Egzaminacyjna lista zadań z Rachunku Lambda.

Antoni Kościelski

1 Algebry kombinatoryjne

Zad. 1.1. (a) Przyjmijmy, że napis $[M, N]$ oznacza (dla algebr kombinatoryjnych) wyrażenie $S(SI(KN)(KM))$. Oblicz $[M, N]K$ oraz $[M, N](KI)$.

(b) Jaką rolę w rachunku λ pełni term $\lambda xyz.\, zxy$?

(c) Znajdź stały term T taki, że $Txyz = zxy$.

(d) Pokaż, że algebra kombinatoryjna o przynajmniej dwóch elementach jest nieskończona.

2 Formalizacja λ-rachunku

Zad. 2.2. Czy w λ-rachunku jest prawdziwa równość $(\lambda y.(\lambda x.M))N = \lambda x.((\lambda y.M)N)$? Ewentualnie, w jakich przypadkach ta równość jest prawdziwa? Oczywiście, x i y to różne zmienne, a M i N to dowolne termy.

Zad. 2.3. Przyjmijmy, że $\omega = \lambda x.\, xx$, $A = \lambda y.\, \omega y$ oraz $M = AA$.

(a) Zdefiniuj graf $G_\beta(X)$ (X to dowolny λ-term). Jest to raczej graf z wielokrotnymi krawędziami. Jaki jest stopień wyjściowy wierzchołka odpowiadającego M w grafie $G_\beta(M)$.

(b) Narysuj graf $G_\beta(M)$. Zaznacz na rysunku ścieżkę redukcji lewostronnej termu M. Ustal także, czy term M ma postać normalną i zaznacz ją, jeżeli istnieje.

3 Obliczenia w λ-rachunku

Zad. 3.4. Pokaż, że termy $\lambda xsz.s(xsz)$ oraz $\lambda xsz.xs(sz)$ definiują (dla numerałów Churcha) operację następnika i są niezgodne.

Zad. 3.5. Przyjmijmy, że

$$P = \lambda xyz.\, x(\lambda pq.q(py))(Kz)I.$$

Pokaż, że $Pc_0 = c_0$ oraz $Pc_{n+1} = c_n$.

Zad. 3.6. Operacja poprzednika dla numerałów Churcha (patrz poprzednie zadanie) może zostać zdefiniowana na wiele sposobów. Podaj inne termy definiujące w λ-rachunku poprzednik (w pierwszym rzędzie term wykorzystujący iterację).

Zad. 3.7. Przydałyby się jeszcze jakieś zadania typu: sprawdź, czy zachodzi równość termów, znajdź postać normalną termu o ile istnieje, znajdź term definiujący proste funkcje naturalne itp.

4 Punkty stałe

Zad. 4.8. Przyjmijmy, że $f \circ g$ oznacza term $\lambda x\, f(gx)$ (definiujący złożenie f i g). Niech $X = \mathbf{\Theta}\ (f \circ g)$. Pokaż, że gX jest punktem stałym złożenia $g \circ f$.

5 Twierdzenie Churcha–Rossera i kolorowe redeksy

Zad. 5.9. Pokaż, że term z n kolorowymi redeksami może zostać zredukowany do postaci normalnej (w sensie redukcji z kolorowymi redeksami) w n krokach.

Zad. 5.10. Przypuśćmy, że mamy dwie redukcje $\rightarrow_1$ i $\rightarrow_2$, które mają własność Churcha-Rossera i które komutują (a więc dla każdych M, M_1 i M_2 spełniających $M \rightarrow_1 M_1$ i $M \rightarrow_2 M_2$ istnieje N taki, że $M_1 \rightarrow_2 N$ i $M_2 \rightarrow_1 N$). Wtedy relacja $\twoheadrightarrow$ też ma własność Churcha-Rossera. Relacja $\twoheadrightarrow$ to zwrotne i przechodnie domknięcie relacji $\rightarrow = \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$.

6 System typów prostych, własności

Zad. 6.11. Pokaż, że jeżeli term ma typ w pewnym kontekście, to każdy jego podterm też ma typ w pewnym kontekście.

Zad. 6.12. Pokaż, że jeżeli $\Gamma, x : \tau \vdash M : \sigma$ oraz $\Gamma \vdash N : \tau$, to $\Gamma \vdash M[x := N] : \sigma$.

Zad. 6.13. Pokaż, że jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$ oraz $M \rightarrow_\beta N$, to $\Gamma \vdash N : \sigma$. Jak można uogólnić to zadanie?

Zad. 6.14. Przypuśćmy, że $x \in FV(M)$ i $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau$. Wtedy dla każdej zmiennej $y \notin dom(\Gamma)$ podstawialnej za x w termie M mamy $\Gamma, y : \sigma \vdash M[x := y] : \tau$.

7 System typów prostych, związek z logiką

Zad. 7.15. Pokaż, że jeżeli $A \vdash \varphi$ (a więc typ φ ma dowód w systemie dedukcji naturalnej w logice intuicjonistycznej, korzystający z pewnego zbioru aksjomatów (założeń) A), to $\Gamma \vdash M : \varphi$ dla pewnego termu M i pewnego kontekstu Γ. Wskazówka: dla każdej formuły $\sigma \in A$ wybieramy zmienną x_σ i tworzymy kontekst $\Gamma = \{x_\sigma : \sigma \mid \sigma \in A\}$. Być może do tego kontekstu trzeba będzie dodać jeszcze inne zmienne typu $\sigma \in A$. Trzeba pamiętać o drobnej różnicy w traktowaniu napisów $\Gamma, x : \varphi$ oraz A, φ.

8 Wyliczanie typu termu

Zad. 8.16. Załóżmy, że termy M_1 i M_2 mają typy, a dokładniej $\Gamma_1 \vdash M_1 : \sigma_1$ oraz $\Gamma_2 \vdash M_2 : \sigma_2$. Pokaż, że jeżeli term $M_1 M_2$ ma typ, to to układ równań ma rozwiązanie.

Zad. 8.17. Przypuśćmy, że term M ma typ w pewnym kontekście. Pokaż, że wtedy term $\lambda x\, M$ też ma typ w pewnym kontekscie. Podaj najogólniejszy typ tego termu.

Zad. 8.18. Znajdź najbardziej ogólny typ termu CC dla $C = \lambda xyz.xzy$

Zad. 8.19. Znajdź najogólniejszy typ termu $\lambda z\, zI(\lambda z\, zIM)$

Zad. 8.20. Podaj najogólniejsze typy następujących numerałów Barendregta: $\lceil 1 \rceil$, $\lceil 2 \rceil$, $\lceil 3 \rceil$.

9 Typy polomorficzne

Zad. 9.21. Przypomnijmy na razie oznaczenia i znane wzory: $F^0(M) = M$, $F^{n+1}(M) = F(F^n(M))$.

(a) Pokaż, że $c_m\,(c_n\,x) = c_{mn}\,x$ dla wszystkich $m, n \in N$. Postaraj się nie korzystać z ekstensjonalności.

(b) Niech $F = \lambda abx.\, ba(ax)$. Udowodnij, że $F\,c_m\,c_n = c_{m^{n+1}}$.

(c) Znajdź najbardziej ogólny typ termu F. Odpowiedź uzasadnij.

(d) Niech $G = \lambda ax.\, aa(ax)$ (G reprezentuje funkcję $g(n) = n^{n+1}$). Zbadaj, czy G ma typ i znajdź najogólniejszy typ tego termu, jeżeli istnieje.

(e) Przyjmijmy, że **Nat** jest typem polimorficznym $\forall\alpha\,(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$. Pokaż (o termie G z adnotacjami) w polimorficznym systemie $\lambda 2$, że

$$\vdash \lambda a^{\mathbf{Nat}}\,\lambda\alpha\,\lambda x^{\alpha\to\alpha}.\, a(\alpha \to \alpha)\,a\alpha\,(a\alpha\,x) : \mathbf{Nat} \to \mathbf{Nat}.$$

Zad. 9.22. Zdefiniuj rachunek λ z polimorficznym systemem typów.