

Semantyka pojęcia typu prostego

Antoni Kościelski

Spis treści

1	System typów prostych wg Curry’ego	1
1.1	Podstawowe pojęcia i notacja	1
1.2	Relacja typowania à la Curry	2
2	Semantyka mnogościowa typów prostych	2
2.1	Semantyka pojęcia typu	2
2.2	Semantyka pojęcia termu	2
2.2.1	Wartościowanie zmiennych	2
2.2.2	Zgodność z deklaracjami i kontekstami	2
2.2.3	Wartość termu	3
2.2.4	Dokładniejsza definicja wartości termu	3
2.3	Semantyka relacji typowania	4
2.3.1	Twierdzenie o poprawności	4
2.3.2	Jakiś komentarz i przykład	4
3	Inna semantyka	5
3.1	Wartości termów	5
3.2	Semantyka pojęcia typu	5
3.3	Wstęp do twierdzenia o poprawności	5
4	Silna normalizowalność	6
4.1	Pojęcie silnej normalizowalności	7
4.2	Definicja interesującej nas semantyki	7
4.3	Twierdzenie o silnej normalizowalności	7
4.4	Jak dowieść założenie z lematu 3.3	8
4.5	Zbiory nasycone	8
4.6	Wnioski o nasyconości i twierdzenie o poprawności	9

1 System typów prostych wg Curry’ego

1.1 Podstawowe pojęcia i notacja

Zapis $M : \sigma$ będziemy uważać za stwierdzenie, że „term M jest typu σ ”. W takim kontekście M zwykle będzie termem rachunku λ , czasem nieco zmodyfikowanym, a σ – typem. Czasem zapis ten będzie rozumieć jako parę uporządkowaną złożoną z termu M i typu σ .

Typy będą napisami zbudowanymi ze zmiennych typowych, zbiór zmiennych typowych będziemy oznaczać symbolem $\mathbf{V}$, oraz z symbolu $\rightarrow$. Zbiór typów $\mathbf{T}$ będzie najmniejszym zbiorem zawierającym $\mathbf{V}$ i spełniającym warunek

jeżeli $\sigma, \tau \in \mathbf{T}$, to $(\sigma \rightarrow \tau) \in \mathbf{T}$.

Zapisując typy będziemy opuszczać niepotrzebne nawiasy. Przyjmujemy, że napis $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \sigma_3$ oznacza typ $(\sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \rightarrow \sigma_3))$.

Kontekstem nazywamy skończony i jednoznaczny zbiór par postaci $x : \sigma$, gdzie x jest zmienną rachunku λ , a σ – typem. Kontekst Γ musi więc spełniać warunek

jeżeli $x : \sigma_1, x : \sigma_2 \in \Gamma$, to $\sigma_1 = \sigma_2$.

Konteksty są więc funkcjami, będziemy też w odniesieniu do kontekstów stosować notacje związane z funkcjami. Tak więc $\Gamma(x) = \sigma$ oznacza, że $x : \sigma \in \Gamma$, $\text{dom}(\Gamma)$ to dziedzina Γ , czyli zbiór zmiennych występujących w Γ , $\Gamma[\text{dom}(\Gamma)]$ to zbiór wartości przyjmowanych przez Γ , albo typów występujących w Γ . Zapis $\Gamma, x : \sigma$ oznacza $\Gamma \cup \{x : \sigma\}$.

1.2 Relacja typowania à la Curry

Zdefiniujemy teraz relację $\Gamma \vdash M : \sigma$, gdzie Γ jest kontekstem, M – termem rachunku λ , a σ – typem. Jest to najmniejsza relacja mająca następujące własności:

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}, \quad \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x M : \sigma \rightarrow \tau}, \quad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau, \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}.$$

W powyższej definicji termy powinny być rozumiane jako klasy abstrakcji relacji α -konwersji.

2 Semantyka mnogościowa typów prostych

2.1 Semantyka pojęcia typu

Wartościowaniem zmiennych typowych nazywamy dowolną funkcję ξ przyporządkowującą zmiennym niepuste zbiory. Dalej będziemy rozważać ustalone wartościowanie zmiennych typowych i parametr ξ będzie pomijany. Za to zbiór przyporządkowany zmiennej α będziemy oznaczać symbolem $\llbracket \alpha \rrbracket$. Mamy więc $\llbracket \alpha \rrbracket = \xi(\alpha)$.

Funkcję $\llbracket \cdot \rrbracket$ określoną dla zmiennych typowych rozszerzamy teraz do funkcji określonej dla wszystkich typów prostych przyjmując, że

$$\llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket = \llbracket \tau \rrbracket^{\llbracket \sigma \rrbracket}.$$

Tak więc znaczeniem typu $\sigma \rightarrow \tau$ jest zbiór wszystkich funkcji całkowitych określonych na zbiorze $\llbracket \sigma \rrbracket$ i przyjmujących wartości w zbiorze $\llbracket \tau \rrbracket$.

Można myśleć, że symbol $\llbracket \tau \rrbracket$ oznacza zbiór wszystkich rzeczy typu τ .

2.2 Semantyka pojęcia termu

2.2.1 Wartościowanie zmiennych

Wartościowaniem zmiennych (występujących w λ -termach) nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze zmiennych. Często przyjmuje się, że wartościowanie jest określone dla niektórych zmiennych, na przykład dla zmiennych występujących w rozważanym termie. Może być też określone dla wszystkich zmiennych.

2.2.2 Zgodność z deklaracjami i kontekstami

Wartościowanie h jest zgodne z deklaracją $x : \sigma$, jeżeli $h(x) \in \llbracket \sigma \rrbracket$.

Wartościowanie h jest zgodne z kontekstem Γ , jeżeli jest zgodne z wszystkimi deklaracjami tego kontekstu. Wtedy możemy też powiedzieć, że wartościowanie spełnia kontekst. Fakt ten zapiszemy symbolicznie jako $h \models \Gamma$.

2.2.3 Wartość termu

Zdefiniujemy teraz wartość termu, albo jego znaczenie, czyli to, co term oznacza. Wartość termu zależy od wartościowania zmiennych, określającego wartości poszczególnych zmiennych. Wartość termu M przy wartościowaniu h będziemy oznaczać symbolem $\langle M \rangle_h$.

Potrzebne nam będzie symbol $h(x \rightarrow a)$ oznaczający funkcję, która argumentowi x przyporządkowuje a , a innym argumentom – te same wartości, co h (odpowiednio zmieniamy wartość $h(x)$ lub powiększamy dziedzinę h o x przyjmując jednocześnie, że $h(x) = a$).

Wartość termu chcielibyśmy zdefiniować indukcyjnie, przez indukcję ze względu na budowę termu, przyjmując, że

- 1) $\langle x \rangle_h = h(x)$, czyli wartością zmiennej x przy wartościowaniu h jest $h(x)$,
- 2) $\langle MN \rangle_h = \langle M \rangle_h(\langle N \rangle_h)$, a więc wartość aplikacji MN jest wartością funkcji $\langle M \rangle_h$ dla argumentu $\langle N \rangle_h$,
- 3) $\langle \lambda x.M \rangle_h(a) = \langle M \rangle_{h[x:=a]}$, to znaczy, $\langle \lambda x.M \rangle_h$ jest funkcją przyjmującą dla argumentu a wartość $\langle M \rangle_{h(x \rightarrow a)}$.

Nietrudno dostrzec, że ta definicja jest mało precyzyjna i budzi wiele wątpliwości. Oddaje jednak dość dobrze to, co chcemy zrobić. Dalej można znaleźć formalnie poprawną definicję wartości termu.

2.2.4 Dokładniejsza definicja wartości termu

Zdefiniujemy teraz relację R o pięciu współrzędnych

$$(h, \Gamma, M, \sigma, a)$$

takich, że

- 1) Γ jest kontekstem,
- 2) h jest wartościowaniem zmiennych określonym przynajmniej dla zmiennych występujących w Γ (czyli $\text{dom}(\Gamma) \subseteq \text{dom}(h)$), spełniającym Γ ,
- 3) M jest λ -termem,
- 4) σ jest typem,
- 5) oraz $a \in \llbracket \sigma \rrbracket$

Ostatni element powyższej piątki w końcu okaże się wartością termu M przy wartościowaniu h .

Niech R będzie najmniejszą relacją spełniającą następujące warunki:

- 1) jeżeli $x \in \text{dom}(\Gamma)$ oraz $h \models \Gamma$, to
$$(h, \Gamma, x, \Gamma(x), h(x)) \in R,$$
- 2) jeżeli $(h, \Gamma, M, \sigma \rightarrow \tau, f) \in R$ oraz $(h, \Gamma, N, \sigma, a) \in R$, to
$$(h, \Gamma, MN, \tau, f(a)) \in R,$$

- 3) jeżeli f jest funkcją określoną na $\llbracket \sigma \rrbracket$ taką, że dla wszystkich $a \in \llbracket \sigma \rrbracket$ zachodzi $(h(x \rightarrow a), (\Gamma, x : \sigma), M, \tau, f(a)) \in R$, to

$$(h, \Gamma, \lambda x M, \sigma \rightarrow \tau, f) \in R.$$

Lemat 2.1 *Jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$, to dla każdego wartościowania h określonego na $\text{dom}(\Gamma)$ i spełniającego Γ istnieje dokładnie jedno $a \in \llbracket \sigma \rrbracket$ takie, że do relacji R należy piątka $(h, \Gamma, M, \sigma, a)$.*

Dowód. Standardowy dowód indukcyjny przez indukcję wynikającą z definicji relacji typowania. $\square$

Powyższy lemat pozwala zdefiniować wartość termu dla wszystkich termów mających typ i wartościowań. Dokładniej, mając dane wartościowanie zmiennych h , kontekst Γ zgodny z h i term M taki, że $\Gamma \vdash M : \sigma$, możemy zdefiniować wartość $\langle M \rangle_h$ termu M przy wartościowaniu h przyjmując, że

$$\langle M \rangle_h = f \Leftrightarrow (h, \Gamma, M, \sigma, f) \in R.$$

Poprawność tej definicji jest konsekwencją przytoczonego lematu.

2.3 Semantyka relacji typowania

W tej chwili podstawowa trudność polega na rozróżnieniu dwóch sytuacji, pierwszej: gdy wykazaliśmy, że w kontekście Γ term M ma typ σ (gdy $\Gamma \vdash M : \sigma$), i drugiej, że rzeczywiście w kontekście Γ term M jest typu σ . Ta druga sytuacja wymaga doprecyzowania, ustalenia symboliki, a nawet zwrotów języka naturalnego używanych do jej przedstawienia. W tej sytuacji będziemy pisać, że $\Gamma \models M : \sigma$ i będzie to znaczyć, że dla każdego wartościowania zmiennych h zgodnego z Γ , wartość termu M przy wartościowaniu h jest rzeczywiście typu σ , a dokładniej należy do $\llbracket \sigma \rrbracket$ (czyli $\langle M \rangle_h \in \llbracket \sigma \rrbracket$).

Zapisując przytoczoną definicję w sposób sformalizowany otrzymujemy

$$\Gamma \models M : \sigma \Leftrightarrow \forall h (h \models \gamma \Rightarrow \langle M \rangle_h \in \llbracket \sigma \rrbracket).$$

2.3.1 Twierdzenie o poprawności

Mając semantykę fajnie byłoby dowieść twierdzenie o pełności, a przynajmniej o poprawności. Z twierdzenie o pełności może być problem. Za to twierdzenie o poprawności jest oczywiste. Dla semantyki mnogościowej mamy bowiem

Twierdzenie 2.2 (o poprawności) *Jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$, to $\Gamma \models M : \sigma$.*

Dowód. Jest dość oczywista konsekwencja lematu 2.1, w właściwie pewna jego wersja. $\square$

2.3.2 Jakiś komentarz i przykład

Chyba niewiele z tego wszystkiego wynika. Główny wniosek jest może taki, że znana z λ -rachunku operacja aplikacji w pewnym zakresie, po ograniczeniu się do termów mających typ prosty, rzeczywiście odpowiada operacji liczenia wartości funkcji. Tak więc funkcyjne intuicje związane z rachunkiem λ są w jakiejś mierze uzasadnione.

Z drugiej strony, pewien niepokój może budzić fakt (zresztą dość trudny do zinterpretowania), że znaczeniem termu w przedstawionej semantyce jest funkcja całkowita. Może sugerować rozbieżność między rachunkiem lambda z typami i obliczalnością.

W końcu, udało nam się w przypadku λ -rachunku zastosować pewną metodę znaną z logiki matematycznej, pozwalającą na analizowanie tego, co można dowieść w rachunku formalnym.

Przyjrzyjmy się jeszcze pewnej konkretnej semantyce mnogościowej. Wybierając wartościowanie ξ zmiennych typowych i definiując znaczenie najprostszych typów możemy przyjąć, że $\xi(\alpha) = \{\alpha\}$. Wtedy każdy typ jest reprezentowany przez jeden przedmiot, wszystkie zbiory $[\![\sigma]\!]$ są jednoelementowe, jedyny element zbioru $[\![\sigma]\!]$ można nawet utożsamiać z typem σ . Ewentualnie można przyjąć, że napis $\alpha \rightarrow \beta$ oznacza funkcję określoną tylko dla elementu α i przyjmującą dla jedynego możliwego argumentu wartość β . Wtedy można by napisać, że $[\![\sigma]\!] = \{\sigma\}$. Dla takiej semantyki i termu M takiego, że $\Gamma \vdash M : \sigma$ i dla wartościowania $h(x) = \Gamma(x)$, zgodnie z twierdzeniem o poprawności, mamy $\langle M \rangle_h = \sigma$. Krótko mówiąc, wartością termu może być jego typ.

3 Inna semantyka

3.1 Wartości termów

Tym razem wartościowania będą funkcjami przyporządkowującymi zmiennym jakieś λ -termy. Możemy zakładać, że wartościowanie na ogół zmiennej x przyporządkowuje x i jest skończenie wiele wyjątków od tej reguły.

Za wartość $\langle M \rangle_h$ termu M przy wartościowaniu h będziemy teraz uważać wynik jednoczesnego podstawienia w termie M za jego zmienne wolne termów przypisanym im przez wartościowanie h . Tak więc w zasadzie mamy

$$\langle M \rangle_h = M[x_1 := h(x_1), x_2 := h(x_2), \dots, x_n := h(x_n)],$$

przy czym $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = FV(M)$. Musimy jednak pamiętać, że nie każde podstawianie może być wykonane. W razie potrzeby zapewniamy sobie wykonalność podstawiania zastępując term M odpowiednim termem α -konwertowalnym do M .

Jak widać, zgodnie z przyjętą definicją, wartością termu jest inny term.

3.2 Semantyka pojęcia typu

Oczywiście, najpierw powinniśmy zdefiniować wartościowanie zmiennych typowych ξ i zbiory $[\![\alpha]\!] = \xi(\alpha)$ dla wszystkich zmiennych typowych α . Zostawimy sobie to jednak na później. Ustalmy jednak, że wartości $\xi(\alpha)$ będą zbiorami termów.

Zdefiniujmy teraz operację $\Rightarrow$ odpowiadającą symbolowi $\rightarrow$. Dla danych zbiorów termów A i B przyjmujemy, że

$$A \Rightarrow B = \{F \in \Lambda : \forall M \in A \ F M \in B\}.$$

Operacja ta umożliwia rozszerzenie wartościowania ξ do funkcji określonej na wszystkich typach. Wystarczy przyjąć, że

$$[\![\alpha \rightarrow \beta]\!] = [\![\alpha]\!] \Rightarrow [\![\beta]\!].$$

Na razie powinno wystarczyć nam tyle szczegółów dotyczących definicji zbiorów $[\![\sigma]\!]$. Znając te zbiory możemy wyjaśnić znaczenie relacji typowania tak, jak jest to zrobione w rozdziale 2.3.

3.3 Wstęp do twierdzenia o poprawności

Lemat 3.1 *Zachodzi następujący fakt: $\Gamma, x : \sigma \models x : \sigma$.*

Dowód. Lemat jest właściwie oczywisty. jeżeli weźmiemy h spełniające kontekst $\Gamma, x : \sigma$, to dla niego w szczególności będzie zachodzić $h(x) \in [\![\sigma]\!]$. Stąd wynika, że $\langle x \rangle_h = x[x := h(x)] = h(x) \in [\![\sigma]\!]$. $\square$

Lemat 3.2 *Jeżeli $\Gamma \models M : \sigma \rightarrow \tau$ oraz $\Gamma \models N : \sigma$, to $\Gamma \models MN : \tau$.*

Dowód. Mamy dowieść, że dla każdego wartościowania h spełniającego Γ zachodzi warunek $\langle MN \rangle_h \in [[\tau]]$.

Weźmy więc wartościowanie h spełniające Γ . Z założeń wynika, że $\langle M \rangle_h \in [[\sigma \rightarrow \tau]] = [[\sigma]] \Rightarrow [[\tau]]$ oraz $\langle N \rangle_h \in [[\sigma]]$. Definicja operacji $\Rightarrow$ pozwala stwierdzić, że $\langle MN \rangle_h = \langle M \rangle_h \langle N \rangle_h \in [[\tau]]$. $\square$

Lemat 3.3 *Przypuśćmy, że rozważana semantyka spełnia następujący warunek dla wszystkich typów σ i τ , a także dla wszystkich termów P i A :*

$$\text{jeżeli } A \in [[\sigma]] \text{ oraz } P[y := A] \in [[\tau]], \text{ to } (\lambda y P)A \in [[\tau]]. \quad (1)$$

Wtedy warunek $\Gamma, x : \sigma \models M : \tau$ pociąga za sobą, że $\Gamma \models \lambda x M : \sigma \rightarrow \tau$.

Dowód. Aby dowieść, że $\Gamma \models \lambda x M : \sigma \rightarrow \tau$ bierzemy dowolne wartościowanie h spełniające Γ .

Naszym celem jest wykazanie, że $\langle \lambda x M \rangle_h \in [[\sigma \rightarrow \tau]] = [[\sigma]] \Rightarrow [[\tau]]$. Weźmy więc dowolny term $A \in [[\sigma]]$ i spróbujmy dowieść, że $\langle \lambda x M \rangle_h A \in [[\tau]]$.

Jeżeli mamy wartościowanie h i term A , to możemy zadbać o podstawialność potrzebnych wartości h w termie $\lambda x M$, a także termu A w M , odpowiednio α -konwertując term M . W szczególności, powinno być możliwe wyliczenie wartości $\langle \lambda x M \rangle_h$ przez wykonanie odpowiedniego podstawiania.

Najpierw nieco zmienimy h i będziemy rozważać wartościowanie $h(x \rightarrow A)$ (patrz str. 3). Nietrudno zauważyć, że $h(x \rightarrow A)$ spełnia kontekst $\Gamma, x : \sigma$. Dzięki temu, z założenia, otrzymujemy, że $\langle M \rangle_{h(x \rightarrow A)} \in [[\tau]]$.

Zauważmy, że

$$\langle M \rangle_{h(x \rightarrow A)} = \langle M \rangle_h[x := A].$$

Wynika to stąd, że zmienna x nie jest wolna w termach $h(x_i)$ dla $x_i \in FV(\lambda x M)$, w przeciwnym razie te termy nie byłyby podstawialne w $\lambda x M$. W tej sytuacji liczenie wartości $\langle M \rangle_h$ nie powoduje pojawienia się nowych wystąpień x , poza istniejącymi cały czas w M .

Wobec tego, $\langle M \rangle_h[x := A] \in [[\tau]]$. Teraz założona własność semantyki implikuje, że także $(\lambda x \langle M \rangle_h)A \in [[\tau]]$. Aby w tej sytuacji zakończyć dowód wystarczy zauważyć, że $\lambda x \langle M \rangle_h = \langle \lambda x M \rangle_h$. Wynika to ze znanej własności podstawiania. $\square$

Od razu zauważmy, że lemat 3.3 nie jest precyzyjnie sformułowany, a jego dowód zawiera tylko schemat pewnego rozumowania, które z konkretnej sytuacji może znaleźć zastosowanie. Łatwo zgadnąć, że trzy powyższe lematy powinny umożliwić uzasadnienie twierdzenia o poprawności semantyki, zawierają fragmenty przyszłego indukcyjnego dowodu tego twierdzenia. Najpierw jednak musimy uzupełnić wszystkie definicje i rozumowania.

Możnaby przyjąć, że $\xi(\alpha)$ jest zbiorem wszystkich możliwych termów. W ten sposób otrzymalibyśmy semantykę, z której nie wynikałoby nic ciekawego.

4 Silna normalizowalność

Jedno z zastosowań semantyki przedstawionej w poprzednim rozdziale dotyczy silnej normalizowalności. Możemy przyjąć, że wartościowanie ξ zmiennych typowych dowolnej zmiennej α przypisuje zbiór $\xi(\alpha)$ wszystkich termów silnie normalizowalnych. Pozwala to zdefiniować semantykę i chcielibyśmy dla niej dowieść twierdzenie o poprawności. Pozwoliłoby to również dowieść twierdzenie o silnej normalizowalności.

4.1 Pojęcie silnej normalizowalności

Term M jest silnie normalizowalny, jeżeli nie można go redukować w nieskończoność, a więc jeżeli nie istnieje taki nieskończony ciąg termów, który zaczyna się termem M i każdy kolejny wyraz tego ciągu powstaje w wyniku β -redukcji wyrazu poprzedniego.

Zbiór wszystkich termów silnie normalizowalnych będziemy oznaczać symbolem SN .

Mamy dość oczywisty sposób badania, czy term jest silnie normalizowalny, wyrażony w następującym lemacie:

Lemat 4.1 *Przypuśćmy, że mamy term M , w którym jest n redeksów. Dla $i = 1, \dots, n$ niech M_i oznacza term otrzymany w wyniku redukcji i -tego redeksu w termie M . Wtedy term M jest silnie normalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla $i = 1, \dots, n$ wszystkie termy M_i są silnie normalizowalne. $\square$*

4.2 Definicja interesującej nas semantyki

Semantyka ta właściwie już została zdefiniowana.

Rozważamy wartościowanie zmiennych typowych $\xi(\alpha) = SN$ i w sposób opisany w rozdziale 3.2 wartościowanie to rozszerzamy do funkcji $[\![\cdot]\!]$ spełniającej warunek

$$[\![\sigma \rightarrow \tau]\!] = [\![\sigma]\!] \Rightarrow [\![\tau]\!].$$

Symbol $\Rightarrow$ oznacza operację zdefiniowaną wzorem

$$A \Rightarrow B = \{F \in \Lambda : \forall M \in A \ F M \in B\},$$

określoną dla zbiorów A i B złożonych z termów.

Oczywiście, zbiory $[\![\sigma]\!]$ są zbiorami termów, być może można myśleć, że są zbiorami tych termów, które mogą być typu ogólniejszego niż σ . Przyjrzyjmy się kilku przykładom.

Termy x (x to zmienna), xx , $I = \lambda x x$, $\omega = \lambda x xx$ są silnie normalizowalne, a więc należą do SN , czyli do $[\![\alpha]\!]$ dla dowolnej zmiennej typowej α . To samo dotyczy termów $xx\omega\omega$ oraz $\omega x\omega\omega$. Termy x , xx oraz I należą także do zbioru $SN \Rightarrow SN$, czyli do zbiorów postaci $[\![\alpha \rightarrow \alpha]\!]$, ale term ω do tego zbioru nie należy. Z kolei term I nie należy do zbioru $SN \Rightarrow (SN \Rightarrow SN) = [\![\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha]\!]$. Zwróćmy uwagę, że niektóre z tych termów mają typ, inne – nie mają.

Wartość termu została zdefiniowana w rozdziale 3.1. Zgodnie z tamtą definicją wartościowania zmiennym przypisują termy, a wartość termu M przy wartościowaniu h jest dana wzorem

$$\langle M \rangle_h = M[x_1 := h(x_1), x_2 := h(x_2), \dots, x_n := h(x_n)],$$

przy czym $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = FV(M)$.

Odpowiedź na pytanie, czy jest to sensowna semantyka, cały czas wymaga jeszcze sprawdzenia, czy przy przyjętych definicjach daje się dowieść twierdzenie o poprawności. Na razie spróbujemy wyobrazić sobie dowód twierdzenia o silnej normalizowalności.

4.3 Twierdzenie o silnej normalizowalności

Twierdzenia o silnej normalizowalności wymaga dwóch faktów o naszej semantyce, a mianowicie twierdzenia o poprawności i następnego lematu.

Twierdzenie 4.2 (o poprawności) *Jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$, to $\Gamma \models M : \sigma$.*

Lemat 4.3 *Dla każdego typu σ , zbiór $[\![\sigma]\!]$ jest zawarty w SN i należą do niego wszystkie zmienne, czyli $V \subseteq [\![\sigma]\!] \subseteq SN$.*

Dowody tych faktów zostaną przedstawione później, teraz wyprowadzimy z nich następujące

Twierdzenie 4.4 (o silnej normalizowalności) *Jeżeli term ma typ w pewnym kontekście, to jest on silnie normalizowalny.*

Dowód. Weźmy term M i założmy, że udało się wykazać, że w kontekście Γ ma typ σ (czyli $\Gamma \vdash M : \sigma$). Z twierdzenia o poprawności 4.2 wynika, że fakt ten jest prawdziwy w rozważanej semantyce, a więc $\Gamma \models M : \sigma$.

Niech i oznacza teraz indentyzacyjność wartościowanie zmiennych ($i(x) = x$ (przynajmniej) dla $x \in FV(M)$). Lemat 4.3 implikuje, że wartościowanie i spełnia wszystkie deklaracje, także z kontekstu Γ (a więc $i \models \Gamma$). Wobec tego,

$$M = \langle M \rangle_i \in [\![\sigma]\!].$$

Korzystając raz jeszcze z lematu 4.3 otrzymujemy, że M jest termem silnie normalizowalnym, gdyż $M \in [\![\sigma]\!] \subseteq SN$. $\square$

4.4 Jak dowieść założenie z lematu 3.3

Szkic dowodu twierdzenia o poprawności jest już nam znany z rozdziału 3.3. Aby ten szkic przekształcić w poprawny dowód w pierwszym rzędzie należy jakoś dowieść własność (1), czyli jedno z założeń lematu 3.3. Podejmiemy teraz próbę przeprowadzenia najzwyczajszego dowodu tej własności. Można się spodziewać, że w dowodzie zostanie wykorzystana indukcja ze względu na budowę typu τ i jakoś sobie poradzimy z pierwszym krokiem dowodu.

Aby przeprowadzić dowód drugiego kroku dowodu indukcyjnego, powinniśmy wziąć dwa termy A i P , założyć, że $P[x := A] \in [\![\tau_1]\!] \Rightarrow [\![\tau_2]\!]$ i spróbować wykazać, że $(\lambda x P)A \in [\![\tau_1]\!] \Rightarrow [\![\tau_2]\!]$. W tym celu zapewne skorzystamy z definicji operacji $\Rightarrow$, weźmiemy więc term B i będziemy dowodzić, że

$$\text{jeżeli } P[y := A]B \in [\![\tau_2]\!], \text{ to } (\lambda y P)AB \in [\![\tau_2]\!].$$

Ta własność przypomina założenie indukcyjne, ale jednak ma bardziej złożoną postać. Łatwo też zauważyć, że gdyby τ_2 był typem funkcyjnym, to próba dowodu powyższej własności wymagałaby odwołania się do implikacji

$$\text{jeżeli } P[y := A]BC \in [\![\tau_3]\!], \text{ to } (\lambda y P)ABC \in [\![\tau_3]\!]$$

dla pewnego C . Wszystko to wskazuje na konieczność skomplikowania własności potrzebnej nam w dowodzie lematu 3.3.

W dowodzie twierdzenia o silnej normalizowalności korzystaliśmy też z faktu, że zmienne należą do zbiorów reprezentujących typy (patrz lemat 4.3). Nietrudno zauważyć, że aby wykazać, że $x \in [\![\tau_1]\!] \Rightarrow [\![\tau_2]\!]$, powinniśmy wiedzieć, że $xA \in [\![\tau_2]\!]$, a to z kolei wymaga własności $xAB \in [\![\tau_3]\!]$ itd.

4.5 Zbiory nasyczone

Rozważania z poprzedniego rozdziału uzasadniają wprowadzenie zbiorów nasyczonych.

Zbiór termów $X \subseteq SN$ nazywamy nasyczonym, jeżeli

- 1) do X należą termy postaci $x M_1 \dots M_n$ dla dowolnej zmiennej x , dowolnego $n \geq 0$ i dowolnych termów $M_1, \dots, M_n \in SN$, w szczególności X zawiera wszystkie zmienne λ -rachunku,
- 2) z tego, że $M_0[x := M_1]M_2 \dots M_n \in X$ wynika, $\mathbf{0}(\lambda x M_0)M_1M_2 \dots M_n \in X$, dla dowolnego $n \geq 1$ i dowolnych termów $M_1, \dots, M_n \in SN$.

Zbiory nasycone mają dwie ważne własności:

Lemat 4.5 *Zbiór SN termów silnie normalizowalnych jest nasycony.*

Dowód.

□

Lemat 4.6 *Jeżeli A i B są zbiorami nasyconymi, to $A \Rightarrow B$ też jest zbiorem nasyconym.*

Dowód.

□

4.6 Wnioski o nasyconości i twierdzenie o poprawności

Wniosek 4.7 *Dla każdego typu σ zbiór $[[\sigma]]$ jest nasycony.*

Dowód. Jest to oczywisty wniosek z dwóch powyższych lematów. □

Wniosek 4.8 (właściwie lemat 4.3) *Dla każdego typu σ , zbiór $[[\sigma]]$ jest zawarty w SN i należą do niego wszystkie zmienne, czyli $V \subseteq [[\sigma]] \subseteq SN$.*

Dowód. Są to dwie oczywiste własności zbiorów nasyconych. □

Wniosek 4.9 (krótka wersja lematu 3.3) *Warunek $\Gamma, x : \sigma \models M : \tau$ pociąga za sobą, że $\Gamma \models \lambda x M : \sigma \rightarrow \tau$.*

Dowód. Wystarczy, że uzupełnimy dowód lematu 3.3 o wyprowadzenie własności (1) stwierdzającej, że dla wszystkich typów σ i τ , a także dla wszystkich termów P i A

$$\text{jeżeli } A \in [[\sigma]] \text{ oraz } P[y := A] \in [[\tau]], \text{ to } (\lambda y P)A \in [[\tau]].$$

Weźmy więc typy σ i τ , termy P oraz A i załóżmy, że $A \in [[\sigma]]$. Na mocy wniosku 4.8 term A jest silnie normalizowalny. W tej sytuacji implikacja

$$\text{jeżeli } P[y := A] \in [[\tau]], \text{ to } (\lambda y P)A \in [[\tau]].$$

jest częścią definicji zbioru nasyconego i wynika z wniosku 4.7. □

Twierdzenie 4.10 (o poprawności 4.2) *Jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$, to $\Gamma \models M : \sigma$.*

Dowód. Twierdzenie to dowodzimy przez indukcję ze względu na budowę termu M . Kolejne kroki dowodu wynikają z lematów 3.1 i 3.2 oraz z wniosku 4.9. □

I tak uzupełniliśmy wszystkie szczegóły w dowodzie twierdzenia o silnej normalizowalności.