

Lista zadań z rachunku lambda nr 5

31 marca 2019

Zad. 1. Zdefiniuj na dwa sposoby term reprezentujący funkcję $f(n) = n!$, używając kombinatora punktu stałego i korzystając z numeratów Churcha jako iteratorów. Można korzystać z wyrażeń reprezentujących w λ -rachunku następnik, poprzednik, mnożenie itp. funkcje.

Zad. 2. Znajdź term, który λ -definiuje funkcję Ackermanna A spełniającą równości $A(0, n) = n + 1$, $A(m + 1, 0) = A(m, 1)$ oraz $A(m + 1, n + 1) = A(m, A(m + 1, n))$.

Zad. 3. Znajdź term C taki, że $C \ulcorner n \urcorner = C_n$ dla wszystkich $n \in N$, czyli term pozwalający przekształcać numerały Barendregta w numerały Churcha.

Zad. 4. Znajdź term H taki, że $Hc_{n^2} = c_n$ (lub analogiczny term dla literałów Barendregta).

Zad. 5. Niech $f : N^2 \rightarrow N$ będzie całkowitą funkcją rekurencyjną. Znajdź ciąg λ -termów $X_0, X_1, X_2, \dots$ taki, że $X_m X_n = X_{f(m,n)}$ dla wszystkich $m, n \in N$. Wskazówka. Próbuje się tak zdefiniować term X_n , aby z niego dało się odczytać c_n . Wtedy aplikując X_m do X_n powinniśmy wyznaczyć c_m i c_n , następnie wyliczyć $c_{f(m,n)}$ i z tego termu utworzyć $X_{f(m,n)}$. Najprostszy pomysł definiowania X_m jako $[A, c_m] = \lambda z. zAc_m$ też daje dobry rezultat.

Zad. 6. Znajdź ciąg λ -termów $X_0, X_1, X_2, \dots$ taki, że

$$X_0 = S \text{ oraz } X_{n+1} = X_n X_{n+2}$$

dla wszystkich $n \in N$. Wskazówka. A może uznać, że mamy jednak daną indukcyjną definicję ciągu $X_0, X_1, X_2, \dots$, mimo że wygląda ona absurdalnie.

Zad. 7. Udowodnij następującą wersję twierdzenia o punkcie stałym: dla każdych dwóch λ -termów F i G istnieją λ -termy A i B takie, że $FAB = A$ i $GAB = B$.

Zad. 8. Niech a i b będą funkcjami naturalnymi zdefiniowanymi przez jednoczesną indukcję wzorami $a(0) = 0$, $b(0) = 0$,

$$a(n+1) = \begin{cases} a(n) + 1 & \text{jeżeli } b(n) > 0 \\ 0 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}$$

oraz

$$b(n+1) = \begin{cases} b(n) - 1 & \text{jeżeli } b(n) > 0 \\ a(n) + 1 & \text{w przeciwnym razie} \end{cases}.$$

Co to za funkcje? Korzystając z poprzedniego zadania pokaż, że są reprezentowalne w λ -rachunku.

Zad. 9. Pokaż, że istnieje M taki, że dla każdego N mamy $MN = MM$.

Zad. 10. Pokaż, że dla dowolnego termu M i dowolnej zmiennej x istnieje term F taki, że $F =_{\beta} M[x := F]$.

Zad. 11. Przyjmijmy, że $W = \lambda xyf.f(yxyf)$ oraz $\Delta = WWW$. Pokaż, że Δ jest kombinatorem punktu stałego. Spróbuj uogólnić Twoje uzasadnienie. Albo jeszcze inaczej przyjmijmy, że $\Delta_M = WMW$. Dla dowolnego termu (stałego) M term Δ_M też jest kombinatorem punktu stałego.

Zad. 12. Następujące warunki są równoważne:

- 1) $SI M = M$,
- 2) $MF = F(MF)$ dla wszystkich termów F .

Wskazówka: Jeżeli $Mf =_{\beta} f(Mf)$ dla zmiennej $f \notin FV(M)$, to w λ -rachunku term M jest równy pewnej abstrakcji. Stąd $M =_{\beta} \lambda f. Mf$. Uzasadnienie wskazówki wymaga zwykle pewnej wiedzy, która nie została jeszcze wyłożona.

Zad. 13. Termy $Y(SI)$, $Y^2(SI)$ są operatorami punktów stałych. To samo dotyczy termów postaci $\lambda f. (\lambda x z. f(xxz))(\lambda x z. f(xxz))M$.

Zad. 14. Pokaż, że $Y(SI) \rightarrow_{\beta} \Theta$, gdzie $Y = \lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx))$, a Θ jest kombinatorem Turinga $(\lambda x f. f(xxf))(\lambda x f. f(xxf))$.