T nazywamy przetransponowaną macierzą A. Będziemy obliczać wyznacznik A^T. Zgodnie z wzorem (4)

$$|\,A^T\,|=\sum_{\sigma\in 1\text{-}1}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}b_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot b_{n,\sigma(n)}=\sum_{\sigma\in 1\text{-}1}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}.$$

Weźmy iloczyn $a_{\sigma(1),1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n),n}$ i uporządkujmy jego czynniki według pierwszego indeksu. Wtedy otrzymamy $a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}$. Wobec tego

$$|\,A^T\,|=\sum_{\sigma\in 1\text{-}1}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}.$$

Jeżeli zauważymy, że $\mathrm{sgn}(\sigma)=\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})$ i skorzystamy z tego, że przyporządkowanie funkcji σ funkcji do niej odwrotnej jest permutacją wszystkich możliwych funkcji różnowartościowych, to otrzymamy, że

$$|\,A^T\,|=\sum_{\sigma\in 1\text{-}1}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma^{-1})}a_{1,\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma^{-1}(n)}=\sum_{\sigma\in 1\text{-}1}(-1)^{\mathrm{sgn}(\sigma)}a_{1,\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n,\sigma(n)}=|\,A\,|.$$

Z udowodnionego właśnie wzoru $|\, A^T \,| = |\, A \,|$ wynika, że własności wyznacznika wyrażone w definicji i ich konsekwencje pozostają prawdziwe po zastąpieniu wierszy kolumnami. Na przykład, przestawienie kolumn macierzy powoduje zmianę znaku wyznacznika.

2.2 Rozwinięcia Laplace'a

Dla rosnących ciągów $\vec{x}$ oraz $\vec{y}$ liczb definiujemy macierze $A_{\vec{x};\vec{y}}$ oraz $A^{\vec{x};\vec{y}}$. Pierwsza z tych macierzy powstaje z macierzy A przez wykreślenie wierszy o indeksach z ciągu $\vec{x}$ oraz kolumn o indeksach z ciągu $\vec{y}$. Macierz $A^{\vec{x};\vec{y}}$ składa się z tych wyrazów A, które znajdują się na przecięciach wierszy o indeksach z ciągu $\vec{x}$ oraz kolumn o indeksach z ciągu $\vec{y}$. Na przykład, jeżeli

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \\ 7 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix},$$

to

$$A_{1,3;3,4} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$A^{1,3;3,4} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Weźmy znowu macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

i oznaczmy i-ty wiersz macierzy A symbolem $\vec{a}_i$. Tak więc $\vec{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$. Zdefiniujmy funkcje $W'_{i,j}$ przyjmując, że

$$W'_{i,j}(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j} & \ldots & a_{1,n} \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{i,1} & \ldots & a_{i,j-1} & 0 & a_{i,j} & \ldots & a_{i,n} \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Nietrudno zauważyć, że funkcje $W'_{i,j}$ mają wszystkie własności, których żądamy od wyznacznika. Liniowość i antysymetryczność jest oczywista. Aby wyliczyć $W'_{i,j}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ będziemy rozważać kilka przypadków. Jeżeli $i < j$, to

$$W'_{i,j}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = (-1)^{i+j} \cdot W(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{i-1}, \vec{e}_j, \vec{e}_i, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_n)$$
$$= (-1)^{i+j} \cdot (-1)^{j-i} = 1,$$

a w pozostałych przypadkach w podobny sposób dochodzimy do tego samego rezultatu. Ponieważ istnieje dokładnie jedna funkcja o własnościach wymaganych od wyznacznika, więc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & 0 & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ & \ddots & & & & \ddots & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Przypuśćmy teraz, że i-ty wiersz macierzy A zastępujemy wektorem $\vec{e}_j$ i chcemy wyliczyć wyznacznik otrzymanej macierzy, czyli $W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{a}_n)$. Zauważmy, że

$$W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{a}_n) = W(\vec{a}_1 - a_{1,j} \cdot \vec{e}_j, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{a}_n - a_{n,j} \cdot \vec{e}_j) = (-1)^{i+j} \cdot |\, A_{i;j} \,|.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\begin{gathered} W(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_n) = W(\vec{a}_1, \dots, \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot \vec{e}_j, \dots, \vec{a}_n) = \\ \textstyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_j, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot |\, A_{i;j} \,|. \end{gathered}$$

W ten sposób udowodniliśmy wzór

$$|\, A \,| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{i,j} \cdot |\, A_{i;j} \,| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot |\, A^{i;j} \,| \cdot |\, A_{i;j} \,|,$$

który nazywa się rozwinięciem Laplace'a. Udowodnimy jeszcze ogólniejszą postać rozwinięcia.

Przypuśćmy, że $i < j$. Wtedy

$$\begin{aligned} & W(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_n) = W(\vec{a}_1, \dots, \sum_{k=1}^n a_{i,k}\vec{e}_k, \dots, \sum_{l=1}^n a_{j,l}\vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) = \\ & \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{i,k}a_{j,l} W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{k \neq l} a_{i,k}a_{j,l} W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) = \\ & \sum_{k<l} a_{i,k}a_{j,l} W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) + \sum_{k>l} a_{i,k}a_{j,l} W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) = \\ & \sum_{k<l} a_{i,k}a_{j,l} W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) - \sum_{l>k} a_{i,l}a_{j,k} W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) = \\ & \sum_{k<l} (a_{i,k}a_{j,l} - a_{i,l}a_{j,k}) W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) = \\ & \sum_{k<l} |\, A^{i,j;k,l} \,| W(\vec{a}_1, \dots, \vec{e}_k, \dots, \vec{e}_l, \dots, \vec{a}_n) = \sum_{k<l} (-1)^{i+j+1} |\, A^{i,j;k,l} \,| W(\vec{a}_k, \vec{e}_l, \vec{e}_1, \dots, \vec{a}_n) = \\ & \sum_{k<l} (-1)^{i+j+1} |\, A^{i,j;k,l} \,| (-1)^{k+l+1} |\, A_{i,j;k,l} \,| = \sum_{k<l} (-1)^{i+j+k+l} |\, A^{i,j;k,l} \,||\, A_{i,j;k,l} \,|. \end{aligned}$$

W ten sposób dowiedliśmy najprostszą postać tzw. uogólnionego rozwinięcia Laplace'a

$$|\, A \,| = \sum_{k<l} (-1)^{i+j+k+l} |\, A^{i,j;k,l} \,||\, A_{i,j;k,l} \,|$$

zachodzącego dla dowolnych wierszy o numerach i, j takich, że $i < j$.

Przedstawione wzory pozwalają na „rozwijanie” wyznaczników wzdłuż wierszy. Zauważmy jeszcze, że prawdziwe są analogiczne wzory pozwalające na „rozwijanie” wyznaczników wzdłuż kolumn.

2.3 Pewien sposób obliczania wyznaczników

Lemat 2.1 *Jeżeli wyrazy macierzy A spełniają warunek $a_{i,j} = 0$ dla $j < i$, to* $|\, A \,| = a_{1,1}a_{2,2}\ldots a_{n,n}$.

Dowód. Lemat ten dowodzimy przez indukcję ze względu na rozmiar macierzy. Rozwińmy wyznacznik macierzy A wzdłuż pierwszej kolumny. Z założenia wynika, że $|\, A \,| = a_{1,1}|\, A_{1;1} \,|$. Założenie indukcyjne pozwala stwierdzić, że $|\, A_{1;1} \,| = a_{2,2}\ldots a_{n,n}$. Stąd wynika teza. □

Macierze można sprowadzać do postaci trójkątnej także nieco inaczej, stosując następujący algorytm:

Krok 1: dla każdego wiersza $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ z wyrazem kierunkowym

1) $t :=$ indeks wyrazu kierunkowego wiersza $\vec{w}$;
2) **dla każdego wiersza** $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \neq \vec{w}$**,** wykonaj
$$\vec{v} := \vec{v} - \frac{v_t}{w_t} \cdot \vec{w}.$$

Krok 2: przestawiamy wiersze tak, aby wyrazy kierunkowe kolejnych wierszy znajdowały się na coraz dalszych pozycjach;
Krok 3: dla każdego wiersza $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ z wyrazem kierunkowym

1) $t :=$ indeks wyrazu kierunkowego wiersza $\vec{w}$;
2) $\vec{w} := \dfrac{1}{w_t} \cdot \vec{w}$.

Podany algorytm można wykorzystać do obliczania wyznacznika. Aby to zrobić, wykonujemy pierwszy krok tego algorytmu, a następnie wykonujemy krok drugi zliczając jednocześnie wykonywane przestawienia. Następnie stosujemy lemat 2.1. Po ewentualnej zmianie znaku obliczonej w ten sposób liczby (znak zmieniamy, jeżeli wykonaliśmy nieparzystą liczbę przestawień) otrzymujemy wartość wyznacznika.

Analizując ten lub wcześniej podany algorytm sprowadzania macierzy do postaci trójkątnej możemy wykazać, że macierz i równoważna jej wierszowo macierz trójkątna albo mają wyznaczniki równe zero, albo te wyznaczniki są jednocześnie różne od zera. Stąd, korzystając z twierdzenia 1.16 otrzymujemy, że analogiczna własność przysługuje dowolnym macierzom równoważnym wierszowo.

2.4 Warunek $|\, A \,| \neq 0$

Lemat 2.2 *Warunek* $W(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n) = 0$ *jest równoważny liniowej zależności wektorów* $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$.

Dowód. Jeżeli wiersze $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ są liniowo zależne, to jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych. Odejmując od tego wiersza odpowiednie wielokrotności pozostałych spowodujemy jego wyzerowanie. Otrzymamy w ten sposób macierz o wyznaczniku 0. Z drugiej strony zastosowana operacja odejmowania nie zmienia wyznacznika macierzy. Wobec tego wyjściowa macierz też ma wyznacznik równy 0.

Weźmy macierz o wierszach $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ i załóżmy, że jej wyznacznik jest równy 0. Jeżeli zredukujemy tę macierz do postaci trójkątnej, to otrzymamy macierz trójkątną o wyznaczniku 0. Taka macierz ma wiersz zerowy. Oznacza to, że przestrzeń wierszy tej macierzy jest generowana przez mniej wektorów niż wynosi liczba wierszy. Sprowadzanie do postaci trójkątnej zachowuje przestrzeń wierszy. Gdyby wektory $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ były liniowo niezależne otrzymalibyśmy sprzeczność z wnioskiem 1.4. □

Wniosek 2.3 *Wyznacznik macierzy jest różny od zera wtedy i tylko wtedy, gdy kolumny tej macierzy są liniowo niezależne. Wyznacznik macierzy głównej układu równań liniowych jest różny od zera wtedy i tylko wtedy, gdy układ ten ma najwyżej jedno rozwiązanie.* □

2.5 Wzory Cramera

Rozważmy układ

$$\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \ldots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \tag{5}$$

n równań liniowych z n niewiadomymi. Załóżmy, że macierz główna

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

tego układu ma wyznacznik różny od zera. Wiemy już, że z tego założenia wynika, że układ (5) ma najwyżej jedno rozwiązanie.

Przyjmijmy, że symbol $A(\vec{b}/i)$ oznacza macierz powstającą z macierzy A przez zastąpienie i-tej kolumny tej macierzy wektorem $\vec{b}$.

Uzupełnijmy macierz układu (5) jej i-tym wierszem, a otrzymaną w ten sposób macierz oznaczmy symbolem B. Mamy więc

$$B = \begin{bmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \ldots & a_{i,n} & b_i \\ a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & b_n \end{bmatrix}.$$

Macierz B ma dwa identyczne wiersze. Jej wyznacznik jest więc równy 0. Jeżeli rozwiniemy ten wyznacznik wzdłuż pierwszego wiersza, to otrzymamy

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\cdot a_{i,j}|\, B_{1;j}\,| + (-1)^n\cdot b_i|\, B_{1;n+1}\,| = 0.$$

Zauważmy, że $B_{1;n+1} = A$, a dla $j \leqslant n$ i wektora $\vec{b}$, macierze $B_{1;j}$ oraz $A(\vec{b}/j)$ różnią się tylko położeniem kolumny z wektorem $\vec{b}$: kolumna ta znajduje się odpowiednio na j-tym miejscu w macierzy $A(\vec{b}/j)$ lub jest ostatnią kolumną macierzy $B_{1;j}$. Mamy więc, że $|\, B_{1,j}\,| = (-1)^{n-j}|\, A(\vec{b}/j)\,|$. Korzystając z tego i dzieląc powyższy wzór przez $(-1)^{n+1}$, a następnie przez $|\, A\,|$ otrzymujemy, że

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\frac{|\, A(\vec{b}/j)\,|}{|\, A\,|} = b_i.$$

Równość ta oznacza, liczby

$$x_j = \frac{|\, A(\vec{b}/j)\,|}{|\, A\,|} \tag{6}$$

dla $j = 1, \ldots, n$ spełniają i-te równanie układu (5), a ponieważ i jest dowolne, są też rozwiązaniem całego układu (5). Jest to – jak już wiadomo – jedyne rozwiązanie tego układu. Równości (6) nazywamy wzorami Cramera.

Będziemy jeszcze rozważać układ

$$\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \tag{7}$$

m równań liniowych z $n \geqslant m$ niewiadomymi. Przyjmijmy, że

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} \\ \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,m} \end{bmatrix}, \tag{8}$$

a także $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ oraz $\vec{a}_j = (a_{1,j}, \ldots, a_{m,j})$.

Wniosek 2.4 *Jeżeli macierz* (8) *ma wyznacznik różny od 0, to układ* (7) *jest równoważny układowi równań*

$$x_i = \frac{|\, A(\vec{b}/i)\,|}{|\, A\,|} - \frac{|\, A(\vec{a}_{m+1}/i)\,|}{|\, A\,|}\cdot x_{m+1} - \frac{|\, A(\vec{a}_{m+2}/i)\,|}{|\, A\,|}\cdot x_{m+2} - \ldots - \frac{|\, A(\vec{a}_n/i)\,|}{|\, A\,|}\cdot x_n$$

dla $i = 1, \ldots, m$.

Dowód. Przekształcamy układ (7) przenosząc zmienne $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ na drugą stronę równości i stosujemy wzory Cramera. □

Zauważmy, że układ podany we wniosku jest parametrycznym przedstawieniem rozwiązania układu (7).