Równania i nierówności liniowe
Lista nr1

1. Spróbuj sformalizować znany ze szkoły algorytm rozwiązywania układu n równań liniowych z n zmiennymi. Jaka jest złożoność algorytmu, który otrzymałeś?

2. Zapisz naturalny algorytm obliczania wyznacznika wynikający z definicji wyznacznika podanej na wykładzie. Jaka jest złożoność tego algorytmu?

3. (To i następne zadanie dotyczą interpretacji geometrycznej wyrażeń liniowych.) W przestrzeni (geometrycznej) wprowadzamy prostokątny układ współrzędnych o początku O. Rozważmy dwa punkty A i B o współrzędnych równych odpowiednio (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3). Rozważamy trójkąt OAB. Niech α będzie kątem tego trójkąta przy wierzchołku O. Przyjmij sobie twierdzenie cosinusów i korzystając z niego wyraź wyrażenie $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ za pomocą α.

4. Niech $\vec{a}, \vec{x} \in R^3$. Przyjmijmy, że

$$\vec{a}\vec{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3.$$

   Podaj interpretację geometryczną następujących zbiorów ($\vec{a}, \vec{a_i}$ są ustalonymi elementami R^3):

   (a) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a}\vec{x} = 0\}$,
   (b) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a}\vec{x} \geqslant 0\}$,
   (c) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a_1}\vec{x} = 0 \wedge \vec{a_2}\vec{x} = 0\}$,
   (d) $\{\vec{x} \in R^3 : \vec{a_1}\vec{x} = 0 \wedge \vec{a_2}\vec{x} = 0 \wedge \vec{a_3}\vec{x} = 0\}$.

5. Czy następujące układy wektorów są liniowo niezależne:

   (a) $(1, 6, -2, 5), (4, 0, 4, -2), (7, 2, 0, 2), (-6, 3, -3, 3)$,
   (b) $(2, 4, 3 - 1, -2, 1), (1, 1, 2, 1, 3, 1), (0, -1, 0, 3, 6, 2)$.

6. Czy wektory $(1, 2, 1, 2), (3, 2, 3, 2), (-1, -3, 0, 4), (0, 4, -1, -3)$ generują przestrzeń R^4.

7. Znajdź bazę przestrzeni generowanej przez wektory $(2, 4, 3, -1, -2, 1)$, $(1, 1, 2, 1, 3, 1)$, $(0, -1, 0, 3, 6, 2)$. Jaki jest wymiar tej przestrzeni? Czy są to wektory liniowo niezależne?

8. Rozważmy przestrzeń geometryczną, w której jest określone odległości punktów. Niech $|AB|$ oznacza odległość punktów A i B. Punkt X leży między A i B wtedy i tylko wtedy, gdy $|AB| = |AX| + |BY|$. Odcinek łączący punkty A i B definiujemy jako zbiór tych punktów, które leżą między A i B. Wprowadźmy w tej przestrzeni prostokątny układ współrzędnych. Teraz punkty przestrzeni możemy utożsamiać z elementami R^3. Udowodnij, że odcinek łączący punkty $\vec{A}$ i $\vec{B}$ jest zbiorem

$$\{a\vec{A} + b\vec{B} : a, b \geqslant 0 \wedge a + b = 1\}.$$