Równania i nierówności liniowe
Lista nr 2

1. (Zastosowania algorytmu sprowadzania macierzy do równoważnej wierszowo macierzy trójkątnej) Sprowadź macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & 4 & -2 \\ 7 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

   do wierszowo równoważnej postaci trójkątnej.

2. Zbadaj wierszową równoważność macierzy

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

4. Rozwiąż układ równań

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 0 \\ 2x + 3y - z + t &= 0 \\ 3x + 4y + 2t &= 0 \end{aligned}$$

   Znajdź bazę przestrzeni rozwiązań tego układu.

5. Podaj algorytm rozwiązujący układ równań liniowych wykorzystujący algorytm przekształcania macierzy do równoważnej wierszowo macierzy trójkątnej.

6. Zauważ, że przekształcenia elementarne macierzy zachowują przestrzeń generowaną przez wiersze macierzy. Wykorzystując ten fakt znajdź bazę przestrzeni generowanej przez wektory $(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $(1, 1, 2, 1, 3, 1)$, $(0, -1, 0, 3, 6, 2)$. Jaki jest wymiar tej przestrzeni? Czy są to wektory liniowo niezależne?

7. Przekształcenia elementarne macierzy zachowują także jej wyznacznik. Podaj algorytm wykorzystujacy ten fakt i obliczajacy wyznacznik macierzy. Jaka jest złożoność tego algorytmu.

8. Przeanalizuj złożoność naturalnego algorytmu mnożenia macierzy, wynikającego z definicji iloczynu. Spróbuj ocenić, ile operacji arytmetycznych trzeba wykonać, aby obliczyć iloczyn dwóch macierzy.

9. Spróbuj wykorzystać algorytmu sprowadzania macierzy do równoważnej wierszowo macierzy trójkątnej do mnożeniem macierzy. Aby wymnożyć macierze A i B należy rozważać macierz

$$\begin{bmatrix} -1 & & 0 & & \\ & \ddots & & & B \\ 0 & & -1 & & \\ & & & 0 & & 0 \\ & A & & & \ddots & \\ & & & 0 & & 0 \end{bmatrix}$$

10. Oblicz macierz odwrotną do macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zauważ, że definicja macierzy odwrotnej określa jej współczynniki jako rozwiązania pewnych układów równań.

11. Uwypukleniem zbioru $X \subset R^n$ nazywamy zbiór

$$\{\sum_{i=1}^{m} a_i\vec{x}_i : \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_m \in X \wedge a_1, \ldots, a_m \geqslant 0 \wedge \sum_{i=1}^{m} a_i = 1\}.$$

Podaj interpretację geometryczną uwypuklenia trzech i czterech punktów przestrzeni R^3 (w ostatnim zadaniu z listy 1 zajmowaliśmy się uwypukleniem dwóch punktów).

12. Zbiór $X \subset R^n$ jest wypukły wtedy i tylko wtedy, gdy wraz z każdą parą swoich punktów zawiera ich uwypuklenie. Pokaż, że każde uwypuklenie jest zbiorem wypukłym.

13. Pokaż, że przekrój dowolnej rodziny wypukłych podzbiorów R^n jest zbiorem wypukłym.

14. Pokaż, że zbiór rozwiązań układu nierówności liniowych jest zbiorem wypukłym.

15. Pokaż, że $\{\vec{x} \in R^n : \vec{x}\vec{x} \leqslant 1\}$ jest zbiorem wypukłym (to zadanie wymaga znajomości pewnych nierówności, które powinny być wykładane na analizie matematycznej). Znajdź inne przykłady zbiorów wypukłych istotnie różniące się od podanych.