Lista zadań nr 10 z rachunku lambda
20 maja 2019

Zad. 1. Zamiast $\emptyset \vdash M : \sigma$ (czyli „z pustego kontekstu można wyprowadzić, że M jest typu σ") możemy też napisać $\vdash M : \sigma$ („można wykazać, że M jest typu σ"), a nawet $M : \sigma$ (po prostu „M jest typu σ"). Wyprowadzenie stwierdzenia, to drzewo lub ciąg innych stwierdzeń świadczący o jego prawdziwości.

1) Wyprowadź stwierdzenia $SK : (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha)$ oraz $KI : \beta \to (\alpha \to \alpha)$,
2) Pokaż, że nie daje się wyprowadzić, że $SK : \alpha \to \beta \to \beta$.
3) Znajdź wspólny β-redukt termów SK i KI. Jaki jest najbardziej ogólny typ tego termu.

Zad. 2. Znajdź (o ile istnieją) typy różnych termów, na przykład $\lambda xypq.xp(ypq)$ $\lambda xyz.x(yz)$, $\lambda xy.yx$, c_n, $c_n K$.

Zad. 3. Przypomnijmy, że para (Γ, σ) złożona z kontekstu i typu nazywa się główną (najbardziej ogólną) parą dla termu M, jeżeli $\Gamma \vdash M : \sigma$, $dom(\Gamma) = FV(M)$ oraz gdy dla każdej innej pary (Γ', σ') takiej, że $\Gamma' \vdash M : \sigma'$ istnieje podstawienie S takie, że $S(\Gamma) \subseteq \Gamma'$ i $\sigma' = S(\sigma)$ (S to funkcja przyporządkowująca typy zmiennym typowym $S(\sigma)$ to typ otrzymany przez zastąpienie zmiennych w σ odpowiadającymi im typami (równolegle), $S(\Gamma)$ otrzymujemy przez analogiczne przekształcenie wszystkich typów występujących w Γ.

Przypuśćmy, że (Γ_1, σ_1) oraz (Γ_2, σ_2) są odpowiednio parami głównymi dla termów M_1 i M_2 takimi, że każda zmienna typowa występuje w najwyżej jednej parze. Pokaż, że jeżeli S jest najbardziej ogólnym unifikatorem układu równań

$$\{\Gamma_1(x) = \Gamma_2(x) : x \in FV(M_1) \cap FV(M_2)\} \cup \{\sigma_1 = \sigma_2 \to \alpha\},$$

to $(S(\Gamma_1) \cup S(\Gamma_2), S(\alpha))$ jest główną parą dla termu $M_1 M_2$.

Zad. 4. Znajdź najbardziej ogólne typy (jeżeli istnieją) następujących termów

1) $\lambda xy.xyy$, SII, $\lambda xy.y(\lambda z.z(yx))$,
2) AA, AB, BA, CC, AAA, ABA, BAB, CCC, gdzie $A = \lambda xyz.x(yz)$, $B = \lambda xy.xy$, $C = \lambda xyz.xzy$ (zadania Tomasza Wierzbickiego).

Zad. 5. Znajdź termy M i N takie, że

1) $M : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$.
2) $N : (((\alpha \to \beta) \to \beta) \to \beta) \to (\alpha \to \beta)$.

Zad. 6. Niech M będzie termem, w którym zmienna x nie jest wolna. Pokaż, że jeżeli $\Gamma \vdash \lambda x\, Mx : \sigma$, to $\Gamma \vdash M : \sigma$. Zauważ, że znając typ numerału c_1 możemy korzystając z tego faktu znaleźć typ termu $\mathbf{I}$. Przeprowadź odpowiednie rozumowanie.

Zad. 7. Przyjmujmy, że **int** oznacza typ $(\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$. W tym zadaniu funkcję $f : N^2 \to N$ będziemy nazywać reprezentowalną (w rachunku λ z typami), jeżeli dla pewnego termu F typu $\mathbf{int} \to \mathbf{int} \to \mathbf{int}$ i dowolnych $m, n \in N$ zachodzi równość $F\, c_m\, c_n = c_{f(m,n)}$. Pokaż, że dodawanie i mnożenie są funkcjami reprezentowalnymi, a potęgowanie nie jest (niekoniecznie jest) funkcją reprezentowalną. Pokaż też, że funkcje reprezentowalne są zamknięte ze względu na dodawanie i mnożenie.