Równania i nierówności liniowe
Lista nr 3 (popr.)

Zad. 1. Zauważ, że następujące układy wektorów są bazami w R^4:

1) $(1,0,0,1)$, $(1,0,0,0)$, $(0,0,-1,1)$, $(0,1,0,1)$

2) $(1,0,0,1)$, $(0,0,0,1)$, $(1,-1,0,0)$, $(1,0,1,0)$

Przedstaw wektor (a,b,c,d) w każdej z podanych baz.

Zad. 2. Wektor (a,b,c,d) można utożsamiać z macierzą

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Znajdź iloczyny macierzy, z których pierwsza odpowiada wektorowi z pierwszej linijki z poprzedniego zadania, a druga – wektorowi z drugiej linijki. Przeanalizuj otrzymane wyniki.

Zad. 3. Zauważ, że korzystając z poprzednich zadań można opracować metodę mnożenia macierzy 2×2. Podaj tę metodę.

Zad. 4. (**) Pierścienie M_n macierzy o wymiarach $n \times n$ są algebrami, tzn. są przestrzeniami liniowymi z mnożeniem. Przypuśćmy, że w przestrzeni M_n istnieją bazy $X_1, \ldots, X_m$ oraz $Y_1, \ldots, Y_m$ takie, że dla wszystkich $i, j \leqslant m$ iloczyny $X_i \cdot Y_j$ są równe $a_{i,j}X_i + b_{i,j}Y_j$ dla pewnych $a_{i,j}$ oraz $b_{i,j}$. Udowodnij, że wtedy $n \leqslant 2$, a więc za pomocą metody z poprzednich zadań nie można mnożyć macierzy o wymiarach większych niż 2×2.

Zad. 5. Rozważmy fragment algorytmu mnożenia macierzy $A = [a_{i,j}]$ i $B = [b_{i,j}]$ o wymiarach $h \times h$:

1) dla wszystkich i, j, l spełniających $1 \leqslant i, j, l \leqslant h$ oblicz

   (a) $u_{i,j} := (a_{i,j} + a_{i,i}) \cdot b_{j,j}$

   (b) $v_{i,j} := a_{i,i} \cdot (b_{i,j} + b_{j,j})$

   (c) $w_{i,j} := (a_{i,j} + a_{j,j}) \cdot \sum_s b_{j,s}$

   (d) $p_{i,j,l} := a_{i,l} \cdot b_{l,j}$ dla wszystkich układów i, j, l parami różnych indeksów

   (e) $q := (\sum_s a_{s,s}) \cdot (\sum_s b_{s,s})$

2) ...

Uzupełnij ten fragment o pewną liczbę instrukcji nie zawierających operacji mnożenia tak, aby otrzymać poprawny algorytm mnożenia macierzy. Zbadaj, czy w ten sposób można zdefiniować sposób mnożenia macierzy, który pozwala ulepszyć algorytm Strassena.

Będziemy rozważać układy równości i nierówności liniowych. Każdy taki układ daje się zapisać w postaci

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n &\geqslant b_1 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n &\geqslant b_m. \end{aligned}$$

W skrócie taki układ będziemy zapisywać w postaci

$$A\vec{x} \geqslant \vec{b},$$

gdzie A jest macierzą

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ & \ddots & \\ a_{m,1} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix},$$

$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (w powyższym wzorze należałoby napisać $\vec{x}^T$ zamiast $\vec{x}$), $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$, a nierówność $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_m) \leqslant \vec{b}$ oznacza, że $a_i \leqslant b_i$ dla wszystkich $i = 1, \ldots, m$.

Zad. 6. Rozważmy dowolny układ nierówności $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$. Niech C będzie macierzą, której wiersze generują przestrzeń $\{\vec{x} \in R^n : A\vec{x} = 0\}$ (wiersze C łatwo ustalić znając parametryczne rozwiązanie równania $A\vec{x} = 0$). Udowodnij, że dla dowolnego wektora $\vec{x} \in R^n$ warunek $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ jest równoważny istnieniu $\vec{y}, \vec{z} \in R^n$ takich, że $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, $A\vec{y} \geqslant \vec{b}$, $C\vec{y} = 0$ oraz $A\vec{z} = 0$. Zauważmy, że w ten sposób rozwiązanie układu nierówności $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ zostało sprowadzone do rozwiązania tego układu uzupełnionego o układ równości $C\vec{x} = 0$ i pewnego układu równań.

Zad. 7. Zauważmy jeszcze, że ten uzupełniony układ nierówności z poprzedniego zadania ma następującą własność: jeżeli $A\vec{x} = 0$ i $C\vec{x} = 0$, to $\vec{x} = 0$ (a więc rozwiązanie dowolnego układu nierówności zostało sprowadzone do rozwiązania układu o podanej własności). Macierz M, dla której warunek $M\vec{x} = 0$ implikuje, że $\vec{x} = 0$, ma liniowo niezależne kolumny. Jeżeli macierz M ma podaną własność, to układ nierówności $M\vec{x} \geqslant \vec{b}$ będziemy określać jako układ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach.

Zad. 8. Zbiór $X \subseteq R^n$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnej liczby T prawdziwe są nierówności $|\,\vec{x}\,| \leqslant T$ dla wszystkich $\vec{x} \in X$. Udowodnij, że zbiór $\{\vec{x} \in R^n : A\vec{x} \geqslant \vec{b}\}$ nie jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy zawiera pewną półprostą, a więc gdy istnieją $\vec{x}_0, \vec{y}_0 \in R^n$ takie, że $\vec{y}_0 \neq 0$ oraz $A(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geqslant \vec{b}$ dla wszystkich liczb $t \geqslant 0$. Jest to zadanie dla ambitnych, znany mi dowód jest trudny. Może jest jednak inny sposób rozwiązania tego zadania.

Zad. 9. Przypuśćmy, że mamy dany układ nierówności $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ z macierzą o liniowo niezależnych kolumnach. Niech $\vec{a}$ bedzie sumą wierszy macierzy A. Udowodnij, że zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ i $\vec{a}\vec{x} = c$ jest ograniczony dla dowolnej liczby c. Co więcej, to samo jest prawdą dla jednego z układów $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ i $\vec{a}\vec{x} \leqslant c$ lub $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ i $\vec{a}\vec{x} \geqslant c$.

Zad. 10. Scharakteryzuj zbiory $\{t \in R : \vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geqslant b\}$, $\{t \in R : \vec{a}(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) > b\}$, $\{t \in R : A(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) \geqslant \vec{b}\}$ oraz $\{t \in R : A(\vec{x}_0 + t\vec{y}_0) > \vec{b}\}$.

Zad. 11. Udowodnij, że zbiór rozwiązań układu $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ jest ograniczony wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $\vec{x}$ warunek $A\vec{x} \geqslant 0$ implikuje, że $\vec{x} = 0$.