Lista zadań nr 11 z rachunku lambda
27 maja 2019

Na ćwiczeniach będziemy robić zadania z wcześniejszych list. Teraz tylko kilka zadań – ciekawostek. Może ich treść zostanie wykorzystana na wykładzie w formie przykładów.

Zadania o hedrze lernejskiej. To takie miłe zwierzątko, które ma wiele głów. Co ciekawsze, jeżeli utnie się mu głowę, to pojawiają się nowe. Dokładniej, to stworzenie informatycy powinni sobie wyobrażać jako drzewo skończone. Korzeń to miejsce z którego wyrastają skomplikowane szyje zakończone głowami. W sensie informatycznym, głowy to liście. Pozostałe wezły drzewa to miejsca, w których te skomplikowane szyje mogą się rozgałęziać. Niektórzy z nas nie lubią hydr i próbują uciąć im wszystkie głowy. Jednym cięciem miecza możemy hydrę pozbawić jednej głowy. Dla informatyków ucięcie głowy hydrze jest tak proste, jak pozbawienie drzewa jednego liścia. Jeżeli ucięliśmy hydrze głowę wyrastającą bezpośrednio z tułowia (usuwamy liść wyrastający z korzenia) to nic więcej się nie dzieje, a hydra tylko jest zaniepokojona. W przeciwnym razie skupia się na węźle drzewa poprzedzającym ten, z którego wyrastała głowa odcięta (na ojcu okaleczonego węzła). Ustala, jak wygląda uszkodzone poddrzewo wyrastające z tego węzła i powoduje, że z tego węzła wyrasta cały las takich właśnie poddrzew. Dokładniej, z tego węzła wyrasta tyle nowych podrzew opisanego kształtu, ile głów hydra straciła dotychchczas.

Zad. 1. Czy hydrę lernejską można pozbawić wszystkich głów? (W jakiś być może specjalny sposób.)

Zad. 2. Czy hydrę lernejską można pozbawić wszystkich głów tnąc je jakkolwiek, bez planu?

Zad. 3. Czy da się obliczyć, ile głów trzeba obciąć konkretnej hydrze lernejskiej, aby pozbawić ją wszystkich.

Inne zadanie tego typu. Będziemy zajmować się wyrażenia z dwoma działaniami binarnymi, które będziemy interpretować jako dodawanie i potęgowanie liczb naturalnych. Niektóre takie wyrażenia będziemy nazywać przestawieniami liczby m przy podstawie p. Takie przedstawienie dość łatwo zdefiniować rekurencyjnie: znajdujemy zwykłe, pozycyjne przedstawienie m, a następnie przedstawienia nowego rodzaju potrzebnych wykładników potęg i mamy

$$m = c_n{\cdot}p^n + c_{n-1}{\cdot}p^{n-1} + \ldots + c_1{\cdot}p + c_0 = c_n{\cdot}p^{W_p(n)} + c_{n-1}{\cdot}p^{W_p(n-1)} + \ldots + c_1{\cdot}p + c_0 = W_p(m)$$

(mnożenie przez współczynniki c_i możemy zastąpić sumowaniem potęg). Niech teraz $g : N^2 \to N$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$g(p,0) = 0 \;\text{ oraz }\; g(p,m) = W_p(m)[p := p+1] - 1$$

dla $m \neq 0$ (aby wyliczyć $g(p,m)$ znajdujemy opisane przedstawienie $W_p(m)$, w tym wzorze p zastępujemy przez $p+1$ i liczymy wartość tego wyrażenia, wynikiem obliczeń jest wyliczona wartość pomniejszona o 1). przyjmijmy jeszcze, że

$$f(m,0) = m \;\text{ oraz }\; f(m,k+1) = g(k+2, f(m,k)).$$

Zad. 4. Czy funkcja f przyjmuje wartość 0 i dla jakich argumentów? Jaka jest dziedzina funkcji h definiowanej wzorem $h(m) = \mu k(f(m,k) = 0)$. Czy jest to funkcja rekurencyjna.