

Lista zadań nr 6 z rachunku lambda 14 kwietnia 2019

Zad. 1. Przeanalizuj różne sposoby redukcji kolorowych redeksów w termach $(\lambda x x x)^n(I)$ lub $(\lambda x \lambda y y x x)^n(I)$ (może te termy mają jakąś interpretację?).

Zad. 2. Niech M będzie termem z kolorowymi redeksami, a $\mathcal{C}(M)$ niech oznacza długość najdłuższego ciągu redukcji (w jednym kroku) zaczynającego się termem M i kończącego się postacią normalną termu M . Udowodnij, że istnieją ciąg coraz dłuższych termów $M_0, M_1, \dots$ i liczba rzeczywista c taka, że

$$2^{c \cdot v_n} \leq \mathcal{C}(M_n) \leq 2^{v_n},$$

gdzie v_n jest liczbą wystąpień zmiennych w termie M_n .

λI -rachunek. Rozważamy rachunek lambda ze zbiorem termów spełniającym dodatkowy warunek ograniczający tworzenie abstrakcji. Definicję zbioru λI -termów otrzymujemy zastępując w zwykłej definicji λ -termów warunek dotyczący abstrakcji warunkiem postaci

jeżeli $x \in V$ i M jest λI -termem takim, że $x \in FV(M)$, to λI -termem jest też $\lambda x M$.

W ten sposób numerał Churcha reprezentujący 0, a także termy reprezentujące w rachunku λ prawdę i fałsz przestają być poprawnymi termami. Poza tym prawie nic nie zmieniamy. Rachunek λI to rachunek z termami takimi, jak I , w przeciwieństwie do zwykłego λ -rachunku, który czasem jest określany jako λK -rachunek, czyli rachunek dopuszczający termy takie, jak K .

Zad. 3. Pokaż, że zbiór λI -termów jest zamknięty ze względu na β -redukcję, a więc jeżeli M jest λI -termem i $M \rightarrow_\beta N$, to N też jest λI -termem.

Zad. 4. Przypuśćmy, że mamy λI -term M z dwoma kolorowymi redeksami: zielonym i czerwonym. Redukując zielony redeks w termie M otrzymujemy term N . Pokaż, że w termie N jest czerwony redeks. Podaj też przykład świadczący o tym, że fakt ten nie zachodzi dla dowolnych λ -termów.

Zad. 5. Przypuśćmy, że mamy λ -termy M i N z zielonymi redeksami takie, że $M \rightarrow N$ (w M redukujemy dowolny redeks, niekoniecznie zielony, kolorowanie N powstało z kolorowania M w wyniku dokonanej redukcji). Niech M' i N' będą odpowiednio postaciami normalnymi M i N w sensie redukcji zielonych redeksów (redukujemy tylko zielone redeksy, wszystkie). Wiemy (skąd?), że $M' \rightarrow N'$. Jak można wzmocnić tezę, jeżeli dodatkowo założymy, że M jest λI -termem.

Zad. 6. Udowodnij następujące twierdzenie: Dane są λI -termy M i N takie, że $M \rightarrow N$. Jeżeli istnieje nieskończona redukcja $M_0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$ zaczynająca się termem $M_0 = M$, to istnieje też nieskończona redukcja zaczynająca się termem N . Wskazówka: Wskazane jest korzystanie z poprzednich zadań. Najpierw kolorujemy np. na zielono redeks, który umożliwia przekształcenie termu M w term N . Jeżeli M_0 jest termem z kolorowymi redeksami, to takie są też wszystkie termy otrzymane z M_0 w wyniku β -redukcji, w tym termy $M_1, M_2, M_3, \dots$. Każdy z tych termów sprowadzamy do postaci normalnej dla redukcji kolorowych redeksów. Przyjmijmy, że taką postacią normalną termu M_i jest M'_i . Ciąg $M'_0, M'_1, M'_2, \dots$ można uważać za nieskończoną redukcję termu N .

Zad. 7. Wywnioskuj z poprzedniego zadania, że jeżeli istnieje nieskończona redukcja zaczynająca się λI -termem M , to term M nie ma postaci normalnej.

η -reguła i $\lambda\eta$ -rachunek Rozszerzamy rachunek lambda o nowe sposoby dowodzenia równości (zachowując dotychczasowe) lub o nowe równości:

- 1) o η -redukcję $\lambda x.Mx \rightarrow_\eta M$ dla $x \notin FV(M)$, a więc w szczególności przyjmujemy, że $\lambda x.Mx =_\eta M$,
- 2) o regułę ekstensjonalności stwierdzającą, że jeżeli $x \notin FV(MN)$ i $Mx = Nx$, to $M = N$,
- 3) o równość $I = c_1$.

Zad. 8. Pokaż, że w każdym z tych przypadków, w rozszerzonym λ -rachunku możemy dowieść dokładnie te same równości i są wśród nich takie, których nie udowodnimy w zwykłym λ -rachunku.