

Lista zadań nr 7 z rachunku lambda 27 kwietnia 2019

Zad. 1. Przypuśćmy, że mając term M redukujemy go w następujący sposób: dopóki M nie jest w postaci normalnej, kolorujemy wszystkie występujące w nim redeksy, a następnie redukujemy je. Możemy umówić się, że kolorowe redeksy redukujemy jakkolwiek, albo od końca, albo też jakkolwiek inaczej. Pokaż, że jeżeli term M ma postać normalną, to każdy taki sposób redukcji jest skończony i prowadzi do znalezienia postaci normalnej termu M .

Lemat Hindleya-Rosena

Zad. 2. Przypuśćmy, że mamy dwie redukcje $\rightarrow_1$ i $\rightarrow_2$, które mają własność Churcha-Rossera i które komutują (a więc dla każdych M, M_1 i M_2 spełniających $M \rightarrow_1 M_1$ i $M \rightarrow_2 M_2$ istnieje N taki, że $M_1 \rightarrow_2 N$ i $M_2 \rightarrow_1 N$). Wtedy relacja $\rightarrow$ też ma własność Churcha-Rossera. Relacja $\rightarrow$ to zwrotne i przechodnie domknięcie relacji $\rightarrow = \rightarrow_1 \cup \rightarrow_2$.

$\lambda\delta$ -rachunek W zwykłym λ -rachunku bierzemy zmienną δ i bierzemy dowolną funkcję $f : N \rightarrow N$. Żeby nie komplikować sytuacji, zmienną δ uważamy za stałą, a więc nie używamy operatorów abstrakcji wiążących δ . Rozważamy tak zwaną δ -regułę postacji $\delta c_n \rightarrow_\delta c_{f(n)}$ (dobrze, gdy c_n to numerał Churcha, choć możemy posłużyć się innym systemem liczbowym). Regułę tę rozszerzamy jak zwykle do δ -redukcji w jednym kroku, δ -redukcji $\rightarrow_\delta$ i δ -konwersji. Church rozważał podobną δ -regułę, która wyrażenie postaci δMN pozwalała zastąpić przez **true** lub **false** w zależności od tego, czy termy M i N są identyczne, czy nie.

Zad. 3. Pokaż, że relacja δ -redukcji w jednym kroku $\rightarrow_\delta$ ma własność Churcha-Rossera. Wskazówka: to jest naprawdę proste zadanie.

Zad. 4. Pokaż, że relacje $\rightarrow_\beta$ i $\rightarrow_\delta$ komutują w następującym sensie: dla dowolnych termów M, M_1 i M_2 takich, że $M \rightarrow_\delta M_1$ i $M \rightarrow_\beta M_2$ istnieje term N taki, że $M_1 \rightarrow_\beta N$ oraz $M_2 \rightarrow_\delta N$. Co jest potrzebne, aby przeszło analogiczne rozumowanie dla δ -reguły Churcha?

Zad. 5. Pokaż, że relacje $\rightarrow_\delta$ i $\rightarrow_\beta$ komutują.

Zad. 6. Pokaż, że relacja $\rightarrow_{\beta\delta}$, czyli zwrotne i przechodnie domknięcie relacji $\rightarrow_{\beta\delta} = \rightarrow_\beta \cup \rightarrow_\delta$ ma własność Churcha-Rossera i w konsekwencji $\lambda\delta$ -rachunek jest niesprzeczny.

η -reguła i $\lambda\eta$ -rachunek Rozszerzamy rachunek lambda o nowe sposoby dowodzenia równości (zachowując dotychczasowe) lub o nowe równości:

- 1) o η -redukcję $\lambda x.Mx \rightarrow_\eta M$ dla $x \notin FV(M)$, a więc w szczególności przyjmujemy, że $\lambda x.Mx =_\eta M$,
- 2) o regułę ekstensjonalności stwierdzającą, że jeżeli $x \notin FV(MN)$ i $Mx = Nx$, to $M = N$,
- 3) o równość $I = c_1$.

Zad. 7. Pokaż, że w każdym z tych przypadków, w rozszerzonym λ -rachunku możemy dowieść dokładnie te same równości i są wśród nich takie, których nie udowodnimy w zwykłym λ -rachunku.

Zad. 8. Pokaż, że relacja η -redukcji w jednym kroku $\rightarrow_\eta$ ma własność Churcha-Rossera.

Zad. 9. Pokaż, że relacje $\rightarrow_\beta$ i $\rightarrow_\eta$ komutują w następującym sensie: dla dowolnych termów M, M_1 i M_2 takich, że $M \rightarrow_\eta M_1$ i $M \rightarrow_\beta M_2$ istnieje term N taki, że $M_2 \rightarrow_\delta N$ oraz albo $M_1 \rightarrow_\beta N$, albo $M_1 = N$.

Zad. 10. Pokaż, że relacje $\rightarrow_\delta$ i $\rightarrow_\beta$ komutują.

Zad. 11. Pokaż, że relacja $\rightarrow_{\beta\eta}$, czyli zwrotne i przechodnie domknięcie relacji $\rightarrow_{\beta\eta} = \rightarrow_\beta \cup \rightarrow_\eta$ ma własność Churcha-Rossera i w konsekwencji $\lambda\eta$ -rachunek jest niesprzeczny.