Równania i nierówności liniowe
Lista nr 4

(Rozwiązanie tych zadań można znaleźć w notatkach z wykładu).

Zad. 1. Udowodnij, że zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\vec{x}$ warunek $A\vec{x} \geqslant 0$ implikuje, że $\vec{x} = 0$.

Zad. 2. Wektor $\vec{x}_0 \in R^n$ jest bazowym rozwiązaniem układu nierówności $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A\vec{x}_0 \geqslant \vec{b}$ oraz $\vec{x}_0$ spełnia pewien układ n liniowo niezależnych równań należących do układu $A\vec{x} = \vec{b}$. Jest oczywiste, że układ nierówności ma skończenie wiele rozwiązań bazowych. Przypuśćmy, że układ $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ ma ograniczony zbiór rozwiązań. Wtedy zbiór $\{\vec{x} \in R^n : A\vec{x} \geqslant \vec{b}\}$ jest uwypukleniem zbioru rozwiązań bazowych układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$.

Zad. 3. Niech $\vec{a}$ oznacza sumę wierszy macierzy A. Pokaż, że układ $A\vec{x} \geqslant 0$ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach ma niezerowe rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy układ $A\vec{x} \geqslant 0$ i $\vec{a}\vec{x} = 1$ ma rozwiązanie (układ, który ma rozwiązanie, nazywamy niesprzecznym).

Zad. 4. Niesprzeczny układ $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ ma nieograniczony zbiór rozwiązań wtedy i tylko wtedy, gdy układ $A\vec{x} \geqslant 0$ ma niezerowe rozwiązanie.

Zad. 5. Rozważamy niesprzeczny układ $A\vec{x} \geqslant 0$ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Przyjmijmy, że $\vec{a}$ jest sumą wierszy macierzy A. Niech $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k$ będą wszystkimi bazowymi rozwiązaniami układu $A\vec{x} \geqslant 0$ i $\vec{a}\vec{x} = 1$. Udowodnij, że wektor $\vec{x}_0$ spełnia układ $A\vec{x} \geqslant 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{x}_0 = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \vec{c}_i$ dla pewnych nieujemnych liczb γ_i. Zauważmy także, że to zadanie pozwala rozwiązać dowolny układ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$, dla którego istnieje $\vec{x}_0$ takie, że $A\vec{x}_0 = \vec{b}$.

Zad. 6. Rozważmy więc układ $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach taki, że układ $A\vec{x} = \vec{b}$ nie ma rozwiązania. Niech $\vec{a}$ będzie sumą wierszy macierzy A, a β niech będzie sumą współrzędnych wektora $\vec{b}$. Udowodnij, że jeżeli $\vec{x}_0$ jest bazowym rozwiązaniem układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$, to istnieje $z_0 > 0$ takie, że $(\vec{x}_0, z_0)$ jest bazowym rozwiązaniem układu $A\vec{x} - \vec{b}z \geqslant 0$ i $\vec{a}\vec{x} - \beta z = 1$.

Zad. 7. W sytuacji opisanej w poprzednim zadaniu zachodzi także następująca własność: jeżeli $(\vec{x}_0, z_0)$ jest bazowym rozwiązaniem układu $A\vec{x} - \vec{b}z \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ i $\vec{a}\vec{x} - \beta z = 1$ spełniającym nierówność $z_0 > 0$, to $\frac{1}{z_0} \cdot \vec{x}_0$ jest bazowym rozwiązaniem układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$.

Zad. 8. Niech $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ będzie układem z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Wektor $\vec{x}_0$ jest rozwiązaniem układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\vec{x}_0$ jest sumą wektora z uwypuklenia zbioru rozwiązań bazowych układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ i rozwiązania układu $A\vec{x} \geqslant 0$.